מבחן בגרות 35803 מועד ב קיץ תשע"ד 2014.

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות)
שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות , ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

מסעדה מציעה שני תפריטים של ארוחות עסקיות קבוצתיות.
תפריט צמחוני במחיר של 34 שקלים לסועד.
תפריט בשרי במחיר של 68 שקלים לסועד.
למסעדה הגיעו שתי קבוצות: קבוצה א' וקבוצה ב'.
קבוצה א' בחרה בתפריט צמחוני , וקבוצה ב' בחרה בתפריט בשרי.
מספר הסועדים בקבוצה ב' היה קטן ב- 10 ממספר הסועדים בקבוצה א'.
המחיר הכולל ששילמה קבוצה ב' היה 75% מן המחיר ששילמה קבוצה א'.

א. מצא כמה סועדים היו בכל קבוצה.
ב. מצא את המחיר הכולל שהייתה קבוצה ב' משלמת, אילו מספר הסועדים בה היה כמספר הסועדים בקבוצה א'.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ , שקלים, ק"ג , % , וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר צעצוע מסוג ב' ,

5% - הוא

$\frac{75}{100} = 0.55$

א. מצא כמה סועדים היו בכל קבוצה.

צמחוני/קבוצה א		פעולה	בשרי/קבוצה ב'			משוואה
מחיר	כמות	פעולה	מחיר	כמות	סה"כ	
34	x	$= 0.75 \cdot$	68	$x-10$		
						$(x-10)\cdot 68 = 0.75\cdot x\cdot 34$

$$(x-10)\cdot 68 = 0.75\cdot x\cdot 34$$
$$68x - 680 = 25.5x$$
$$68x - 25.5x = 680$$
$$42.5x = 680$$
$$x = 16$$

תשובה: מספר הסועדים בקבוצה א' הוא 16 .
מספר הסועדים בקבוצה ב' הוא 6 .

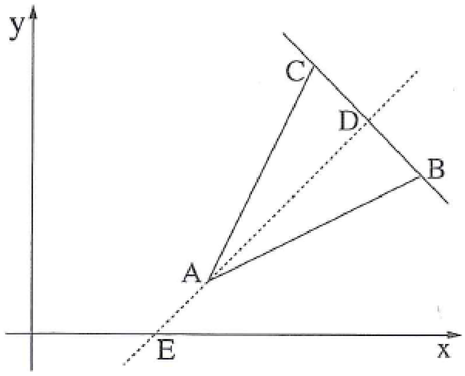
ב. מצא את המחיר הכולל שהייתה קבוצה ב' משלמת, אילו מספר הסועדים בה היה כמספר הסועדים בקבוצה א'.

16 סועדים במחיר של 68 שקל ישלמו 1088 שקל $16\cdot 68 = 1088$

תשובה: 1088 שקל

תשובה סופית :
(א) מספר הסועדים בקבוצה א' הוא 16 . מספר הסועדים בקבוצה ב' הוא 6 .
(ב) 1088 שקל

שאלה מספר 2



הנקודות $A\ (4,1)$ ו- $B\ (8,3)$ הם שני קדקודים
במשולש שווה שוקיים ABC (AB=AC).
הצלע BC מונחת על הישר $y=-x+11$
מנקודה A הורידו גובה לצלע BC.
הגובה חותך את BC בנקודה D,
ואת ציר ה- x בנקודה E (ראה ציור).
א. (1) מצא את שיפוע הישר AD.
(2) מצא את משוואת הישר AD.
ב. מצא את שיעורי הנקודות E ,D ו- C.
ג. הסבר מדוע המשולש CEB הוא משולש שווה שוקיים.

פתרון:

(א1). מצא את שיפוע הישר AD.

$m_{BC}=-1 \quad m_{AD}=1$

שיפוע הופכי נגדי גובה

שיפוע BC

$y=-1x+11$

$m_{Bc}=-1$

תשובה: $m_{AD}=1$

(א2) מצא את משוואת הישר AD.

$y-y_1=m(x-x_1)$

$A(4,1) \qquad m=1$

$y-1=1(x-4)$

$y=1x-4+1$

$y=1x-3$

תשובה: $y=1x-3$

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ,D ו- C.

$(8,3) \quad (7,4) \quad (x_2,y_2)$

$x_1,y_1 \quad x_M,y_M$

$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$

$7=\frac{(8)+x_2}{2}$

$14=8+x_2$

$x_2=6$

$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$

$4=\frac{(3)+y_2}{2}$

$8=3+y_2$

$y_2=5$

$C\ (6.5)$

נקודה E

$y=1x-3$

$y=0$

$0=x-3$

$x=3$

$E\ (3,0)$

נקודה D

$y_{BC}=y_{AD}$

$-1x+11=1x-3$

$14=2x$

$x=7$

$y=1x-3$

$x=7$

$y=1(7)-3$

$y=4$

$D\ (7,4)$

תשובה: $E\ (3.0)\ \ D\ (7.4)\ \ C\ (6.5)$

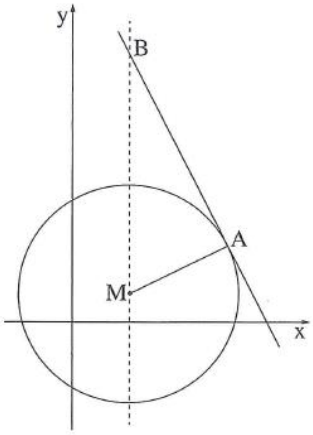
ג. הסבר מדוע המשולש CEB הוא משולש שווה שוקיים.

תשובה: DE הוא גובה וגם תיכון לכן המשולש CEB הוא משולש שווה שוקיים .
ניתן גם להסביר לפי אורכי השוקיים $EB=EC=\sqrt{34}$

תשובה סופית :

(א1) $m_{AD}=1$ (א2) $y=1x-3$ (ב) $E\ (3.0)\ \ D\ (7.4)\ \ C\ (6.5)$

(ג) DE הוא גובה וגם תיכון לכן המשולש CEB הוא משולש שווה שוקיים
ניתן גם להסביר לפי אורכי השוקיים $EB=EC=\sqrt{34}$



<u>שאלה מספר 3</u>

נתון מעגל שמרכזו M , ומשוואתו $(x-6)^2+(y-3)^2=125$.
בנקודה **A** שעל המעגל העבירו משיק ששיפועו -2.
שיעור ה- x של הנקודה A הוא 16 (ראה ציור)
א. (1) מצא את שיעור ה- y של נקדה A.
(2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.
ב. הישר $x = 6$ חותך את המשיק שמצאת בסעיף א' בנקודה B,
כמתואר בציור, מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את שטח המשולש AMB

<u>פתרון:</u>

(א1) מצא את שיעור ה- y של נקדה A.

נקודה A

$(x-6)^2+(y-3)^2=125$

$x=16$

$(16-6)^2+(y-3)^2=125$

$(y-3)^2=125-100$

$y-3=\pm\sqrt{25}$

$y=\pm5+3$

$y_1=8 \qquad y_2=-2$

$A\ (16,8)$

<u>תשובה</u>: (א1) $A\ (16,8)$

(א2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

<u>משוואת המשיק</u>

$y-y_1=m(x-x_1)$

$(16,8) \qquad m=-2$

$y-8=-2(x-16)$

$y=-2x+32+8$

$y=-2x+40$

<u>תשובה</u>: (א2) $y=-2x+40$

ב. הישר $x = 6$ חותך את המשיק שמצאת בסעיף א' בנקודה B,
כמתואר בציור, מצא את שיעורי הנקודה B.

<u>נקודה B</u>

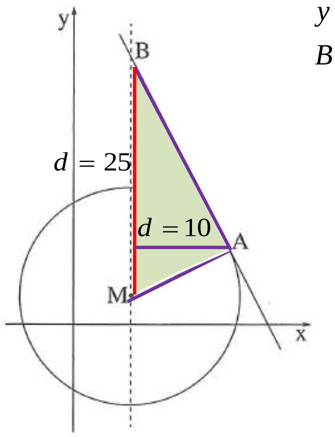
$y=-2x+40$

$x=6$

$y=-2(6)+40$

$y=28$

$B\ (6,28)$



<u>תשובה</u>: (ב) $B\ (6,28)$

ג. מצא את שטח המשולש AMB

<u>שטח משולש</u>

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{25\cdot10}{2}=125$$

<u>תשובה</u>: $S=125$

<u>תשובה סופית:</u>

(א1) $A\ (16,8)$ **(א2)** $y=-2x+40$ **(ב)** $B\ (6,28)$ **(ג)** $S=125$

שאלה מספר 4

נתונה הפונקציה $f(x)=2x-8\sqrt{x}$,

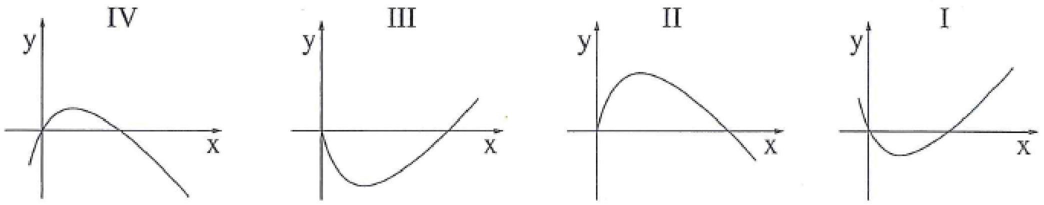
א, מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה, נמק.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, נמק את תשובתך.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה – y.

ה. קבע איזה מבין הגרפים $I-IV$ שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$.



פתרון:

א, מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?

תשובה: תחום ההגדרה הוא : $x \geq 0$

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה, נמק.

נגזרת ראשונה
$x\ ;\ m$

$f'(x)=2-\frac{8\cdot 1\cdot 1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=m=0$

$0=2-\frac{4}{\sqrt{x}}$

$\frac{4}{\sqrt{x}}=2$

$4=2\sqrt{x}\ /:2$

$2=\sqrt{x}\ \ /(\ )^2$

$x=4$

פונקציה
$x\ ;\ y$

$f(x)=2x-8\sqrt{x}$

$f(4)=2(4)-8\sqrt{4}$

$y=-8$

$(4,-8)$

נגזרת שנייה
min ; max

$f'(x)=2-\frac{4}{\sqrt{x}}\ /\sqrt{x}$

$\boxed{f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}}$

(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$f''(x)=\frac{2\cdot 1\cdot 1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$f''(4)=\frac{1}{\sqrt{4}}=+\frac{1}{2}\cup \min$

$f(x)=a\sqrt{bx}$

$f'(x)=\frac{a\cdot 1\cdot b}{2\cdot\sqrt{x}}$

נקודת הקיצון:
$(4,-8)\cup \min$

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, נמק את תשובתך.

x	עלייה	x	ירידה	x	תחום הגדרה	x
$+\infty$	$<x<$	4	$<x<$	0		$-\infty$

תשובה: **תחומי עלייה:** $4<x<+\infty$

תחומי ירידה: $0<x<4$

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה – y.

<u>חיתוך עם ציר ה – y.</u>

x=0

$f(x)=2x-8\sqrt{x}$

$x=0$

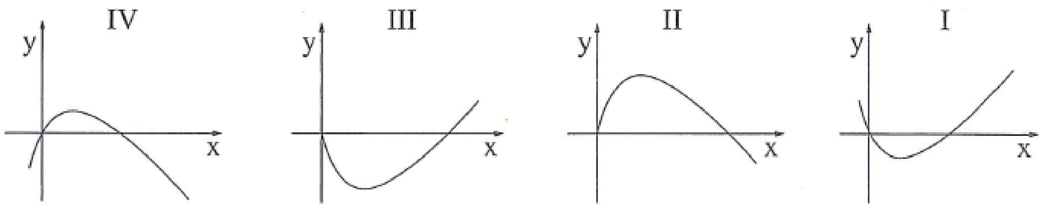
$f(x)=2(0)-8\sqrt{(0)}$

$y=0$

$(0,0)$

<u>תשובה:</u> $(0,0)$

ה. קבע איזה מבין הגרפים I – IV שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$.



<u>תשובה:</u> גרף III מתאים לנקודות הקיצון תחום ההגדרה ולחיתוך עם ציר ה - y

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $x\geq 0$ **(ב)** $\min \cup (4,-8)$

(ג) **<u>תחומי עלייה:</u>** $4<x<+\infty$ **<u>תחומי ירידה:</u>** $0<x<4$ **(ד)** $(0,0)$

(ה) גרף III מתאים לנקודות הקיצון תחום ההגדרה ולחיתוך עם ציר ה - y

שאלה מספר 5

בציור שלפניך מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה

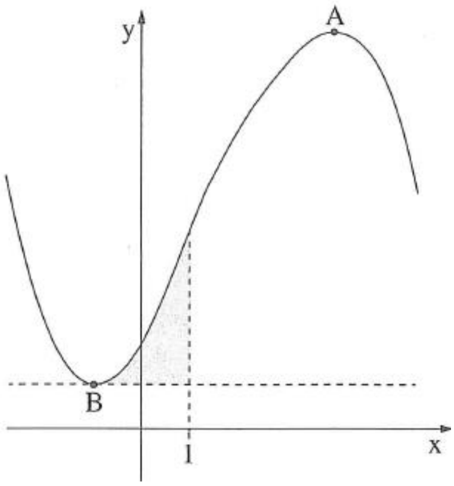
$f(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x+6\frac{2}{3}$.

A ו- B הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B .

ב. בנקודה B העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$
מצא את משוואת המשיק

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$
על ידי הישר $x=1$ ועל ידי המשיק
שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
(השטח האפור בציור)



א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B .

נגזרת שנייה min ; max

$f''(x)=-2x+4$

$f''(-1)=-2(-1)+4=+6\cup \text{min}$

$f''(5)=-2(5)+4=-6\cap \text{max}$

נגזרת ראשונה x ; m

$f'(x)=-\frac{3x^2}{3}+4x+5$

$f'(x)=-x^2+4x+5$

$f'(x)=m=0$

$0=-x^2+4x+5$

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot(-1)\cdot(5)}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1,2}=\frac{-4\pm 6}{-2}$

$x_1=-1$

$x_2=5$

פונקציה x ; y

$f(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x+6\frac{2}{2}$

$f(-1)=-\frac{(-1)^3}{3}+2(-1)^2+5(-1)+6\frac{2}{2}$

$(-1,4)$

$f(5)=-\frac{(5)^3}{3}+2(5)^2+5(5)+6\frac{2}{2}$

$(5,40)$

נקודות הקיצון:
$(-1,4)\cup \text{min}$
$(5,40)\cap \text{max}$

תשובה: $(-1,4)\cup \text{min}$ $(5,40)\cap \text{max}$

ב. בנקודה B העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מצא את משוואת המשיק

משוואת המשיק

$y-y_1=m(x-x_1)$

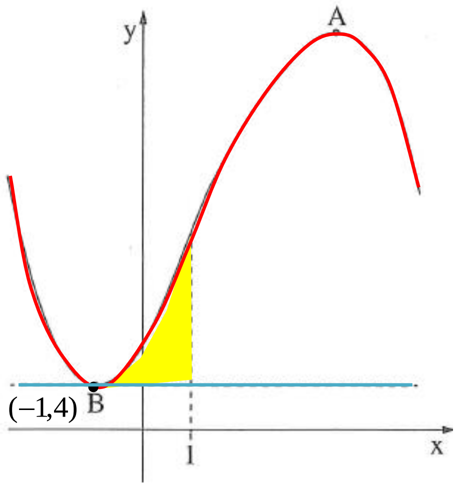
$(-1,4)$ $m=0$

$y-4=0(x+1)$

$y=4$

תשובה: $y=4$

(2ב). חשב את השטח המוגבל על ידי: גרף הפונקציה , המשיק , הישר $x=3$, וציר ה- x.
(השטח האפור שבציור)



x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y=-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x+6\frac{2}{3}$	x גדול/ימין
$x=-1$	פונקציה תחתונה $y=4$	$x=1$

$$S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x+6\frac{2}{3}\right)-(4)dx$$

$$S=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x+2\frac{2}{3}\right)dx$$

$$S=\left[-\frac{x^4}{12}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+2\frac{2}{3}x\right]_{-1}^{1}$$

$$S_1=\left[-\frac{(1)^4}{12}-\frac{2(1)^3}{3}+\frac{5(1)^2}{2}+2\frac{2}{3}(1)\right]-\left[-\frac{(-1)^4}{12}-\frac{2(-1)^3}{3}+\frac{5(-1)^2}{2}+2\frac{2}{3}(-1)\right]$$

$$S=\left[5\frac{3}{4}\right]-\left[-\frac{11}{12}\right]$$

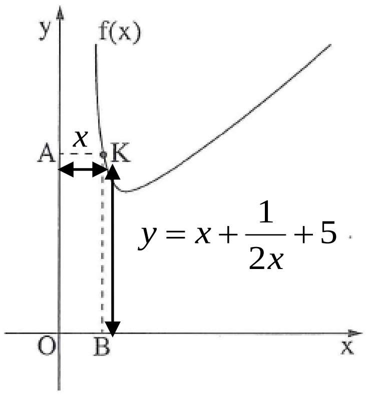
$$S=\left[6\frac{2}{3}\right]$$

תשובה: $S_T=6\frac{2}{3}$

תשובה סופית:

(א) $(-1,4)\cup\min$ $(5,40)\cap\max$ **(ב)** $y=4$ **(ג)** $S_T=6\frac{2}{3}$

<u>שאלה מספר 6 :</u>



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה

$f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$ בתחום $x > 0$

מנקודה K, הנמצאת על גרף הפונקציה,
מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן AKBO
(O– ראשית הצירים)

א. הבע את האורכים של צלעות המלבן AK ו – KB
באמצעות שיעור ה – x של הנקודה K.

ב. מה צריך להיות שיעור ה – x של הנקודה K
כדי שהיקף המלבן AKBO יהיה מינימלי ?

<u>פתרון:</u>

1. **<u>משפט המטרה:</u>** היקף המלבן הוא מינימלי

2. **<u>נוסחת המטרה:</u>** $p = 2a + 2b = 2x + 2y \Rightarrow \min$

3. **<u>נוסחת עזר:</u>** $y = x + \frac{1}{2x} + 5$

4. **<u>פונקציית המטרה</u>**

$p = 2a + 2b = 2x + 2y \Rightarrow \min$

$P = 2(x) + 2(x + \frac{1}{2x} + 5)$

$p = 2x + 2x + \frac{2}{2x} + 10$

$\boxed{p = 4x + \frac{1}{x} + 10}$

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$

$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

<u>נגזרת שנייה</u>

Max/min

$p''(x) = +\frac{1 \cdot 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$

$p''(+0.5) = \frac{2}{(0.5)^3} = +16 \cup \min$

$p''(-0.5) = \frac{2}{(-0.5)^3} = -16 \cap \max$

<u>נגזרת ראשונה</u>

$p' = 4 - \frac{1 \cdot 1}{x^2}$

$p' = 0$

$0 = 4 - \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2} = 4$

$1 = 4x^2$

$x^2 = 0.25$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{0.25}$

$x_1 = +0.5 \quad x_2 = -0.5$

<u>הפונקציה</u>

$p = 4x + \frac{1}{x} + 10$

$x = 0.5$

$p = 4(0.5) + \frac{1}{(0.5)} + 10$

$p = 14$

<u>נקודה K</u>

$x = 0.5$

$y = x + \frac{1}{2x} + 5 = (0.5) + \frac{1}{2(0.5)} + 5 = 6.5$

$P(0.5, 6.5)$

<u>סיכום התשובות</u>

$x = 0.5$ min

$y_P = 6.5$

$p = 14$

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $BK = y = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$ $AK = x$ **(ב)** $x = 0.5$ min