

מבחן בגרות 35803 מועד חצב ברק תשע"ג 2013

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

בתחילת השבוע קנתה מיכל 3 קילוגרמים עגבניות ו-1 קילוגרם מלפפונים, ושילמה 20.5 שקלים. בסוף השבוע התייקרו העגבניות ב-20% והמלפפונים הוזלו ב-10%. בסוף השבוע קנתה מיכל 5 קילוגרמים עגבניות ו-5 קילוגרמים מלפפונים ושילמה 51 שקלים. (א) מה היה מחיר של 1 קילוגרם עגבניות בתחילת השבוע. (ב) כמה קילוגרמים של עגבניות בלבד אפשר לקנות בסוף השבוע ב-66 שקלים? **פתרון:**

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

התייקר ב-20% הוזל של 10%

נתונים
 הגדרת המשתנים: x - מחיר ק"ג עגבניות, y - מחיר ק"ג מלפפון

$$1 + \frac{20}{100} = 1.2 \quad 1 - \frac{10}{100} = 0.9$$

(א) מה היה מחיר של 1 קילוגרם עגבניות בתחילת השבוע.

משוואה	סה"כ	מלפפונים		פעולה	עגבניות		
		מחיר	כמות		מחיר	כמות	
$3x + 1y = 20.5$	20.5	y	1	+	x	3	תחילת השבוע
$5 \cdot 1.2x + 5 \cdot 0.9y = 51$	51	0.9y	5	+	1.2x	5	סוף השבוע

השוואת מקדמים **מציאת x**

$$\begin{cases} 3x + 1y = 20.5 \\ 6x + 4.5y = 51 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 1y = 20.5 \\ y = 4 \end{cases}$$

מציאת y

$$\begin{cases} 3x + 1y = 20.5 \cdot -6 \\ 6x + 4.5y = 51 \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 1(4) = 20.5 \\ 3x = 16.5/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18x - 6y = -123 \\ 18x + 13.5y = 153 \end{cases} \quad x = 5.5$$

תשובה:
 מחיר ק"ג עגבניות: 5.5 שקל
 מחיר ק"ג מלפפונים: 4 שקל

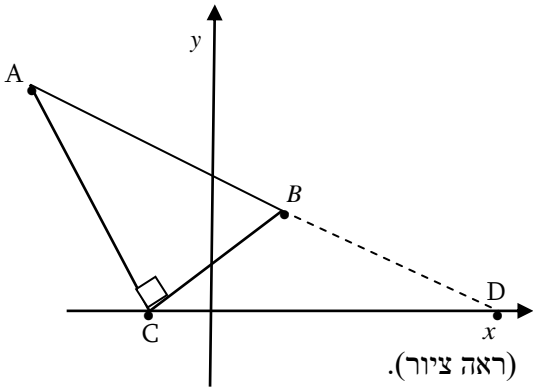
(ב) כמה קילוגרמים של עגבניות בלבד אפשר לקנות בסוף השבוע ב-66 שקלים?

המחיר לק"ג אחד לאחר ההתייקרות בסוף השבוע: 6.6 שקל $1.2x = 1.2 \cdot 5.5 = 6.6$
 וב-66 שקל אפשר לקנות $66 : 6.6 = 10$ ק"ג עגבניות

תשובה סופית:

(א) מחיר ק"ג עגבניות: 5.5 שקל **(ב)** 10 ק"ג עגבניות

שאלה מספר 2:



נתון משולש ישר זווית ABC ($C = 90^\circ$)
 נקודה C נמצאת על ציר ה- x (ראה ציור).

הצלע AC מונחת על הישר $y = -2x - 4$

(א) מצא את שיעורי הנקודה C .

(2) מצא את משוואת הישר BC .

(3) שיעור ה- x של הנקודה B הוא $x = 4$

מצא את שיעור ה- y של הנקודה B .

המשך של הצלע AB חותך את ציר ה- x בנקודה $D(13,0)$ (ראה ציור).

(ב) (1) מצא את משוואת הישר BD .

(2) קבע אם נקודה B היא אמצע קטע AD . נמק

פתרון:

(א) (1) מצא את שיעורי הנקודה C .

נקודה C

$$y = -2x - 4$$

$$y = 0$$

$$0 = -2x - 4$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$C(-2,0)$$

תשובה: $C(-2,0)$

(2) מצא את משוואת הישר BC .

משוואת הישר BC

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(-2,0) \quad m = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

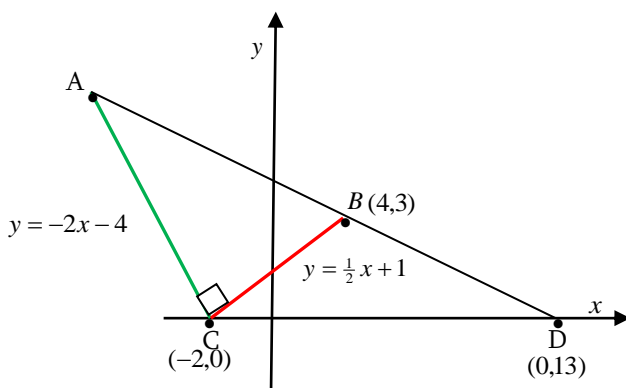
$$y_{BC} = \frac{1}{2}x + 1$$

תשובה: $y_{BC} = \frac{1}{2}x + 1$

שיפוע הישר BC

$$m_{AC} = -2 \quad m_{BC} = \frac{1}{2}$$

הופכי נגדי



(3) שיעור ה- x של הנקודה B הוא $x = 4$

מצא את שיעור ה- y של הנקודה B .

נקודה B

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{1}{2}(4) + 1$$

$$y = 3$$

$$B(4,3)$$

תשובה: $B(4,3)$

המשך של הצלע AB חותך את ציר ה-x בנקודה D(13,0) (ראה ציור).
 (ב) מצא את משוואת הישר BD.

שיפוע BD

$$B(4,3) \quad D(13,0)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(0) - (3)}{(13) - (4)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{BD} = -\frac{1}{3}$$

משוואת הישר BD

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(13,0) \quad m = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 13)$$

$$y_{BD} = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$$

תשובה: $y_{BD} = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$

(2) קבע אם נקודה B היא אמצע קטע AD. נמק

נקודה A

$$y_{AC} = y_{BD}$$

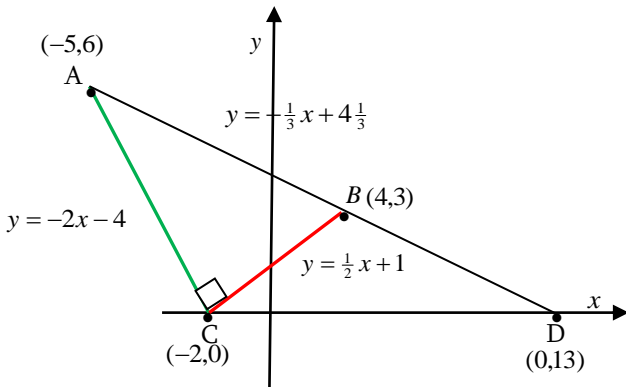
$$-2x - 4 = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3} \quad y = -2x - 4$$

$$-2x + \frac{1}{3}x = 4\frac{1}{3} + 4 \quad x = -5$$

$$-1\frac{2}{3}x = 8\frac{1}{3} \quad y = -2(-5) - 4$$

$$x = -5 \quad y = 6$$

$$A(-5,6)$$



$$\begin{matrix} A & B & D \\ (-5,6) & (4,3) & (13,0) \end{matrix}$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$4 = \frac{(-5) + (13)}{2} \quad 3 = \frac{(6) + (0)}{2}$$

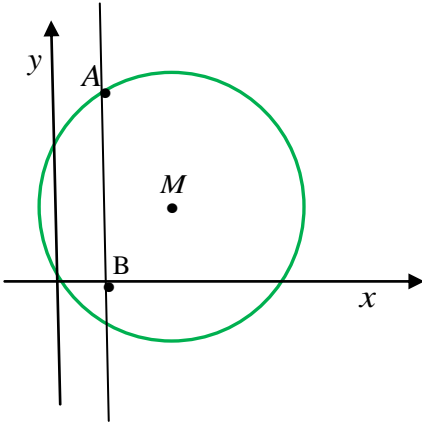
$$4 = 4 \quad 3 = 3$$

תשובה: כן, הנקודה D היא אמצע קטע AD.

תשובה סופית:

- (1א) $C(-2,0)$ (2א) $y_{BC} = \frac{1}{2}x + 1$ (3א) $B(4,3)$
 (1ב) $y_{BD} = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$ (2ב) כן, הנקודה D היא אמצע קטע AD.

שאלה מספר 3:



- הנקודה M היא מרכז המעגל: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$.
 הישר $x = 2$ חותך את המעגל ברביע הראשון בנקודה A.
 ואת ציר ה- x בנקודה B. (ראה ציור).
 (א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
 (ב) מצא את שיפוע הישר AM.
 (ג) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.
 (ד) המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף ג חותך את ציר ה- x בנקודה C (שאינה בציור). מצא את שיעורי הנקודה C.
 (ה) חשב את שטח המשולש ABC.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

נקודה A

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$$

$$x = 2$$

$$(2-4)^2 + (y-2)^2 = 20$$

$$4 + (y-2)^2 = 20$$

$$(y-2)^2 = 20 - 4$$

$$y-2 = \pm\sqrt{16}$$

$$y = \pm 4 + 2$$

$$y = -4 + 2 \quad y = +4 + 2$$

$$y_1 = -2 \quad y_2 = 6$$

$$A(2,6)$$

תשובה: $A(2,6) \quad B(2,0)$

(ב) מצא את שיפוע הישר AM.

שיפוע AM

$$A(2,6) \quad M(4,2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(2) - (6)}{(4) - (2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$m_{AM} = -2$$

תשובה: $m_{AM} = -2$

(ג) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

משוואת המשיק

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(2,6) \quad m = \frac{1}{2}$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + 6$$

$$y_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}x + 5$$

תשובה: $y_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}x + 5$

שיפוע המשיק

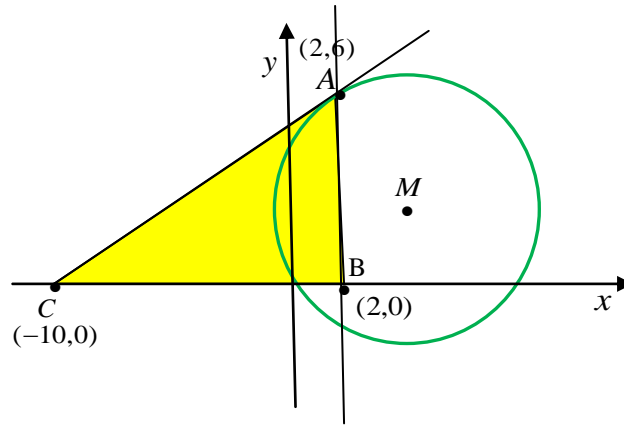
$$m_{AM} = -2 \quad m_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}$$

הופכי נגדי

(ד) המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף ג חותך את ציר ה- x בנקודה C (שאינה בציור). מצא את שיעורי הנקודה C .

נקודה C
 $y = \frac{1}{2}x + 5$
 $y = 0$
 $0 = \frac{1}{2}x + 5$
 $-5 = \frac{1}{2}x$
 $x = -10$
 $C(-10,0)$

תשובה: $C(-10,0)$



(ה) חשב את שטח המשולש ABC .

שטח המשולש ABC

צלע AB 6

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2}$$

צלע BC 12

$$S_{ABC} = 36$$

תשובה: $S_{ABC} = 36$

תשובה סופית:

(א) $A(2,6)$ (ב) $m_{AM} = -2$ (ג) $y_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}x + 5$ (ד) $C(-10,0)$ (ה) $S_{ABC} = 36$

שאלה מספר 4:

נתונה הפונקציה $f(x) = 3x - \frac{12}{x}$

- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצא את שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- (ג) מצא את המשוואות של שני המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת בסעיף ב.
- (ד) קבע את המשיקים מקבילים זה לזה. נמק.
- (ה) האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון? נמק.

פתרון:

(א) **מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

תשובה: $x \neq 0$

(ב) **מצא את שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .**

פונקציה $x; y$	$0 = 3x - \frac{12}{x} / x$
$f(x) = 3x - \frac{12}{x}$	$0 = 3x^2 - 12$
$y = 0$	$12 = 3x^2 / 3$
	$x^2 = 4$
	$x = \pm 2$
	תשובה: $(-2,0) (2,0)$
	$(-2,0) (2,0)$

(ג) **מצא את המשוואות של שני המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שמצאת בסעיף ב.**

פונקציה $x; y$	נגזרת ראשונה $x; m$	משוואת המשיק א'	משוואת המשיק ב'
$f(x) = 3x - \frac{12}{x}$	$f'(x) = 3 + \frac{12 \cdot 1}{(x)^2}$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
	$f'(x) = 3 + \frac{12}{x^2}$	$(2,0) \quad m = 6$	$(-2,0) \quad m = 6$
$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$ $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$	$m(x=2) = 3 + \frac{12}{(2)^2} = 6$	$y - 0 = 6(x - 2)$	$y - 0 = 6(x + 2)$
	$m = 6$	$y_{\text{משיק}} = 6x - 12$	$y_{\text{משיק}} = 6x + 12$
	$m(x=-2) = 3 + \frac{12}{(-2)^2} = 6$		
	$m = 6$		
		תשובה: $y_{\text{משיק}} = 6x - 12 \quad y_{\text{משיק}} = 6x + 12$	

(ד) **קבע את המשיקים מקבילים זה לזה. נמק.**

תשובה: המשיקים מקבילים זה לזה שים לב לשני המשיקים שיפוע זהה $m = 6$

(ה) **האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון? נמק**

פונקציה $x; y$	נגזרת ראשונה $x; m$	
$f(x) = 3x - \frac{12}{x}$	$f'(x) = 3 + \frac{12 \cdot 1}{(x)^2}$	
	$f'(x) = m = 0$	$-3x^2 = 12$
$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$ $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$	$0 = 3 + \frac{12}{x^2}$	$x^2 = -4$
	$-3 = \frac{12}{x^2}$	$x \neq \sqrt{-4}$
		תשובה: לא קיימות נקודות קיצון

תשובה סופית:

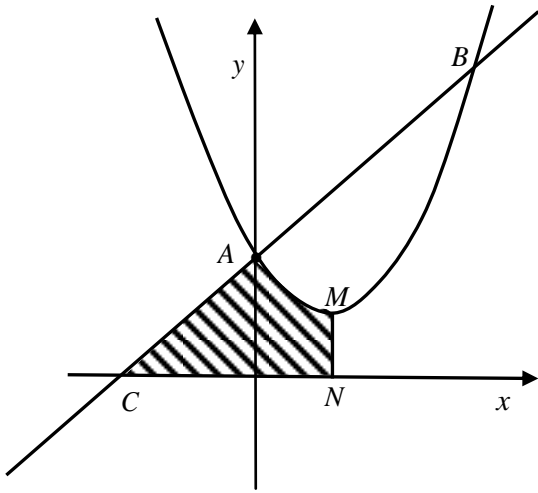
(א) $x \neq 0$ (ב) $(-2,0) (2,0)$ (ג) $y_{\text{משיק}} = 6x - 12 \quad y_{\text{משיק}} = 6x + 12$

(ד) המשיקים מקבילים זה לזה. לשני המשיקים שיפוע זהה $m = 6$

(ה) לא קיימות נקודות קיצון

שאלה מספר 5:

בציור שלפניך נתונים הגרפים של הפרבולה $y = x^2 - 2x + 2$ והישר $y = x + 2$.



הפרבולה והישר נחתכים בנקודות A ו-B.
 C היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x.
 M היא נקודת המינימום של הפרבולה.
 א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, ו-M.
 ב. מנקודה M הורידו אנך NM לציר ה-x.
 חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפרבולה, הישר הנתון, ציר ה-x והאנך NM (השטח המקוקו בציור).

פתרון:

(א.) מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, ו-M.

נקודות A ו-B:

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$y = x + 2$$

$$y = y$$

$$x^2 - 2x + 2 = x + 2$$

$$x^2 - 2x + 2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

נקודה A

$$y = x + 2$$

$$x = 0$$

$$y = 0 + 2 = 2$$

$$A(0, 2)$$

נקודה B

$$y = x + 2$$

$$x = 3$$

$$y = 3 + 2 = 5$$

$$B(3, 5)$$

נקודה C

$$y = x + 2$$

$$y = 0$$

$$0 = x + 2$$

$$x = -2$$

$$C(-2, 0)$$

נקודה M

$$m = 0$$

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$y'(x) = 2x - 2$$

$$m = 0$$

$$0 = 2x - 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

נקודה M

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$x = 1$$

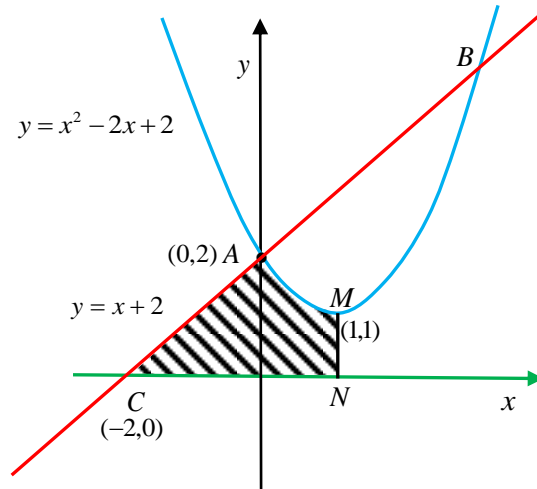
$$y = (1)^2 - 2(1) + 2$$

$$y = 1$$

$$M(1, 1)$$

תשובה: A(0,2) B(3,5) C(-2,0) M(1,1)

ב. מנקודה M הורידו אנך NM לציר ה-x. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפרבולה, הישר הנתון, ציר ה-x והאנך NM (השטח המקוקו בציור).



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = x + 2$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = -2$	$y = 0$	$x = 0$

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x + 2) - (0) dx$$

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x + 2 - 0) dx$$

$$S_1 = \int_{-2}^0 (x + 2) dx$$

$$S_1 = \left[\frac{1x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^0$$

$$S_1 = \left[\frac{(0)^2}{2} + 2(0) \right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right]$$

$$S_1 = [0] - [-2]$$

$$S_1 = [2]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = [2] + \left[1\frac{1}{3} \right] = 3\frac{1}{3}$$

x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = x^2 - 2x + 2$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 0$	$y = 0$	$x = 1$

$$S_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) - (0) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2 - 0) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$S_2 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$S_2 = \left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{2(1)^2}{2} + 2(1) \right] - \left[\frac{(0)^3}{3} - \frac{2(0)^2}{2} + 2(0) \right]$$

$$S_2 = \left[1\frac{1}{3} \right] - [0]$$

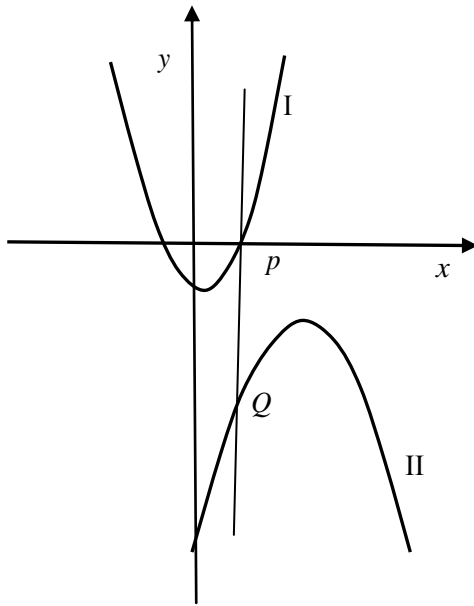
$$S_2 = \left[1\frac{1}{3} \right]$$

$$S_T = [2] + \left[1\frac{1}{3} \right] = 3\frac{1}{3} \quad \text{תשובה:}$$

תשובה סופית:

$$S_T = [2] + \left[1\frac{1}{3} \right] = 3\frac{1}{3} \quad \text{(ב)} \quad A(0,2) \quad B(3,5) \quad C(-2,0) \quad M(1,1) \quad \text{(א)}$$

שאלה מספר 6.



בציור שלפניך נתונים הגרפים I ו-II של שתי הפרבולות:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 5x - 15$$

$$g(x) = x^2 - x - 2$$

(א) מבין הגרפים I ו-II

איזה גרף הוא של הפרבולה $f(x)$

ואיזה גרף הוא של הפרבולה $g(x)$ נמק.

(ב) ישר המקביל לציר ה-y חותך את הגרפים

של שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור)

מצא את שיעור ה-x של הנקודות P ו-Q

שעבורו אורך הקטע PQ הוא מינימלי.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** אורך הקטע PQ הוא מינימלי.

2. **נוסחת המטרה:** $p = y_p - y_q \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:** $y_p = x^2 - x - 2$ $y_q = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 15$

4. **פונקציית המטרה** $p = y_p - y_q \Rightarrow \min$

$$p = [x^2 - x - 2] - [-0.5x^2 + 5x - 15]$$

$$p = x^2 - x - 2 + 0.5x^2 - 5x + 15$$

$$p = 1.5x^2 - 6x + 13$$

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

הפונקציה

$$p = 1.5x^2 - 6x + 13$$

$$x = 2$$

$$p = 1.5(2)^2 - 6(2) + 13$$

$$p = 7$$

נגזרת ראשונה

$$p' = 3x - 6$$

$$p' = 0$$

$$0 = 3x - 6$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$p''(x) = +3 \cup \min$$

ריכוז התשובות

$$x = 2 \quad \min$$

$$y_p = 0$$

$$y_q = -7$$

$$p = 7$$

$$x = 2$$

$$y_p = x^2 - x + 2$$

$$y_p = (2)^2 - (2) - 2 = 0$$

$$y_q = -0.5x^2 + 5x - 15$$

$$y_q = -0.5(2)^2 + 5(2) - 15 = -7$$

תשובה סופית:

(א) גרף II $f(x)$ גרף I $g(x)$ (ב) \min $x = 2$