

**מבחן בגרות 35803 מועד א קיץ תשע"ג 2013**

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

**שאלה מספר 1**

סוחר קנה  $x$  טבעות ושילם עבורן בסך הכול 3600 שקל. 5 טבעות אבדו, את יתר הטבעות מכר הסוחר במחיר שווה לכל טבעת. שהיה גבוה ב - 50% ממחיר הקנייה של כל אחת מהטבעות. הרווח של הסוחר בעסקה זו היה 1200 שקל. חשב כמה טבעות קנה הסוחר.

**פתרון**

**הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016**  
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

**נתונים**

הגדרת המשתנים:  $x$  - כמות טבעות  $y$  - מחיר טבעת

**גבוה ב - 50%**

$$1 + \frac{50}{100} = 1.5$$

**מכירה = רווח + קניה**

$$3600 + 1200 = 4800$$

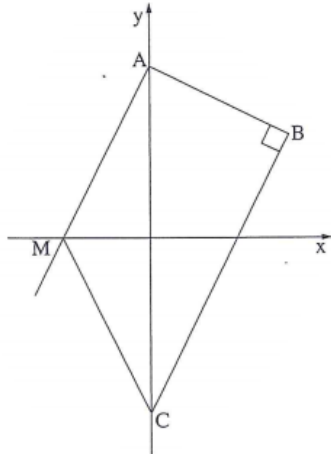
טבעות			
סה"כ	כמות	מחיר	
$x \cdot y = 3600$	$x$	$y$	קניה
$1.5y \cdot (x - 5) = 4800$	$x - 5$	$1.5y$	מכירה

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ 1.5y(x - 5) = 4800 \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot y = 3600 \\ y = 80 \\ x = \frac{3600}{y} = \frac{3600}{80} = 45 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1.5x \cdot y - 7.5y &= 4800 \\ 1.5 \cdot 3600 - 7.5y &= 4800 \\ 5400 - 7.5y &= 4800 \\ 600 &= 7.5y \\ y &= 80 \end{aligned}$$

**תשובה סופית:**

45 טבעות קנה הסוחר במחיר של 80 שקל לטבעת



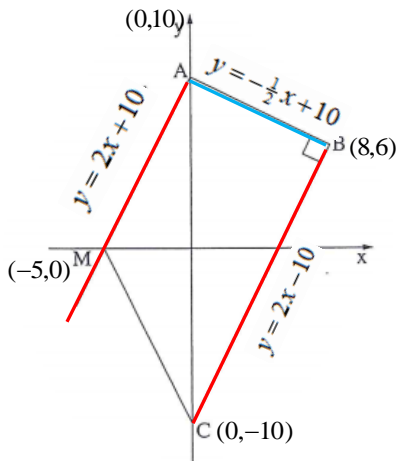
**שאלה מספר 2**

- I.  $y = 2x + 10$  נתונים שני ישרים :
- II.  $y = 2x - 10$

- ישר I חותך את ציר ה-  $y$  בנקודה A .
- ישר II חותך את ציר ה-  $y$  בנקודה C .
- דרך הנקודה A העבירו אנך לישר II , החותך את הישר II בנקודה B (ראה ציור).
- (א) מצא את השיעורים של הנקודה B .
- (ב) ישר I חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה M . מצא את שטח הטרפז ABCM .

**פתרון:**

(א) מצא את השיעורים של הנקודה B .



<u>נקודה A</u>	<u>נקודה M</u>	<u>נקודה C</u>
$y = 2x + 10$	$y = 2x + 10$	$y = 2x - 10$
$x = 0$	$y = 0$	$x = 0$
$y = 2(0) + 10$	$0 = 2x + 10$	$y = 2(0) - 10$
$y = 10$	$-2x = 10$	$y = -10$
$A(0,10)$	$x = -5$	$C(0,-10)$
	$M(-5,0)$	

**נקודה B**

$$y_{BC} = y_{AB}$$

$$2x - 10 = -\frac{1}{2}x + 10 \quad y = 2x - 10$$

$$2x + \frac{1}{2}x = 10 + 10 \quad x = 8$$

$$2\frac{1}{2}x = 20 \quad y = 2(8) - 10$$

$$x = 8 \quad y = 6$$

$$B(8,6)$$

**שיפוע AB**

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \quad m_{BC} = 2$$

שיפוע הופכי נגדי

**משוואת AB**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(0,10) \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 10 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y_{AB} = -\frac{1}{2}x + 10$$

**תשובה:** B(8,6)

(ב) ישר I חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה M . מצא את שטח הטרפז ABCM

**אורך הקטע AM**

$$A(10,0) \quad M(-5,0)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (10 - 0)^2 + (0 - 0)^2$$

$$d_{AM} = \sqrt{125} \quad d_{AM} = 11.18$$

**אורך הקטע BC**

$$C(0,-10) \quad B(8,6)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (6 - 0)^2 + (8 - (-10))^2$$

$$d_{BC} = \sqrt{320} \quad d_{BC} = 17.88$$

**אורך הקטע AB**

$$A(0,10) \quad B(8,6)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (6 - 0)^2 + (8 - 10)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{80} \quad d_{AB} = 8.994$$

**שטח הטרפז**

$$S_{ABCM} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

$$S_{ABCM} = \frac{(\sqrt{320} + \sqrt{125}) \cdot \sqrt{80}}{2} = 130$$

$$S_{ABCM} = 130$$

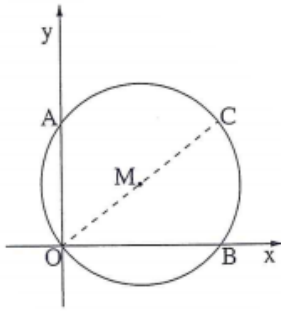
**תשובה:**  $S_{ABCM} = 130$

**תשובה סופית:**

$S_{ABCM} = 130$  (ב) B(8,6) (א)

**שאלה מספר 3**

נתון מעגל שמשוואתו היא :  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$   
 המעגל חותך את הצירים בנקודות  $A, B$  ו- $O$   
 כמתואר בציור.



- (א) מצא את משוואת הישר  $AB$ .  
 (ב) הראה כי מרכז המעגל  $M$  נמצא על הישר  $AB$ .  
 (ג)  $OC$  הוא קוטר במעגל (ראה ציור) מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .  
 (ד) מצא את משוואת התיכון לצלע  $AC$  במשולש  $AMC$ .

**פתרון:**

**(א) מצא את משוואת הישר  $AB$ .**

**שיפוע  $AB$**

$A(0,6) \quad B(8,0)$   
 $(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$   
 $m_{AB} = \frac{(0)-(6)}{(8)-(0)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

**משוואת  $AB$**

$y - y_1 = m(x - x_1)$   
 $(8,0) \quad m = -\frac{3}{4}$   
 $y + 0 = -\frac{3}{4}(x - 8)$   
 $y = -\frac{3}{4}x + 6$

**נקודה B**

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$   
 $y = 0$   
 $(x-4)^2 + (0-3)^2 = 25$   
 $(x-4)^2 + 9 = 25$   
 $(x-4)^2 = 25 - 9$   
 $x - 4 = \pm\sqrt{16}$   
 $x = \pm 4 + 4$   
 $x = -4 + 4 \quad x = +4 + 4$   
 $x_1 = 0 \quad x_2 = 8$   
 $B(8,0)$

**נקודה A**

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$   
 $x = 0$   
 $(0-4)^2 + (y-3)^2 = 25$   
 $16 + (y-3)^2 = 25$   
 $(y-3)^2 = 25 - 16$   
 $y - 3 = \pm\sqrt{9}$   
 $y = \pm 3 + 3$   
 $y = -3 + 3 \quad y = +3 + 3$   
 $y_1 = 0 \quad y_2 = 6$   
 $A(0,6)$

**(ב) הראה כי מרכז המעגל  $M$  נמצא על הישר  $AB$ .**

**משוואת  $AB$**

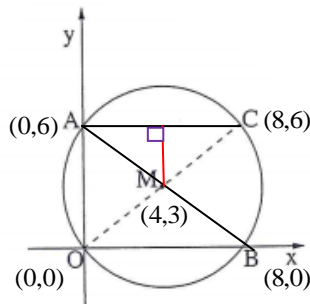
$y = -\frac{3}{4}x + 6$      $M(4,3) \quad 3 = -\frac{3}{4}(4) + 6 \quad 3 = 3 \quad 3 = 3$     **תשובה: הוכחה**

**נקודה C**

$O \quad M \quad C$   
 $(0,0) \quad (4,3) \quad (x_2, y_2)$   
 $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$   
 $4 = \frac{(0) + x_2}{2} \quad 3 = \frac{(0) + y_2}{2}$   
 $8 = (0) + x_2 \quad 6 = (0) + y_2$   
 $x_2 = 8 \quad C(8,6) \quad y_2 = 6$

**(ג)  $OC$  הוא קוטר במעגל (ראה ציור) מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .**

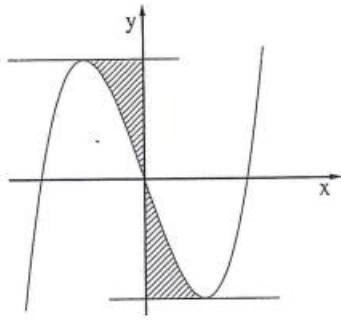
**(ד) מצא את משוואת התיכון לצלע  $AC$  במשולש  $AMC$**



**תשובה:** במשולש  $AMC$  הצלע  $AC$  מקבילה לציר ה- $x$  התיכון לצלע  $AC$  מקביל לציר ה- $y$  לכן משוואת התיכון היא  $x = 4$

**תשובה סופית :**

(א)  $y_{AB} = -\frac{3}{4}x + 6$     (ב) הוכחה  $3 = 3$     (ג)  $C(8,6)$     (ד)  $x = 4$



**שאלה מספר 4:**

נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$  (ראה ציור).

(א) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.

העבירו משיק אחד לגרף הפונקציה דרך נקודת המקסימום שלה, והעבירו משיק אחר לגרף הפונקציה דרך נקודת המינימום שלה, כמתואר בציור.

(ב) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק בנקודת המקסימום,

על ידי המשיק בנקודת המינימום ועל ידי ציר ה- $y$  (השטח המקווקו בציור)

**פתרון:**

(א) **מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.**

$f(x) = a \cdot x^n$   
 $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

**פונקציה**  
 $x ; y$

$f(x) = x^3 - 3x$   
 $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$   
 $(-1, 2)$   
 $f(1) = (1)^3 - 3(1) = -2$   
 $(1, -2)$

**נגזרת ראשונה**  
 $x ; m$

$f'(x) = 3x^2 - 3$   
 $f'(x) = 0$   
 $0 = 3x^2 - 3$   
 $3x^2 = 3$   
 $x = \pm\sqrt{1}$   
 $x_1 = +1 \quad x_2 = -1$

**נגזרת שנייה**  
 $\min ; \max$

$f''(x) = 6x$   
 $f''(-1) = 6(-1) = -6 \cap \max$   
 $f''(+1) = 6(1) = +6 \cup \min$

**נקודת הקיצון**

$(-1, 2) \cap \max$   
 $(1, -2) \cup \min$

**תשובה:**

• **מציאת משוואת המשיקים לנקודות הקיצון:**

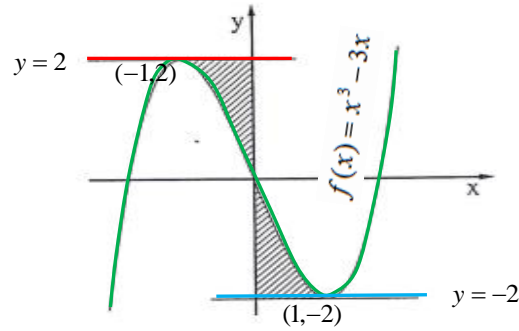
**משוואת המשיק ב- max**

$y - y_1 = m(x - x_1)$   
 $(-1, 2) \quad m = 0$   
 $y - 2 = 0(x + 1)$   
 $y = 2$

**משוואת המשיק ב- min**

$y - y_1 = m(x - x_1)$   
 $(1, -2) \quad m = 0$   
 $y + 2 = 0(x - 1)$   
 $y = -2$

**(ב) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק בנקודת המקסימום, על ידי המשיק בנקודת המינימום ועל ידי ציר ה- y (השטח המקווקו בצירור)**



$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = 2$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = -1$	$y = x^3 - 3x$	$x = 0$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (2) - (x^3 - 3x) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (2 - x^3 + 3x) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (-x^3 + 3x + 2) dx$$

$$S_1 = \left[ -\frac{1x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0$$

$$S_1 = \left[ \frac{(0)^4}{4} + \frac{3(0)^2}{2} + 2(0) \right] - \left[ \frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right]$$

$$S_1 = [0] - \left[ -\frac{3}{4} \right]$$

$$S_1 = \left[ \frac{3}{4} \right]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T \left[ \frac{3}{4} \right] + \left[ \frac{3}{4} \right] = 1\frac{1}{2}$$

$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = x^3 - 3x$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 0$	$y = -2$	$x = 1$

$$S_2 = \int_0^1 (x^3 - 3x) - (-2) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$S_2 = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$S_2 = \left[ \frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} + 2(1) \right] - \left[ \frac{(0)^3}{4} - \frac{3(0)^2}{2} + 2(0) \right]$$

$$S_2 = \left[ \frac{3}{4} \right] - [0]$$

$$S_2 = \left[ \frac{3}{4} \right]$$

$$S = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \quad \text{תשובה:}$$

**תשובה סופית:**

$$S = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2} \quad \text{(ב)} \quad (-1, 2) \cap \max \quad (1, -2) \cup \min \quad \text{(א)}$$

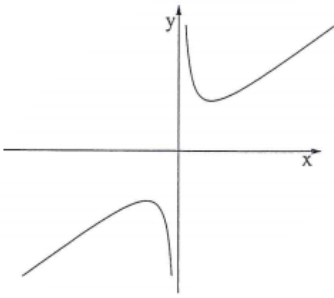
**שאלה מספר 5**

נתונה הפונקציה  $f(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

(א) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.

(ב) העבירו ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$

והעבירו ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -1$  מצא את השיעורים של נקודת המפגש בין שני המשיקים



**פתרון:**

(א) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן על פי הציור.

**פונקציה**  
 $x; y$

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$f(0.5) = 2(0.5) + \frac{1}{2(0.5)}$$

$$y = 2$$

$$(0.5, 2)$$

$$f(-0.5) = 2(-0.5) + \frac{1}{2(-0.5)}$$

$$y = -2$$

$$(-0.5, -2)$$

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$$f'(x) = 2 - \frac{1 \cdot 1}{2x^2}$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$0 = 2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{2x^2} = 2$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = 0.25$$

$$x = \pm\sqrt{0.25}$$

$$x_1 = 0.5 \quad x_2 = -0.5$$

**נגזרת שנייה**  
 $\min; \max$

$$f''(x) = +\frac{1 \cdot 2}{2x^3} = +\frac{1}{x^3}$$

$$f''(-0.5) = +\frac{1}{(-0.5)^3} = -8 \text{ max}$$

$$f''(0.5) = +\frac{1}{(0.5)^3} = +8 \text{ min}$$

**נקודות הקיצון:**

$$(0.5, 2) \cup \min$$

$$(-0.5, -2) \cap \max$$

**תשובה:**

(ב) העבירו ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  והעבירו ישר משיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה  $x = -1$  מצא את השיעורים של נקודת המפגש בין שני המשיקים

**פונקציה**

$$y = ?$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = 2(-1) + \frac{1}{2(-1)} = 2\frac{1}{2}$$

$$(-1, -2.5)$$

**משוואת המשיק**

$$x = -1 \quad \underline{ב}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(-1, -2.5) \quad m = 1.5$$

$$y + 2.5 = 1.5(x + 1)$$

$$y = 1.5x + 1.5 - 2.5$$

$$y = 1.5x - 1$$

**משוואת המשיק**

$$x = 0.5 \quad \underline{ב}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(0.5, 2) \quad m = 0$$

$$y + 2 = 0(x - 0.5)$$

$$y = 2$$

**נקודת המפגש**

**בין המשיקים**

$$2 = 1.5x - 1$$

$$3 = 1.5x$$

$$x = 2$$

$$(2, 2)$$

**תשובה:** (2, 2)

**נגזרת ראשונה**

$$m = ?$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1 \cdot 1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2 \cdot (1)^2}$$

$$m = 1.5$$

**תשובה סופית:**

$$(2, 2) \quad y = 1\frac{1}{2}x - 1 \quad y = 2 \quad \text{(ב)} \quad (-\frac{1}{2}, -2) \cap \max \quad (\frac{1}{2}, 2) \cup \min \quad \text{(א)}$$

**שאלה מספר 6.**

מבין כל המספרים החיוביים  $x$  ו-  $y$  המקיימים  $x^2 \cdot y = 4$ , מצא את שני המספרים שעבורם הסכום  $x + y$  הוא מינימלי.

**פתרון:**

**1. משפט המטרה:** שני המספרים שעבורם הסכום  $x + y$  הוא מינימלי.

**2. נוסחת המטרה:**  $p = x + y \Rightarrow \min$

**3. נוסחת עזר:**  $x^2 \cdot y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2}$

$p = x + y \Rightarrow \min$

$$p = x + \frac{4}{x^2}$$

**4. פונקציית המטרה**

**הפונקציה**

$$p = x + \frac{4}{x^2}$$

$$x = 2$$

$$p = (2) + \frac{4}{(2)^2}$$

$$p = 3$$

**נגזרת ראשונה**

$$p' = 1 - \frac{4 \cdot 2}{x^3}$$

$$p' = 0$$

$$0 = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$\frac{8}{x^3} = 1$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

**נגזרת שנייה**

**Max/min**

$$P''(x) = + \frac{8 \cdot 3}{x^4}$$

$$P''(2) = + \frac{24}{(2)^4} = +1.5 \cup \min$$

**ריכוז התשובות**

$$x = 2 \quad \min$$

$$y = 1$$

$$p = 3$$

המספר הראשון:  $x = 2$  : המספר השני :

$$y = \frac{4}{x^2}$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{4}{(2)^2}$$

$$y = 1$$

**תשובה סופית:**

$$x = 2 \quad y = 1$$