

מבחן בגרות 35803 מועד ג קיץ תשע"ד 2014

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

תלמיד קנה 10 מחברות דקות ו- 4 מחברות עבות, ושילם עבורן 72 שקלים בסך הכול. מחיר מחברת העבה היה גדול ב- 10% מהמחיר של המחברת הדקה. א. מה היה המחיר של מחברת דקה, ומה מחיר של מחברת עבה? ב. בסוף השנה הוזל המחיר של מחברת דקה ב- 8%, והמחיר של מחברת עבה לא השתנה. יוסי קנה בסוף השנה 11 מחברות דקות. רמי קנה בסוף השנה 8 מחברות עבות. אחד מהשניים שילם עבור המחברות שקנה סכום גבוה יותר מהסכום ששילם האחר. חשב בכמה אחוזים גדול הסכום הגבוה מהסכום הנמוך.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר מ' דקה, y - מחיר מ' עבה

גדול ב- 10%

$$1 + \frac{10}{100} = 1.1$$

א. מה היה המחיר של מחברת דקה, ומה מחיר של מחברת עבה?

משוואה	סה"כ	מחברת עבה		פעולה	מחברת דקה	
		מחיר	כמות		מחיר	כמות
$10x + 4y = 72$	72	y	4	+	x	10
$y = 1.1x$		y		$\cdot 1.1 =$	x	

$$\begin{cases} 10x + 4y = 72 \\ y = 1.1x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1.1 \cdot 5 = 5.5 \end{cases}$$

$$10x + 4(1.1x) = 72$$

$$10x + 4.4x = 72$$

$$14.4x = 72$$

$$x = 5$$

תשובה: מחיר מחברת דקה 5 ש, מחיר מחברת עבה 5.5 ש

ב. בסוף השנה הוזל המחיר של מחברת דקה ב- 8%, והמחיר של מחברת עבה לא השתנה. יוסי קנה בסוף השנה 11 מחברות דקות. רמי קנה בסוף השנה 8 מחברות עבות. אחד מהשניים שילם עבור המחברות שקנה סכום גבוה יותר מהסכום ששילם האחר. חשב בכמה אחוזים גדול הסכום הגבוה מהסכום הנמוך.

הוזל ב- 8%

$$1 - \frac{8}{100} = 0.92$$

$$5 \cdot 0.92 = 4.6$$

מחיר מחברת דקה

$$11 \cdot 4.6 = 50.6$$

יוסי קנה בסוף השנה 11 מחברות דקות ושילם:

$$8 \cdot 5.5 = 44$$

רמי קנה בסוף השנה 8 מחברות עבות ושילם: **ההפרש בין המחירים הוא: $50.6 - 44 = 6.6$**

אחוזים	כסף	
	6.6	ההפרש בין המחירים
100%	44	הסכום הנמוך

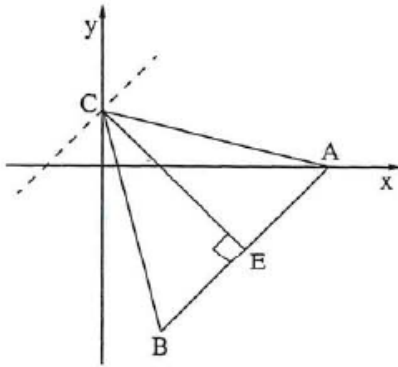
$$\frac{6.6}{44} \cdot 100 = 15\%$$

תשובה: ב - 15% גדול הסכום הגבוה מהסכום הנמוך.

תשובה סופית:

(א) מחיר מחברת דקה 5 ש, מחיר מחברת עבה 5.5 ש (ב) ב- 15%

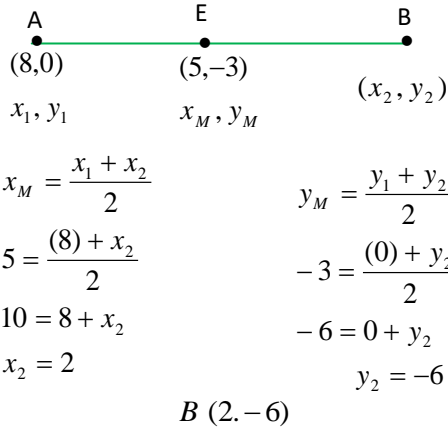
שאלה מספר 2



הקטע AB מונח על הישר $y = x - 8$.
 הנקודה E היא אמצע של הקטע AB.
 דרך הנקודה E העבירו אנך לקטע AB.
 משוואת האנך היא $y = -x + 2$.
 הנקודה A מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).
 א. מצא את השיעורים של הנקודות A, E ו-B.
 ב (1) מצא את השיעורים של הנקודה C.
 (2) הראה כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
 ג. דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל ל-AB (ראה ציור).
 מצא את נקודת החיתוך של הישר המקביל עם ציר ה-x.

פתרון:

א. מצא את השיעורים של הנקודות A, E ו-B.



תשובה: E (5,-3) A (8,0) B (2,-6)

(ב) מצא את השיעורים של הנקודה C.

תשובה: C (0,2)

(ג) הראה כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

תשובה: EC הוא גובה וגם תיכון במשולש. לכן המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

$$BC = AC = \sqrt{68}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{68}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{68}$$

ג. דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל ל- AB (ראה ציור).
מצא את נקודת החיתוך של הישר המקביל עם ציר ה-x.

$$m_{AB} = 1 \quad m_{\text{מקביל}} = 1$$

שיפוע זהים
ישר מקביל

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$C(0,2) \quad m = 1$$

$$y - 2 = 1(x - 0)$$

$$y = 1x + 2$$

חיתוך עם ציר x

$$y = 1x + 2$$

$$y = 0$$

$$0 = x + 2$$

$$x = -2$$

$$(-2,0)$$

תשובה: (-2,0)

תשובה סופית :

$$E (5, -3) \quad A (8,0) \quad B (2, -6) \quad (\text{א})$$

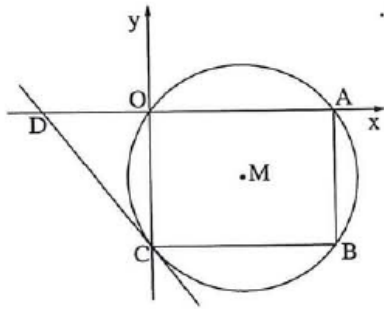
$$C (0,2) \quad (\text{ב})$$

(ב) EC הוא גובה וגם תיכון במשולש. לכן המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים .

$$BC = AC = \sqrt{68} \quad \text{ניתן גם להסביר לפי אורכי השוקיים}$$

$$(-2,0) \quad (\text{ג})$$

שאלה מספר 3



נתון מעגל שמשוואתו $(x-8)^2 + (y+6)^2 = 100$.
 במעגל חסום מלבן OABC.
 כך שהצלע OA מונחת על ציר ה-x.
 והצלע OC מונחת על ציר ה-y (ראה ציור).
 א. מצא את שטח המלבן OABC.

דרך הקדקוד C של המלבן העבירו משיק למעגל.
 המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה D (ראה ציור).

ב. מצא את משוואת המשיק.
 ג. מצא את שטח המשולש DOC.

פתרון:

א. מצא את שטח המלבן OABC.

נקודה A

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = 100$$

$$y = 0$$

$$(x-8)^2 + (0+6)^2 = 100$$

$$(x-8)^2 + 36 = 100$$

$$x-8 = \pm\sqrt{84}$$

$$y = \pm 8 + 8$$

$$x_1 = 16 \quad x_2 = 0$$

A (16,0)

נקודה C

$$(x-8)^2 + (y+6)^2 = 100$$

$$x = 0$$

$$(0-8)^2 + (y+6)^2 = 100$$

$$64 + (y+6)^2 = 100$$

$$y+6 = \pm\sqrt{36}$$

$$y = \pm 6 - 6$$

$$y_1 = -12 \quad y_2 = 0$$

C (0,-12)

שטח המלבן

$$S = a \cdot b = 16 \cdot 12 = 192$$

תשובה: S = 192

ב. מצא את משוואת המשיק.

שיפוע CM

C(0,-12) M(8,-6)

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m_{CM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-6) - (-12)}{(8) - (0)} = \frac{6}{8}$$

$$m_{CM} = \frac{3}{4}$$

משוואת המשיק

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(0,-12) $m = -\frac{4}{3}$

$$y + 12 = -\frac{4}{3}(x - 0)$$

$$y = -1\frac{1}{3}x - 12$$

תשובה: $y = -1\frac{1}{3}x - 12$

שיפוע הופכי נגדי

$$m_{MC} = \frac{3}{4} \quad m_{CD} = -\frac{4}{3}$$

נקודה D

$$y = -1\frac{1}{3}x - 12$$

$$y = 0$$

$$0 = -1\frac{1}{3}x - 12$$

$$12 = -1\frac{1}{3}x$$

$$x = -9$$

(-9,0)

ג. מצא את שטח המשולש DOC.

שטח משולש

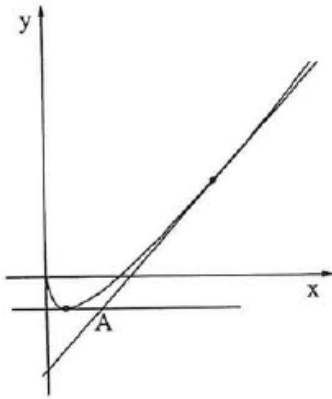
$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$$

תשובה: S = 54

תשובה סופית:

(א) S = 192 (ב) $y = -1\frac{1}{3}x - 12$ (ג) S = 54

שאלה מספר 4



בציוור מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = x - 2\sqrt{x}$,
 א, מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, והראה שהיא נקודת מינימום.
 ג. (1) העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 9$. מצא את משוואת המשיק
 (2) העבירו משיק נוסף לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה. משיק זה חותך את המשיק שבתת סעיף ג(1) בנקודה A. מצא את השיעורים של הנקודה A.

פתרון:

א, מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: תחום ההגדרה הוא: $x \geq 0$

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, והראה שהיא נקודת מינימום.

$f(x) = a\sqrt{bx}$
 $f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$

פונקציה
 $x; y$

$f(x) = x - 2\sqrt{x}$
 $f(4) = (4) - 2\sqrt{4}$
 $y = -1$
 $(4, -1)$

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$f'(x) = 1 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2\sqrt{x}}$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$
 $1 = \sqrt{x}$
 $1 = \sqrt{x} / ()^2$
 $x = 1$

נגזרת שנייה
 $\min; \max$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $f''(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$
(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)
 $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$
 $f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = +\frac{1}{2} \cup \min$

נקודת הקיצון:
 $(1, -1) \cup \min$

ג(1) העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 9$. מצא את משוואת המשיק

פונקציה
 $f(x) = x - 2\sqrt{x}$
 $f(9) = (9) - 2\sqrt{9} = 3$
 $(9, 3)$

נגזרת ראשונה
 $f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}}$
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $f'(x=9) = m = ?$
 $m = 1 - \frac{1}{\sqrt{9}}$
 $m = \frac{2}{3}$

משוואת המשיק
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $(9, 3) \quad m = \frac{2}{3}$
 $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 9)$
 $y = \frac{2}{3}x - 6 + 3$
 $y = \frac{2}{3}x - 3$

תשובה: $y = \frac{2}{3}x - 3$

(ג2) העבירו משיק נוסף לגרף הפונקציה בנקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה. משיק זה חותך את המשיק שבבת סעיף ג(1) בנקודה A. מצא את השיעורים של הנקודה A.

משוואת המשיק

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(1, -1) \quad m = 0$$

$$y + 1 = 0(x - 1)$$

$$y = -1$$

נקודה A

$$y_{AB} = y_{EC}$$

$$-1 = \frac{2}{3}x - 3$$

$$2 = \frac{2}{3}x$$

$$x = 3$$

$$y = x - 8$$

$$x = 5$$

$$y = -1$$

$$A(3, -1)$$

תשובה: A(3, -1)

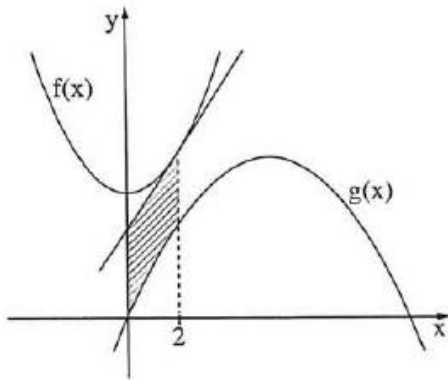
תשובה סופית:

$$(1, -1) \cup \min \quad \text{(א)} \quad x \geq 0 \quad \text{(ב)}$$

$$A(3, -1) \quad \text{(ג1)} \quad y = \frac{2}{3}x - 3 \quad \text{(ג2)}$$

שאלה מספר 5

בציור שלפניך מוצגים הגרפים של שתי הפונקציות:



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$$

העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

בנקודה שבה $x = 2$

- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק,

על ידי גרף הפונקציה $g(x)$

על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = 2$ (השטח המקוקו בציור)

א. מצא את משוואת המשיק.

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

פונקציה
 $x; y$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

$$f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 + 7$$

$$y = 9$$

$$(2, 9)$$

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$$f'(x) = 1x$$

$$f'(x) = m = ?$$

$$x = 2$$

$$m = 1(2) = 2$$

$$m = 2$$

משוואת המשיק

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(2, 9) \quad m = 2$$

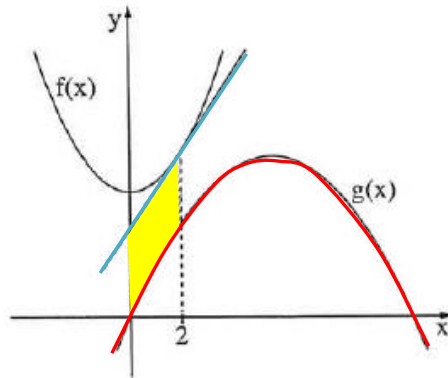
$$y - 9 = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 4 + 9$$

$$y = 2x + 5$$

תשובה: $y = 2x + 5$

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ על ידי ציר ה- y ועל ידי הישר $x = 2$ (השטח המקווקו בציור)



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = 2x + 5$	גדול/ימין
$x = 0$	פונקציה תחתונה	$x = 2$
	$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$	

$$S = \int_0^2 (2x+5) - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 3x\right) dx$$

$$S = \int_0^2 \left(2x+5 + \frac{1}{4}x^2 - 3x\right) dx$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 1x + 5\right) dx$$

$$S = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1x^2}{2} + 5x \right]_0^2$$

$$S_1 = \left[\frac{(2)^3}{12} - \frac{1(2)^2}{2} + 5(2) \right] - \left[\frac{(0)^3}{12} - \frac{1(0)^2}{2} + 5(0) \right]$$

$$S = \left[\frac{2}{3} - 2 + 10 \right] - [0]$$

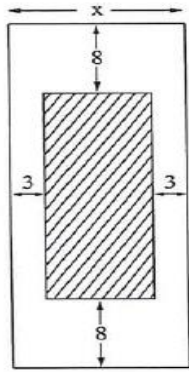
$$S = \left[8\frac{2}{3} \right]$$

תשובה: $S_T = 8\frac{2}{3}$

תשובה סופית:

$S_T = 8\frac{2}{3}$ (ב) $y = 2x + 5$ (א)

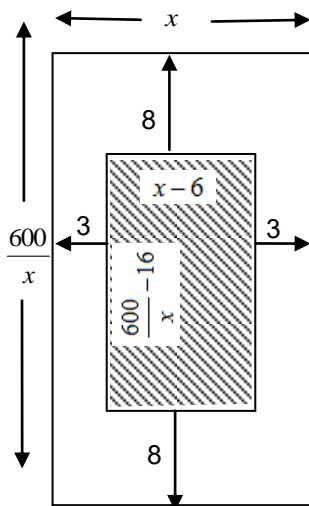
שאלה מספר 6 :



שטח של כל עמוד בחוברת פרסום למוצרי קוסמטיקה צריך להיות 600 סמ"ר
 סמן ב- x את רוחב העמוד, וענה על הסעיפים א – ב.
(א) הבע באמצעות x את אורך העמוד.
 רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו צריך להיות 8 ס"מ.
 ורוחב השוליים בצדדים צריך להיות 3 ס"מ. (ראה ציור).
(ב) (1) הבע באמצעות x את השטח המיועד לדפוס (השטח המקווקו בציור)
 (2) מה צריך להיות x , כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי. (השטח המקווקו בציור)

פתרון:

1. משפט המטרה: שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי



2. נוסחת המטרה: $p = a \cdot b \Rightarrow \max$

3. נוסחת עזר: $S = a \cdot b$

$600 = x \cdot y$

$y = \frac{600}{x}$

רוחב המלבן הפנימי

$\frac{600}{x} - 8 - 8$

$\frac{600}{x} - 16$

$P = (x-6) \cdot (\frac{600}{x} - 16)$

$P = \frac{600 \cdot x}{x} - 16x - \frac{6 \cdot 600}{x} + 96$

$P = 600 - 16x - \frac{3600}{x} + 96$

$P = 696 - 16x - \frac{3600}{x}$

אורך המלבן הפנימי

$x - 3 - 3$

$x - 6$

פונקציית המטרה

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$
 $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

הפונקציה

$P = 696 - 16x - \frac{3600}{x}$

$x = 15$

$P = 696 - 16(15) - \frac{3600}{(15)}$

$P = 216$

נגזרת ראשונה

$P' = -16 + \frac{3600 \cdot 1}{x^2}$

$P' = 0$

$0 = -16 + \frac{3600}{x^2}$

$16 = \frac{3600}{x^2}$

$16x^2 = 3600$

$x^2 = 225 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{225}$

$x_1 = +15 \quad x_2 = -15$

נגזרת שנייה

Max/min

$P''(x) = -\frac{3600 \cdot 2}{x^3} = -\frac{7200}{x^3}$

$P''(-15) = -\frac{7200}{(-15)^3} = +480 \cup \min$

$P''(+15) = -\frac{7200}{(+15)^3} = -480 \cup \max$

תשובה סופית:

$x = 15 \quad \text{MAX (ב)} \quad S = 696 - 16x - \frac{3600}{x} \quad \text{(ב)} \quad y = \frac{600}{x} \quad \text{(א)}$