

**מבחן בגרות 35803 מועד ב קיץ תשע"ג 2013**

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

**שאלה מספר 1**

פועל מקבל שכר בסיסי קבוע ועוד תוספות קבועות. בסך הכול שכרו 6600 שקל. בחודש מסוים העלה בעל המפעל את השכר החודשי הבסיסי של הפועל ב-15%, והוריד את התוספות הקבועות ב-10%. לאחר השינויים היה בסך הכול שכרו של הפועל 7440 שקלים. מצא מה היה השכר הבסיסי של הפועל לפני השינויים.

**פתרון**

**הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016**  
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

**נתונים**

**עלה ב-15%**  
 $1 + \frac{15}{100} = 1.15$

**ירד ב-10%**  
 $1 - \frac{10}{100} = 0.9$

הגדרת המשתנים:  $x$  - שכר בסיסי,  $y$  תוספת קבועה

משוואה	שכר של פועל			שכר בסיסי	
	סה"כ	תוספת קבועות	פעולה		
$x + y = 6600$	6600	$y$	+	$x$	<b>שכר בסיסי</b>
$1.15x + 0.9y = 7440$	7440	$0.9y$	+	$1.15x$	<b>לאחר השינויים</b>

$x + y = 6600$

$y = 6600 - x$

$1.15x + 0.9y = 7440$

$1.15x + 0.9(6600 - x) = 7440$

$1.15x + 5940 - 0.9x = 7440$

$5940 + 0.25x = 7440$

$0.25x = 1500$

$x = 6,000$

$y = 6600 - x$

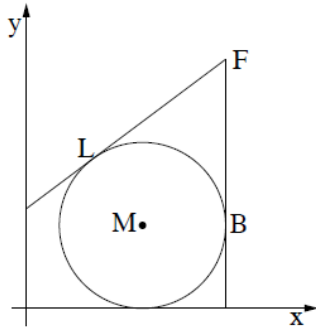
$x = 6600 - 6000$

$y = 600$

**תשובה:** השכר הבסיסי לפני השינויים הוא 6,000 ₪

**תשובה סופית:**

השכר הבסיסי לפני השינויים הוא 6,000 ₪



**שאלה מספר 2:**

נתון מעגל שמשוואתו היא :  $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$  ומרכזו M.  
העבירו ישר המשיק למעגל בנקודה L שבה  $x = 4$  כמתואר בציור.  
(א) מצא את השיפוע ML.

(שיעור ה- y של L גדול מ-1)

(2) מצא את המשוואה של המשיק בנקודה L.

הישר  $x = 12$  משיק למעגל בנקודה B.

שני המשיקים נפגשים בנקודה F כמתואר בציור.

(ב) (1) מצא את השיעורים של הנקודה F.

(2) מצא את שטח המשולש FMB.

**פתרון:**

**(1א) מצא את השיפוע ML.**  
(שיעור ה- y של L גדול מ-1)

**נקודה L**

$$(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$x = 4$$

$$(4-7)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$9 + (y-5)^2 = 25$$

$$(y-5)^2 = 25 - 9$$

$$y-5 = \pm\sqrt{16}$$

$$y = \pm 4 + 5$$

$$y = -4 + 5 \quad y = +4 + 5$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 9$$

$$L(4,9)$$

**תשובה:**  $m_{ML} = -\frac{4}{3}$

**(2א) מצא את המשוואה של המשיק בנקודה L.**

**שיפוע המשיק**

$$m_{ML} = -\frac{4}{3} \quad m_{LF} = \frac{3}{4}$$

הופכי נגדי

**משוואת המשיק**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(4,9) \quad m = \frac{3}{4}$$

$$y - 9 = \frac{3}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3 + 9$$

$$y = \frac{3}{4}x + 6$$

**תשובה:**  $y = \frac{3}{4}x + 6$

**(1ב) מצא את השיעורים של הנקודה F.**

**נקודה F**

$$y = \frac{3}{4}x + 6$$

$$x = 12$$

$$y = \frac{3}{4}(12) + 6$$

$$y = 15$$

$$F(12,15)$$

**תשובה:**  $F(12,15)$

**שטח המשולש FMB**

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2}$$

$$S_{FMB} = 25$$

**(2ב) מצא את שטח המשולש FMB.**

צלע FB = 10

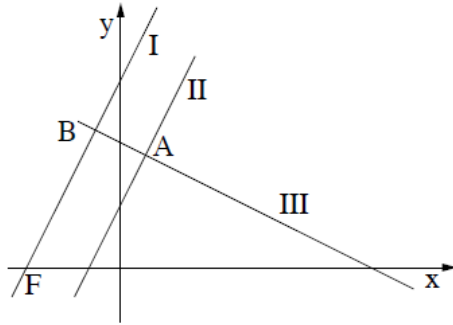
צלע MB = 5

**תשובה:**  $S_{FMB} = 25$

**תשובה סופית:**

(1א)  $m_{ML} = -\frac{4}{3}$  (2א)  $y = \frac{3}{4}x + 6$  (1ב)  $F(12,15)$  (2ב)  $S_{FMB} = 25$

**שאלה מספר 3:**



המשוואות של הישרים I ו- II שבציור הן:

$$y = 2x + 30 \quad y = 2x + 10$$

(א) איזו משוואה היא של הישר I.

ואיזו משוואה היא של ישר II? נמק

(ב) ישר III מאונך לישר II וחותר אותו

בנקודה A שבה  $x = 4$ .

מצא את משוואת הישר III.

(1ג) הראה כי הישר III מאונך לישר I.

(2ג) הישר III חותך את הישר I בנקודה B.

הישר I חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה F. (ראה ציור).

מצא את השטח של המשולש FBA

**פתרון:**

(א) איזו משוואה היא של הישר I. ואיזו משוואה היא של ישר II? נמק

**תשובה:** ישר I מתאים למשוואה  $y = 2x + 30$  חותך את ציר ה-  $y$  גבוה יותר מהישר השני.

ישר II מתאים למשוואה  $y = 2x + 10$  חותך את ציר ה-  $y$  נמוך יותר מהישר השני.

**תשובה:** ישר I מתאים למשוואה  $y = 2x + 30$ , ישר II מתאים למשוואה  $y = 2x + 10$

(ב) ישר III מאונך לישר II וחותר אותו בנקודה A שבה  $x = 4$ .

מצא את משוואת הישר III.

**נקודה A**

$$y = 2x + 10$$

$$x = 4$$

$$y = 2(4) + 10$$

$$y = 18$$

$$A(4,18)$$

**שיפוע הישר III**

$$m_{II} = 2 \quad m_{III} = -\frac{1}{2}$$

הופכי נגדי

**משוואת הישר III**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(4,18) \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y - 18 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 + 18$$

$$y_{III} = -\frac{1}{2}x + 20$$

**תשובה:**  $y_{III} = -\frac{1}{2}x + 20$

(1ג) הראה כי הישר III מאונך לישר I.

הישר III מאונך לישר I

$$m_I = 2 \quad m_{III} = -\frac{1}{2}$$

הופכי נגדי

(2ג) הישר III חותך את הישר I בנקודה B. הישר I חותך את ציר ה-x בנקודה F. (ראה ציור).  
מצא את השטח של המשולש FBA

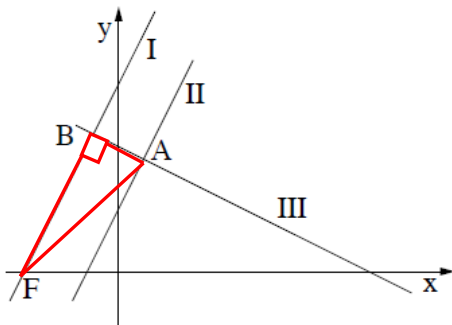
**נקודה F**  
 $y = 2x + 30$   
 $y = 0$   
 $0 = 2x + 30$   
 $-2x = 30$   
 $x = -15$   
 $F(-15,0)$

**אורך הקטע AF**  
 $B(-4,22)$      $F(-15,0)$   
 $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$   
 $d^2 = (-15 + 4)^2 + (0 - 22)^2$   
 $d_{BF} = \sqrt{605}$      $d_{BF} = 24.59$

**נקודה B**  
 $y_I = y_{III}$   
 $2x + 30 = -\frac{1}{2}x + 20$   
 $2x + \frac{1}{2}x = 20 - 30$   
 $2\frac{1}{2}x = -10$   
 $x = -4$

$y = 2x + 30$   
 $x = -4$   
 $y = 2(-4) + 30$   
 $y = 22$   
 $B(-4,22)$

**אורך הקטע AB**  
 $A(4,18)$      $B(-4,22)$   
 $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$   
 $d^2 = (-4 - 4)^2 + (22 - 18)^2$   
 $d_{AB} = \sqrt{80}$      $d_{AB} = 8.94$



**שטח המשולש FBA**  
 $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{\sqrt{605} \cdot \sqrt{80}}{2}$   
 $S_{FBA} = 110$

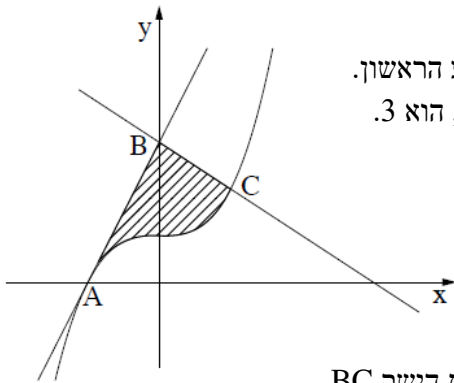
**תשובה:**  $S_{FBA} = 110$

**תשובה סופית:**

(א) ישר I מתאים למשוואה  $y = 2x + 30$ , ישר II מתאים למשוואה  $y = 2x + 10$

(ב)  $y_{III} = -\frac{1}{2}x + 20$  (1ג)  $m_{III} = -\frac{1}{2}$      $m_I = 2$      $S_{FBA} = 110$  (2ג)

**שאלה מספר 4:**



נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$ .

(א) נקודה C נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון. שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה C, הוא 3. מצא את השיעורים של הנקודה C.

גרף הפונקציה חותך את ציר ה-  $x$  בנקודה A. הישר  $y = 3x + 3$  עובר דרך הנקודה A. וחותך את ציר ה-  $y$  בנקודה B, כמתואר בציור.

(ב) מצא את השיעורים של הנקודה B, ומצא את משוואת הישר BC.

(ג) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי הישר BA (BA משיק ל-  $f(x)$ ), ועל ידי הישר BC (השטח המקווקו בציור).

**פתרון:**

(א) שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה C, הוא 3. מצא את השיעורים של הנקודה C.

**פונקציה**  
 $x; y$

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$f(1) = (1)^3 + 1 = 2$$

$$C(1, 2)$$

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 3$$

$$3 = 3x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = +1 \quad x_2 = -1$$

**תשובה:** C(1,2)

(ב) מצא את השיעורים של הנקודה B, ומצא את משוואת הישר BC.

**נקודה A**

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$y = 0$$

$$0 = x^3 + 1$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

$$A(-1, 0)$$

**נגזרת ראשונה**

$$f'(x) = 3x^2$$

$$x = -1$$

$$m = 3(-1)^2$$

$$m = 3$$

**משוואת המשיק ב- A**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(-1, 0) \quad m = 3$$

$$y + 0 = 3(x + 1)$$

$$y = 3x + 3$$

**נקודה B**

$$y = 3x + 3$$

$$x = 0$$

$$y = 3(0) + 3$$

$$y = 3$$

$$B(3, 0)$$

**שיפוע BC**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$C(1, 2) \quad B(3, 0)$$

$$m = \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$$

$$m_{BC} = -1$$

**משוואת הישר BC**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

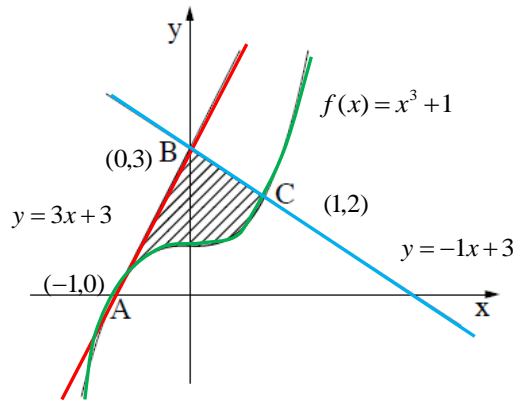
$$(3, 0) \quad m = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3)$$

$$y = -1x + 3$$

**תשובה:**  $y_{BC} = -1x + 3$  B(3,0)

(ג) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי הישר BA (BA משיק ל-  $f(x)$ ), ועל ידי הישר BC (השטח המקוקו בציר).



$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = 3x + 3$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = -1$	$y = x^3 + 1$	$x = 0$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (3x+3) - (x^3+1) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (3x+3-x^3-1) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (-x^3+3x+2) dx$$

$$S_1 = \left[ -\frac{1x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0$$

$$S_1 = \left[ \frac{(0)^4}{4} + \frac{3(0)^2}{2} + 2(0) \right] - \left[ \frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right]$$

$$S_1 = [0] - \left[ -\frac{3}{4} \right]$$

$$S_1 = \left[ \frac{3}{4} \right]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T \left[ \frac{3}{4} \right] + \left[ 1\frac{1}{4} \right] = 2$$

$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = -1x + 3$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 0$	$y = x^3 + 1$	$x = 1$

$$S_2 = \int_0^1 (-1x+3) - (x^3+1) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (-1x+3-x^3-1) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (-x^3-1x+2) dx$$

$$S_2 = \left[ -\frac{x^4}{4} - \frac{1x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$S_2 = \left[ -\frac{(1)^4}{4} - \frac{1(1)^2}{2} + 2(1) \right] - \left[ -\frac{(0)^4}{4} - \frac{1(0)^2}{2} + 2(0) \right]$$

$$S_2 = \left[ 1\frac{1}{4} \right] - [0]$$

$$S_2 = \left[ 1\frac{1}{4} \right]$$

$$S_T \left[ \frac{3}{4} \right] + \left[ 1\frac{1}{4} \right] = 2 \quad \text{תשובה:}$$

**תשובה סופית:**

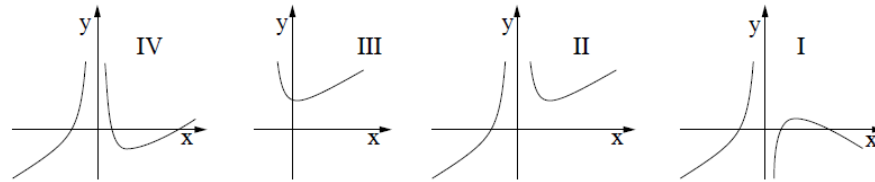
$$S_T \left[ \frac{3}{4} \right] + \left[ 1\frac{1}{4} \right] = 2 \quad (\lambda)$$

$$y_{BC} = -1x + 3 \quad B(0,3) \quad C(1,2) \quad (\lambda)$$

**שאלה מספר 5:**

נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- (ג) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- (ד) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ה) איזה מבין הגרפים שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק



**פתרון:**

(א) **מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

**תשובה:**  $x \neq 0$

(ב) **מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.**

**תשובה:**  $x = 0$

(ג) **מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.**

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$   
 $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

**פונקציה**  
 $x; y$

$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$   
 $f(2) = (2) + \frac{4}{(2)^2}$   
 $y = 3$   
 $(2,3)$

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot 2}{x^3}$   
 $f'(x) = m = 0$   
 $0 = 1 - \frac{8}{x^3}$   
 $\frac{8}{x^3} = 1$   
 $x^3 = 8$   
 $x = \sqrt[3]{8}$   
 $x = 2$

**נגזרת שנייה**  
 $\min; \max$

$f''(x) = +\frac{8 \cdot 4}{x^4} = +\frac{32}{x^4}$   
 $f''(2) = +\frac{32}{(2)^4} = +2 \min$

**נקודות הקיצון:**  
 $(2,3) \cup \min$

**תשובה:**

(ד) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

x	עלייה	x	ירידה	x	עלייה	x
$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x <$	$+\infty$

נגזרת ראשונה  
x ; m

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$x = -1$$

$$f'(-1) = 1 - \frac{8}{(-1)^3}$$

$$m = +9 \uparrow$$

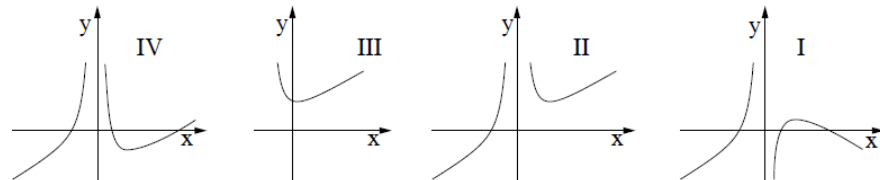
הפונקציה יורדת

**תשובה:**

הפונקציה יורדת:  $0 < x < 2$

הפונקציה עולה:  $-\infty < x < 0$  ,  $2 < x < +\infty$

(ה) איזה מבין הגרפים שלפניך מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק



**תשובה:** גרף מספר 2 מתאים לפונקציה בהתאם לנקודת הקיצון ולתחומי העלייה והירידה

**תשובה סופית:**

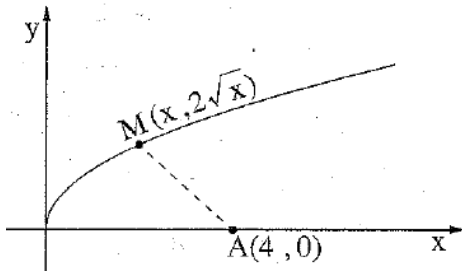
(א)  $x \neq 0$  (ב)  $x = 0$  (ג)  $\min(2, 3)$

(ד) הפונקציה יורדת:  $0 < x < 2$  הפונקציה עולה:  $-\infty < x < 0$  ,  $2 < x < +\infty$

(ה) גרף מספר 2



**שאלה מספר 6.**



נתונה הפונקציה  $f(x) = 2\sqrt{x}$  (ראה ציור)

(א) מצא את שעורי ה-  $x$  של נקודה  $M$

על גרף הפונקציה שמרחקה  $(d^2)$

בריבוע מהנקודה  $A(4,0)$  הוא מינימלי.

(ב) מצא את המרחק המינימלי  $(d)$

שבין הנקודה  $M$  לנקודה  $A$ .

**פתרון:**

1. **משפט המטרה:** המרחק המינימלי  $(d)$  שבין הנקודה  $M$  לנקודה  $A$ .

2. **נוסחת המטרה:**  $p = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

3. **נוסחת עזר:**  $M(x, 2\sqrt{x})$       $A(4, 0)$

4. **פונקציית המטרה**  $P = (x - 4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2$

$P = x^2 - 8x + 16 + 4x$

$p = x^2 - 4x + 16$

**הפונקציה**

$p = x^2 - 4x + 16$

$x = 2$

$p = (2)^2 - 4(2) + 16$

$p = 12$

**נגזרת ראשונה**

$p' = 2x - 4$

$p' = 0$

$0 = 2x - 4$

$2x = 4$

$x = 2$

**נגזרת שנייה**

**Max/min**

$p''(x) = +2 \cup \min$

**ריכוז התשובות**

$x = 2$      **min**

$y_M = 2.828$

$p = d^2 = 12$

$d = \sqrt{12}$

**נקודה M**

$x = 2$

$y = 2\sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{2} = 2.828$

$M(2, 2.828)$

**תשובה סופית:**

$d = \sqrt{12}$      **(ב)**

$x = 2$      **min (א)**