

**מבחן בגרות 35803 מועד חורף תשע"ג 2013**

**ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות)**

**שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.**

**שאלה מספר 1**

בעל פיצרייה קנה 5 ק"ג גבינה צהובה ו- 10 ק"ג קמח. ידוע כי מחיר 1 ק"ג גבינה צהובה גבוה ב- 50 שקלים ממחיר 1 ק"ג קמח. בעל הפיצרייה קיבל הנחה של 20% על כל 1 ק"ג גבינה צהובה, והנחה של 25% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל הפיצרייה בעבור הקנייה 315 שקלים (א). מה היה המחיר של 1 ק"ג גבינה צהובה, ומה היה המחיר של 1 ק"ג קמח לפני ההנחה? (ב). ידוע כי כל פיצה נמכרת במחיר זהה, ולהכנתה יש צורך ב- 250 גרם גבינה צהובה ו- 500 גרם קמח. בעל הפיצרייה מעוניין לנצל את כל הרכיבים שקנה. מצא כמה פיצות עליו לייצר. פרט את חישוביך.

**פתרון:**

**הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016**  
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,  
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

**הנחה - 20%**  
 $1 - \frac{20}{100} = 0.8$

**הנחה - 25%**  
 $1 - \frac{25}{100} = 0.75$

**נתונים**  
 הגדרת המשתנים: x - מחיר ק"ג קמח, y - מחיר ק"ג גבינה

משוואה	גבינה			קמח			
	סה"כ	כמות	מחיר	פעולה	כמות		מחיר
$y = x + 50$			y	= +50		x	מחיר
$10 \cdot 0.75x + 5 \cdot 0.8y = 315$	315	5	0.8 · y	+	10	0.75x	קניה

$$10 \cdot 0.75x + 5 \cdot 0.8y = 315$$

$$7.5x + 4y = 315$$

$$y = x + 50$$

$$7.5x + 4(x + 50) = 315$$

$$7.5x + 4x + 200 = 315$$

$$11.5x = 115$$

$$x = 10$$

$$y = x + 50$$

$$y = 10 + 50$$

$$y = 60$$

**תשובה**  
 1 ק"ג קמח = 10 ₪  
 1 ק"ג גבינה = 60 ₪

**(ב). ידוע כי כל פיצה נמכרת במחיר זהה, ולהכנתה יש צורך ב- 250 גרם גבינה צהובה ו- 500 גרם קמח. בעל הפיצרייה מעוניין לנצל את כל הרכיבים שקנה. מצא כמה פיצות עליו לייצר. פרט את חישוביך.**

**תשובה:** נמיר גרמים לק"ג ונבדוק כמה פיצות מספיק כל אחד מהרכיבים

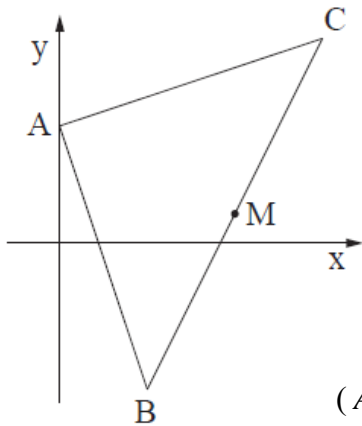
(1). 500 גרם = 0.5 ק"ג קמח לפיצה  $\frac{10}{0.5} = 20$

(2). 250 גרם = 0.25 ק"ג גבינה לפיצה  $\frac{5}{0.25} = 20$

**תשובה סופית :**

(א) 1 ק"ג קמח = 10 ₪      1 ק"ג גבינה = 60 ₪      (ב) 20 פיצות

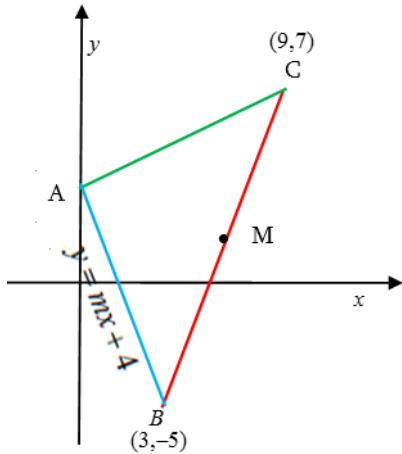
**שאלה מספר 2**



בציור שלפניך נתון:  
 ונקודה  $C(9,7)$   $B(3,-5)$  ונקודה  $A$  נמצאת על ציר ה-  $y$ .  
 משוואת הישר שעליו מונחת הצלע  $AB$   
 היא  $y = mx + 4$  (  $m$  הוא פרמטר)  
 (א) מצא את שיעורי  $A$ .  
 (2) מצא את  $m$ .  
 (ב.) הוכח שהמשולש  $BAC$  הוא משולש ישר זווית.  
 (ג.) נקודה  $M$  היא אמצע הצלע  $BC$ .  
 נתונה נקודה  $D$  ברביע הראשון (שאינה מופיע בציור)  
 כך שהמרובע  $AMDC$  הוא מקבילית ( $AM \parallel CD$  ו-  $AM = CD$ )  
 מצא את שיעורי נקודה  $D$ . פרט את חישוביך.

**פתרון:**

(א.) (1) מצא את שיעורי  $A$ .  
 (2) מצא את  $m$ .



**נקודה A**

$$y = mx + 4$$

$$x = 0$$

$$y = m(0) + 4$$

$$y = 4$$

$$A(0,4)$$

**שיפוע m**

$$A(0,4) \quad B(3,-5)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{(-5) - (4)}{(3) - (0)} = \frac{-9}{3}$$

$$m_{AB} = -3$$

**תשובה:**  $m_{AB} = -3$   $A(0,4)$

(ב.) הוכח שהמשולש  $BAC$  הוא משולש ישר זווית.

**שיפוע AC**

$$A(0,4) \quad C(9,7)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AC} = \frac{(7) - (4)}{(9) - (0)} = \frac{3}{9}$$

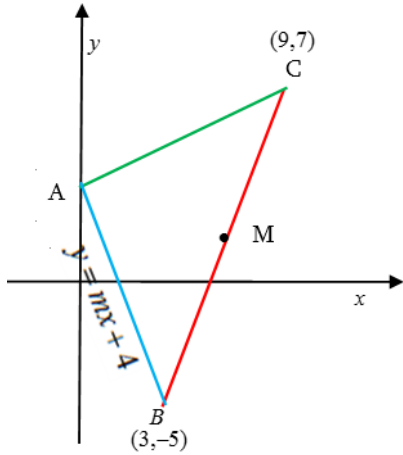
$$m_{AC} = \frac{1}{3}$$

**תשובה:** משולש  $BAC$  הוא כן משולש ישר זווית.

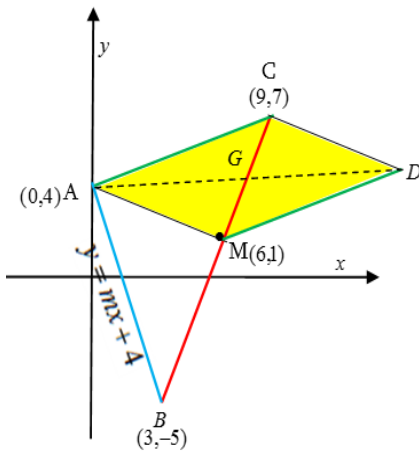
$$m_{AB} = -3 \quad m_{CE} = \frac{1}{3}$$

שיפוע הופכי נגדי  
 לכן הצלעות מאונכות אחת לשנייה

- (ג). נקודה M היא אמצע הצלע BC. נתונה נקודה D ברביע הראשון (שאינה מופיעה בציור) כך שהמרובע AMDC הוא מקבילית ( $|AM| = |CD|$  ו-  $|AC| = |MD|$ ) מצא את שיעורי נקודה D. פרט את חישוביך.



$$\begin{array}{ccc}
 \text{C} & \text{M} & \text{B} \\
 (9,7) & (x_M, y_M) & (3,-5) \\
 x_1, y_1 & & x_2, y_2 \\
 x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} & & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 x_M = \frac{(9) + (3)}{2} & & y_M = \frac{(7) + (-5)}{2} \\
 x_M = 6 & & y_M = 1 \\
 & & \text{M}(6,1)
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 \text{C} & \text{G} & \text{M} \\
 (9,7) & (x_G, y_G) & (6,1) \\
 x_1, y_1 & & x_2, y_2 \\
 x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} & & y_G = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 x_G = \frac{(9) + (6)}{2} & & y_G = \frac{(7) + (1)}{2} \\
 x_G = 7.5 & & y_G = 4 \\
 & & \text{G}(7.5,4)
 \end{array}$$

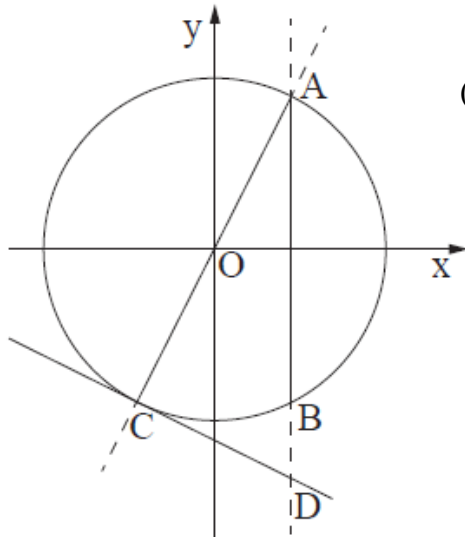
$$\begin{array}{ccc}
 \text{A} & \text{G} & \text{D} \\
 (0,4) & (7.5,4) & (x_1, y_2) \\
 x_1, y_1 & x_G, y_G & \\
 x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} & & y_G = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 7.5 = \frac{(0) + x_2}{2} & & 4 = \frac{(4) + y_2}{2} \\
 15 = 0 + x_2 & & 8 = 4 + y_2 \\
 15 = x_2 & & y_2 = 4 \\
 & & \text{D}(15,4)
 \end{array}$$

**תשובה:**  $D = (15,4)$

**תשובה סופית:**

(א)  $m_{AB} = -3$     (ב)  $m_{CE} = \frac{1}{3}$     (ג)  $D = (15,4)$     (ד)  $m_{AB} = -3$     (ה)  $A(0,4)$

**שאלה מספר 3**



- בציור שלפניך נתון המעגל  $x^2 + y^2 = 125$  (O - ראשית הצירים)  
 A ו-B הן נקודות החיתוך של המעגל עם הישר  $x = 5$   
 AC הוא קוטר במעגל.  
 (א). מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.  
 (ב). מצא את משוואת הישר שעליו מונח קוטר המעגל, AC.  
 (ג). מעבירים משיק למעגל בנקודה C.  
 מצא את משוואת המשיק.  
 (ד). ההמשך של הקטע AB חותך את המשיק בנקודה D.  
 מצא את שיעורי הנקודה D.

**פתרון:**

(א). מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

**נקודות A ו-B**

$$x^2 + y^2 = 125$$

$$x = 5$$

$$(5)^2 + y^2 = 125$$

$$25 + y^2 = 125$$

$$y^2 = 125 - 25$$

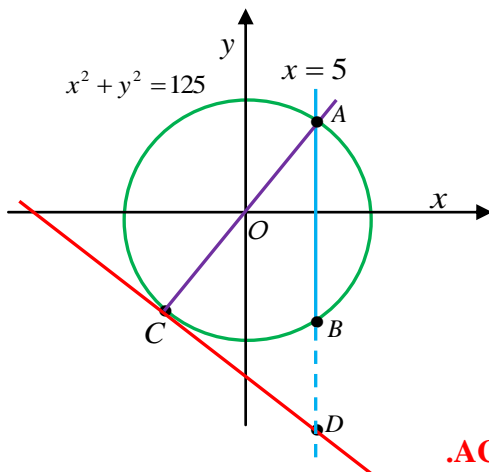
$$y^2 = 100$$

$$y = \pm\sqrt{100}$$

$$y_1 = 10 \quad y_2 = -10$$

$$A(5,10) \quad B(5,-10)$$

**תשובה:** A(5,10) B(5,-10)



(ב). מצא את משוואת הישר שעליו מונח קוטר המעגל, AC.

**שיפוע AC**

$$O(0,0) \quad A(5,10)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AC} = \frac{(10) - (0)}{(5) - (0)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$m_{AC} = 2$$

**משוואת AC**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$O(0,0) \quad m = 2$$

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

$$y_{AC} = 2x$$

**תשובה:**  $y_{AC} = 2x$

(ג). מעבירים משיק למעגל בנקודה C. מצא את משוואת המשיק.

**נקודה C**

A	O	C
•	•	•
(5,10)	(0,0)	(x <sub>2</sub> , y <sub>2</sub> )

$$x_1, y_1 \quad x_M, y_M$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$0 = \frac{5 + x_2}{2} \quad 0 = \frac{10 + y_2}{2}$$

$$0 = 5 + x_2 \quad 0 = 10 + y_2$$

$$x_2 = -5 \quad y_2 = -10$$

C(-5, -10)

**שיפוע משיק CD**

$$m_{ac} = 2 \quad m_{\text{משיק}} = -\frac{1}{2}$$

שיפוע הופכי נגדי

**משוואת משיק CD**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(-5, -10) \quad m = -\frac{1}{2}$$

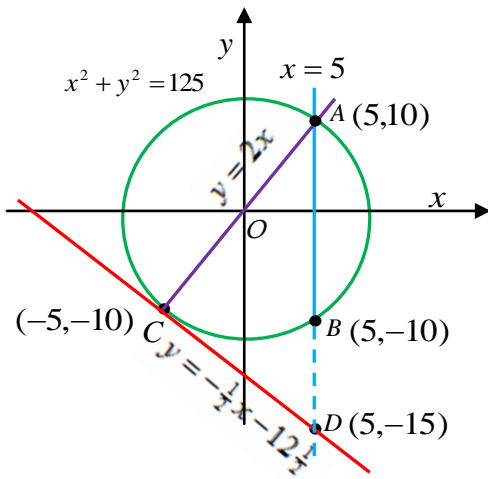
$$y + 10 = -\frac{1}{2}(x + 5)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} - 10$$

$$y_{CD} = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$$

**תשובה:**  $y_{CD} = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$

(ד). ההמשך של הקטע AB חותך את המשיק בנקודה D. מצא את שיעורי הנקודה D.



**נקודה D**

$$y = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$$

$$x = 5$$

$$y = -\frac{1}{2}(5) - 12\frac{1}{2}$$

$$y = -15$$

D (5, -15)

**תשובה:** D (5, -15)

**תשובה סופית:**

(א) A(5,10) B(5,-10) (ב)  $y_{AC} = 2x$  (ג)  $y_{CD} = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$  (ד) D = (5, -15)

**שאלה מספר 4**

נתונה הפונקציה  $y = x^2 - 4\sqrt{x}$

- (א). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - (ב). מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
  - (ג). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - (ד). מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $y$ .
  - (ה). נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה-  $x$  בנקודה  $(0, 2.52)$ .
- היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א-ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(א). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

**תשובה:** תחום ההגדרה: לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד  $x \geq 0$ .

**(ב). לפונקציה יש נקודת מקסימום אחת. מצא את שיעוריה.**

$f(x) = a\sqrt{bx}$   
 $f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$

**פונקציה**  
 $x; y$

$f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$   
 $x = 1$   
 $f(1) = (1)^2 - 4\sqrt{(1)}$   
 $y = -3$   
 $(1, -3)$

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$f'(x) = 2x - \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$   
 $f'(x) = m = 0$   
 $0 = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$   
 $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x$   
 $2 = 2x\sqrt{x}$   
 $1 = x\sqrt{x} \quad /(\ )^2$   
 $(1)^2 = (x\sqrt{x})^2$   
 $1 = x^2 \cdot x$   
 $1 = x^3$   
 $\sqrt[3]{1} = x$   
 $x = 1$

**נגזרת שנייה**  
 $\min; \max$

$f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$   
 $f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$   
**מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון**  
 $f'(x) = 2x\sqrt{x} - 2 = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2$   
 $f'(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 2$   
 $f''(x) = 3x$   
 $f''(1) = 3(1) = +3 \cup \min$

**נקודות הקיצון:**  
 $(1, -3) \cup \min$

**(ג). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.**

x	תחום הגדרה	x	ירידה	x	עלייה	x
$-\infty$		0	$\leq x <$	1	$< x <$	$+\infty$

**תשובה:** תחום ירידה:  $0 \leq x < 1$  תחום עלייה:  $0.5 < x < +\infty$

(ד). מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**פונקציה**

$y=?$

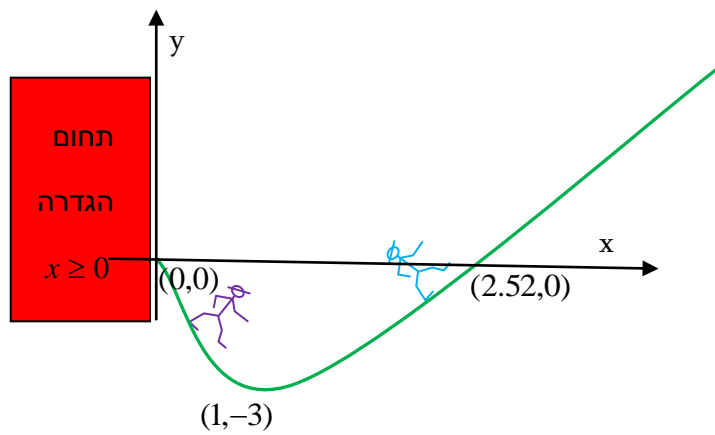
$f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$

$x = 0$

$f(0) = (0)^2 - 4\sqrt{(0)} = 0$

$(0,0)$

(ה). נתון כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה  $(2.52, 0)$ . היעזר בנתון זה ובתשובותיך לסעיפים א - ד וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

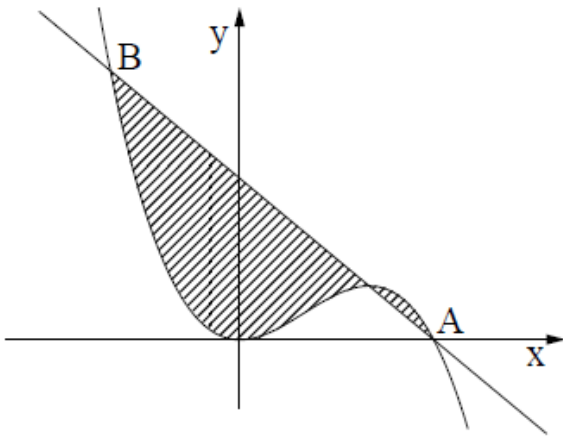


**תשובה סופית:**

(א)  $x \geq 0$  (ב)  $\min (1,-3) \cup (2.52, +\infty)$  (ג) תחום עלייה:  $1 < x < +\infty$  תחום ירידה:  $0 \leq x < 1$

(ד)  $(0,0)$  (ה) 

**שאלה מספר 5**



נתונה הפונקציה  $f(x) = -4x^3 + 6x^2$ .  
 (א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.  
 (ב) גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A$  אינה ראשית הצירים).  
 מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .  
 (ג) משוואת הישר העובר דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ודרך הנקודה  $A$  היא  $y = -4x + 6$ . הישר חותך את גרף הפונקציה בנקודה  $B(-1, 10)$  (ראה ציור).  
 חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי הישר  $AB$  (השטח המקווקו בציור).

**פתרון:**

(א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

$f(x) = a \cdot x^n$   
 $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

**פונקציה**  
 $x; y$

$f(x) = -4x^3 + 6x^2$   
 $f'(x) = -12x^2 + 12x$   
 $f'(0) = -12(0)^2 + 12(0) = 0$   
 $f'(1) = -12(1)^2 + 12(1) = 0$   
 (0,0)  
 (1,2)

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$f'(x) = -12x^2 + 12x$   
 $f'(x) = 0$   
 $0 = -12x^2 + 12x$   
 $0 = x(-12x + 12)$   
 $x_1 = 0 \quad -12x + 12 = 0$   
 $x_2 = 1$

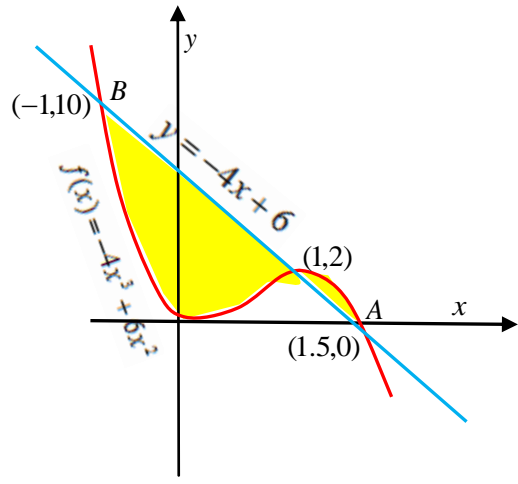
**נגזרת שנייה**  
 $\min; \max$

$f''(x) = -24x + 12$   
 $f''(0) = -24(0) + 12 = +12 \cup \min$   
 $f''(1) = -24(1) + 12 = -12 \cap \max$

**תשובה:** נקודת הקיצון

$(1,2) \cap \max$   
 $(0,0) \cup \min$

(ב) גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A$  אינה ראשית הצירים). מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .



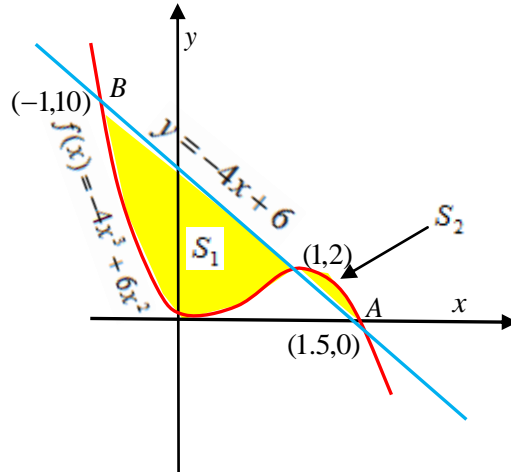
**נקודה A**

$f(x) = -4x^3 + 6x^2$   
 $y = 0$   
 $0 = -4x^3 + 6x^2$   
 $0 = x^2(-4x + 6)$   
 $x_1 = 0 \quad x_2 = 1.5$   
 $A(1.5, 0)$

**תשובה:**  $A(1.5, 0)$



(ג.) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$  על ידי הישר  $g(x)$  ועל ידי הצירים (השטח המסומן)



$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = -4x + 6$	גדול/ימין
$x = -1$	פונקציה תחתונה	$x = 1$
	$y = -4x^3 + 6x^2$	

$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = -4x^3 + 6x^2$	גדול/ימין
$x = 1$	פונקציה תחתונה	$x = 1.5$
	$y = -4x + 6$	

$$S_1 = \int_{-1}^1 (-4x + 6) - (-4x^3 + 6x^2) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^1 (-4x + 6 + 4x^3 - 6x^2) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^1 (4x^3 - 6x^2 - 4x + 6) dx$$

$$S_1 = \left[ \frac{4x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^1$$

$$S_1 = [x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x]_{-1}^1$$

$$S_1 = [(1)^4 - 2(1)^3 - 2(1)^2 + 6(1)]$$

$$- [(-1)^4 - 2(-1)^3 - 2(-1)^2 + 6(-1)]$$

$$S_1 = [3] - [-5]$$

$$S_1 = [8]$$

$$S_2 = \int_1^{1.5} (-4x^3 + 6x^2) - (-4x + 6) dx$$

$$S_2 = \int_1^{1.5} (-4x^3 + 6x^2 + 4x - 6) dx$$

$$S_2 = \left[ -\frac{4x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 6x \right]_1^{1.5}$$

$$S_2 = [-x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x]_1^{1.5}$$

$$S_2 = [-(1.5)^4 + 2(1.5)^3 + 2(1.5)^2 - 6(1.5)]$$

$$- [-(1)^4 + 2(1)^3 + 2(1)^2 - 6(1)]$$

$$S_2 = \left[ -2\frac{13}{16} \right] - [-3]$$

$$S_2 = \left[ \frac{3}{16} \right]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = [8] + \left[ \frac{3}{16} \right] = 8\frac{3}{16}$$

$$S_T = [8] + \left[ \frac{3}{16} \right] = 8\frac{3}{16} \quad \text{תשובה:}$$

תשובה סופית:

$$S_T = [8] + \left[ \frac{3}{16} \right] = 8\frac{3}{16} \quad (\text{ג}) \quad A(1.5,0) \quad (\text{ב}) \quad (1,2) \cap \max(0,0) \cup \min(\text{א})$$

פתרונות מלאים ניתן למצוא באתר "מתמטיקה באומץ - יוסי דהן"

בכתובת: <https://sites.google.com/site/matematikabomez/home>

**שאלה מספר 6**

- (א) מבין כל זוגות המספרים החיוביים  $x$  ו- $z$  המקיימים  $x \cdot z = 48$ , מצא את זוג המספרים שעבורם הסכום  $x + 3z$  הוא מינימלי.  
 (ב) מהו הסכום המינימלי?

**פתרון:**

1. **משפט המטרה:** זוג המספרים שעבורם הסכום  $x + 3z$  הוא מינימלי.

2. **נוסחת המטרה:**  $p = x + 3z \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:**  $x \cdot z = 48 \Rightarrow z = \frac{48}{x}$

4. **פונקציית המטרה:**  
 $p = x + 3z \Rightarrow \min$   
 $p = x + 3 \cdot \frac{48}{x}$

$$p = x + \frac{144}{x}$$

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

**פונקציה**

$$p = 1x + \frac{144}{x}$$

$$x = 12$$

$$p = 1(12) + \frac{144}{12}$$

$$p = 24$$

**נגזרת ראשונה**

$$p' = 1 - \frac{144 \cdot 1}{x^2}$$

$$p' = 0$$

$$0 = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$\frac{144}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm \sqrt{144}$$

$$x_1 = 12 \quad x_2 = -12$$

**נגזרת שנייה**

**Max/min**

$$P''(x) = +\frac{144 \cdot 2}{x^3} = \frac{288}{x^3}$$

$$P''(12) = \frac{288}{(12)^3} = +\frac{1}{6} \cup \min$$

$$P''(-12) = \frac{288}{(-12)^3} = -\frac{1}{6} \cap \max$$

**ריכוז התשובות**

$x = 12$      $\min$

$z = 4$

$p = 24$

$z = \frac{48}{x}$

$x = 12$

$z = \frac{48}{12}$

$z = 4$

**המספר השני :**

**המספר הראשון:**  $x = 12$

**תשובה סופית:**

$p = 24$      $\min$     (ב)     $x = 12$      $z = 4$     (א)