

מבחן בגרות 35803 מועד חורף תשע"ו 2016.

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות)
שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

- בחנות בגדים א' המחיר של שמלה גדול פי 1.5 מהמחיר של חולצה.
 טלי קנתה 4 חולצות ו- 3 שמלות, ושילמה סך הכול 382.5 שקלים.
 א. מצא את המחיר של חולצה אחת ואת המחיר של שמלה אחת בחנות בגדים א'.
 ב. בסוף העונה ירד מחיר השמלה בחנות א' ב- 40%.
 חברי המועדון של חנות א' קיבלו הנחה נוספת של 20% ממחיר השמלה בסוף העונה.
 מה היה מחיר השמלה בסוף העונה עבור חבר מועדון של חנות א'?
 ג. בחנות בגדים ב' היה מחיר השמלה לפני סוף העונה כמו מחיר השמלה בחנות א' לפני סוף העונה.
 בסוף העונה ירד מחיר השמלה בחנות ב' ב- 60%. יעל טענה כי בסוף העונה חברי המועדון של חנות א' ישלמו עבור השמלה אותו המחיר כמו בחנות ב'. האם יעל צודקת? נמק.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 כבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר שמלה, y - מחיר חולצה

משוואה	סה"כ	חולצה		פעולה	שמלה	
		כמות	מחיר		כמות	מחיר
$1.5y = x$			y	$\cdot 1.5 =$		x
$3x + 4y = 382.5$	382.5	4	y	+	3	x

א. מצא את המחיר של חולצה אחת ואת המחיר של שמלה אחת בחנות בגדים א'.

$$\begin{aligned}
 3x + 4y &= 382.5 & 1.5y &= x \\
 1.5y &= x & y &= 4.5 \\
 3 \cdot (1.5y) + 4y &= 382.5 & 1.5 \cdot 4.5 &= x \\
 4.5y + 4y &= 382.5 & 67.5 &= x \\
 8.5y &= 382.5 / : 8.5 & & \\
 y &= 45 & &
 \end{aligned}$$

תשובה: מחיר שמלה 67.5 שקלים, מחיר חולצה 45 שקלים

**ב. בסוף העונה ירד מחיר השמלה בחנות א' ב- 40%.
 חברי המועדון של חנות א' קיבלו הנחה נוספת של 20% ממחיר השמלה בסוף העונה.
 מה היה מחיר השמלה בסוף העונה עבור חבר מועדון של חנות א'?**

תשובה: 32.4 שקלים מחיר השמלה בסוף העונה עבור חבר מועדון של חנות א'

$$\begin{aligned}
 \text{הנחה נוספת-20\%} & \quad \text{הוזלה-40\%} \\
 40.5 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) &= 32.4 & 67.5 \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) &= 40.5
 \end{aligned}$$

ג. בחנות בגדים ב' היה מחיר השמלה לפני סוף העונה כמו מחיר השמלה בחנות א' לפני סוף העונה. בסוף העונה ירד מחיר השמלה בחנות ב' ב- 60%. יעל טענה כי בסוף העונה חברי המועדון של חנות א' ישלמו עבור השמלה אותו המחיר כמו בחנות ב'. האם יעל צודקת? נמק

תשובה: יעל לא צודקת מחיר השמלה בחנות ב' לאחר ההנחה של 60% הוא 27 שקלים

$$\text{הוזלה-60\%} \quad 67.5 \cdot \left(1 - \frac{60}{100}\right) = 27$$

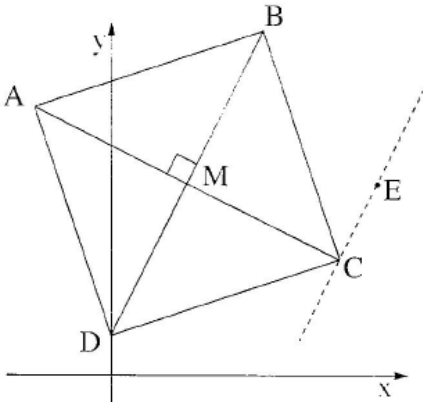
תשובה סופית:

- (א) מחיר חולצה 45 שקלים ומחיר שמלה 67.5 שקלים. (ב) 32.4 שקלים
 (ג) יעל לא צודקת. מחיר השמלה בחנות ב' לאחר ההנחה של 60% הוא 27 שקלים

פתרונות מלאים ניתן למצוא באתר "מתמטיקה באומץ - יוסי דהן"

שאלה מספר 2:

נתון ריבוע ABCD אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $M(2,5)$ (ראה ציור) שיעורי הקדקוד D הם $(0,1)$ (ראה ציור).



- (א) מצא את השיפוע של הישר DM.
- (ב) מצא את משוואת האלכסון AC.
- (ג) ישר המקביל לישר DM עובר דרך הנקודה $E(7,5)$.
 - (1) מצא את המשוואה של הישר המקביל.
 - (2) הישר שמצאת בתת סעיף ג(1) עובר דרך נקודה C. מצא את השיעורים של קדקוד C.
 - (ד) מצא את ההיקף של הריבוע ABCD.

פתרון:

(א) **מצא את השיפוע של הישר DM.**

שיפוע DM

$D(0,1) \quad M(2,5)$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(5) - (1)}{(2) - (0)} = \frac{4}{2} = 2$$

תשובה: $m_{DM} = 2$

(ב) **מצא את משוואת האלכסון AC.**

משוואת AC

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(2,5) \quad m = -\frac{1}{2}$

$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

$y = -\frac{1}{2}x + 1 + 5$

$y_{AC} = -\frac{1}{2}x + 6$

תשובה: $y_{AC} = -\frac{1}{2}x + 6$

שיפוע AC
 $m_{DM} = 2 \quad m_{AC} = -\frac{1}{2}$
 שיפוע הופכי נגדי

(ג) **ישר המקביל לישר DM עובר דרך הנקודה $E(7,5)$.**
(1) מצא את המשוואה של הישר המקביל.

משוואת המקביל

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(7,5) \quad m = 2$

$y - 5 = 2(x - 7)$

$y = 2x - 14 + 5$

$y = 2x - 9$

תשובה: $y = 2x - 9$

שיפוע מקביל
 $m_{DM} = 2 \quad m = 2$
 שיפועים זהים

ג(2) הישר שמצאת בתת סעיף ג(1) עובר דרך נקודה C.
מצא את השיעורים של קדקוד C.

נקודה C

$$\begin{aligned} y &= 2x - 9 & y &= -\frac{1}{2}x + 6 & y &= 2x - 9 \\ 2x - 9 &= -\frac{1}{2}x + 6 & x &= 6 \\ 2\frac{1}{2}x &= 15 & y &= 2(6) - 9 \\ x &= 6 & y &= 3 \\ & & C(6,3) & \end{aligned}$$

תשובה: C(6,3)

ד) מצא את ההיקף של הריבוע ABCD.

אורך צלע הריבוע

$$\begin{aligned} D(0,1) & \quad C(6,3) \\ d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ d &= \sqrt{(6-0)^2 + (3-1)^2} \\ d &= \sqrt{40} \end{aligned}$$

היקף הריבוע

$$\begin{aligned} P &= 4 \cdot a \\ P &= 4 \cdot \sqrt{40} \\ P &= 25.298 \end{aligned}$$

תשובה: $P_{ABCD} = 25.298$

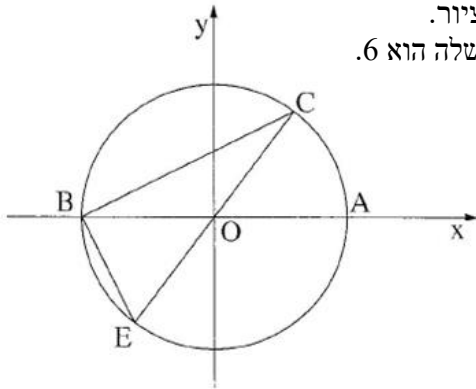
תשובה סופית :

(א) השיפוע הוא 2
 (ב) $y_{AC} = -0.5x + 6$
 (ג) $C(6,3)$
 (ד) $P_{ABCD} = 25.298$
 (1) $y = 2x - 9$

שאלה מספר 3

נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 100$.

המעגל חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B, כמתואר בציור. הנקודה C נמצאת על המעגל ברביע הראשון, ושיעור ה- x שלה הוא 6.



(א) מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

(ב) מצא את שיעורי ה- y של הנקודה C.

(ג) CE הוא קוטר המעגל (ראה ציור).

(1) מצא את השיעורים של הנקודה E.

(2) הראה כי $BC \perp BE$.

(3) מצא את שטח המשולש CBE.

פתרון:

(א) מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

נקודות A ו-B

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = 0$$

$$x^2 + (0)^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100}$$

$$x = \pm 10$$

$$A(10,0)$$

$$B(-10,0)$$

תשובה: $A(10,0)$, $B(-10,0)$

(ב) מצא את שיעורי ה- y של הנקודה C.

נקודה C

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x = 6$$

$$(6)^2 + y^2 = 100$$

$$y = \pm\sqrt{64}$$

$$y = \pm 8$$

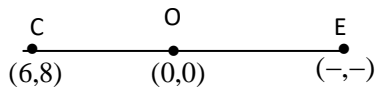
$$C(6,8)$$

תשובה: $C(6,8)$

(ג) CE הוא קוטר המעגל (ראה ציור).

(1) מצא את השיעורים של הנקודה E.

נקודה E



$$x_1, y_1 \quad x_M, y_M$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$0 = \frac{(6) + x_2}{2} \quad 0 = \frac{(8) + y_2}{2}$$

$$x_2 = -6 \quad y_2 = -8$$

$$E(-6, -8)$$

תשובה: $E(-6, -8)$

(2). הראה כי $BC \perp BE$.

שיפוע BC

$$B(-10,0) \quad C(6,8)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(8) - (0)}{(6) + (10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

שיפוע BE

$$B(-10,0) \quad E(-6,-8)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-8) - (0)}{(-6) + (10)} = \frac{-8}{4} = -2$$

הוכחה לניצבות

$$m_{BC} = \frac{1}{2} \quad m_{BE} = -2$$

שיפוע הופכי נגדי

תשובה: הוכחה**(3) מצא את שטח המשולש CBE.**

אורך BC

$$B(-10,0) \quad C(6,8)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(6+10)^2 + (8-0)^2}$$

$$d = \sqrt{320}$$

אורך BE

$$B(-10,0) \quad E(-6,-8)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(-6+10)^2 + (-8-0)^2}$$

$$d = \sqrt{80}$$

שטח המשולש

$$S_{CBE} = \frac{d_{BC} \cdot d_{BE}}{2}$$

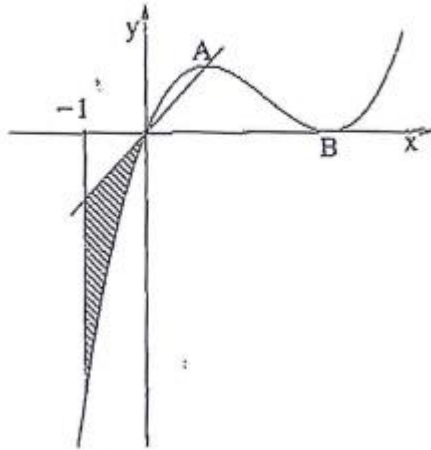
$$S_{CBE} = \frac{\sqrt{320} \cdot \sqrt{80}}{2}$$

$$S_{CBE} = 80$$

תשובה: $S_{CBE} = 80$ **תשובה סופית:**

(א) $A(10,0)$, $B(-10,0)$ (ב) $y_C = 8$ (ג) $E(-6,-8)$ (ג) $S_{CBE} = 80$ (ג) הוכחה (2)

שאלה מספר 4



נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, הנקודות A ו- B הן נקודות קיצון של הפונקציה (ראה ציור).
 א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B, וקבע את סוג הקיצון שלהן על פי הציור.
 ב. דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים העבירו ישר.
 (1) הראה כי משוואת הישר היא $y = 4x$
 (2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר שבתת סעיף ב (1) ועל ידי הישר $x = -1$ בתחום $x \leq 0$ (השטח המקווקו בציור).

פתרון:

א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו- B, וקבע את סוג הקיצון שלהן על פי הציור.

פונקציה
 $y = ?$
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
 $f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0$
 B(3,0)
 $f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4$
 A(1,4)

נגזרת ראשונה
 $m=0$
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = 3x^2 - 12x + 9$
 $x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{144 - 4(3)(9)}}{2(3)}$
 $x_{1,2} = \frac{12 \pm 6}{6}$
 $x_1 = +3 \quad x_2 = 1$

נגזרת שנייה
 max/min
 $f''(x) = 6x - 12$
 $f''(3) = 6(3) - 12 = +6 \cup \text{min}$
 $f''(1) = 6(1) - 12 = -6 \cap \text{max}$

תשובה: A (1,4) max B (3,0) min

ב. דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים העבירו ישר.

(1) הראה כי משוואת הישר היא $y = 4x$

שיפוע הישר
 A (1,4) o (0,0)
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(4) - (0)}{(1) - (0)} = \frac{4}{1} = 4$

משוואת הישר
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 (0,0) $m = 4$
 $y - 0 = 4(x - 0)$
 $y = 4x$

אפשרות נוספת
 $y = 4x$
 (0,0) $\Rightarrow 0 = 4 \cdot (0) \Rightarrow 0 = 0$
 (1,4) $\Rightarrow 4 = 4 \cdot (1) \Rightarrow 4 = 4$

- (2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה , על ידי הישר שבתת סעיף ב (1) ועל ידי הישר $x = -1$ בתחום $x \leq 0$ (השטח המקווקו בציור).

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y = 4x$	x גדול/ימין
$x = -1$	פונקציה תחתונה $y = x^3 - 6x^2 + 9x$	$x = 0$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (4x) - (x^3 - 6x^2 + 9x) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (4x - x^3 + 6x^2 - 9x) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (-x^3 + 6x^2 - 5x) dx$$

$$S_1 = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$S_1 = \left[-\frac{(0)^4}{4} + \frac{6(0)^3}{3} - \frac{5(0)^2}{2} \right] - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{6(-1)^3}{3} - \frac{5(-1)^2}{2} \right]$$

$$S_1 = [0] - \left[4\frac{3}{4} \right]$$

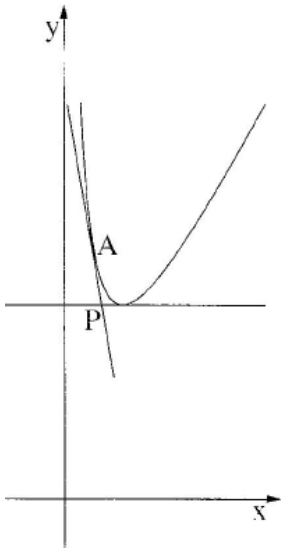
$$S_1 = \left[4\frac{3}{4} \right]$$

$S_1 = 4\frac{3}{4}$:תשובה

תשובה סופית:

(א) $A(1,4)$ מקסימום $B(3,0)$ מינימום (ב) הוכחה (ב) $S = 4.75$

שאלה מספר 5



נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ בתחום $x > 0$ (ראה ציור).

א. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 1$.

(1) מצא את שיפוע המשיק בנקודה A.

(2) מצא את משוואת המשיק בנקודה A.

ב. מצא את השיעורים של נקודות המינימום של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה המינימום שלה.

(1) מצא את משוואת המשיק בנקודת המינימום של הפונקציה.

(2) מהמשיקים שאת משוואותיהם מצאת, נפגשים בנקודה P (ראה ציור).

מצא את השיעורים של הנקודה P.

פתרון

א. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 1$.

(1) מצא את שיפוע המשיק בנקודה A.

(2) מצא את משוואת המשיק בנקודה A.

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

פונקציה
 $x ; y$

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}$$

$$f(1) = 2(1) + \frac{8}{(1)}$$

$$y = 10$$

$$(1,10)$$

נגזרת ראשונה
 $x ; m$

$$f'(x) = 2 - \frac{8 \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = m = ?$$

$$x = 1$$

$$m = 2 - \frac{8 \cdot 1}{(1)^2}$$

$$m = -6$$

משוואת משיק (ישר)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(1,10) \quad m = -6$$

$$(y - 10) = -6(x - 1)$$

$$y = -6x + 6 + 10$$

$$y = -6x + 16$$

תשובה: $y = -6x + 16 \quad m = -6$

ב. מצא את השיעורים של נקודות המינימום של הפונקציה בתחום הנתון.

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

פונקציה
 $x ; y$

$$f(x) = 2x + \frac{8}{x}$$

$$f(2) = 2(2) + \frac{8}{(2)}$$

$$y = 8$$

$$(2,8) \text{ min}$$

נגזרת ראשונה
 $x ; m$

$$f'(x) = 2 - \frac{8 \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$0 = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$2 = \frac{8}{x^2}$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

נגזרת שנייה
 $\text{min} ; \text{max}$

$$f''(x) = +\frac{8 \cdot 2}{(x)^3}$$

$$f''(-2) = +\frac{8 \cdot 2}{(-2)^3} = -2 \cap \text{max}$$

$$f''(+2) = +\frac{8 \cdot 2}{(2)^3} = +2 \cup \text{min}$$

תשובה: $(2,8) \text{ min}$

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה המינימום שלה.
 (1) . מצא את משוואת המשיק בנקודת המינימום של הפונקציה.

משוואת משיק (ישר)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(2,8) \quad m = 0$$

$$(y - 8) = 0(x - 8)$$

$$y = 8$$

תשובה: $y = 8$

(2) מהמשיקים שאת משוואותיהם מצאת, נפגשים בנקודה P (ראה ציור).
 מצא את השיעורים של הנקודה P.

נקודה P

$$\begin{cases} y = 8 \\ y = -6x + 16 \end{cases}$$

$$8 = -6x + 16$$

$$6x = 8$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

נקודה P

$$P = (1\frac{1}{3}, 8)$$

תשובה: $P(1\frac{1}{3}, 8)$

תשובה סופית:

(א) השיפוע הוא 6 - (א) $y = -6x + 16$ (א2)

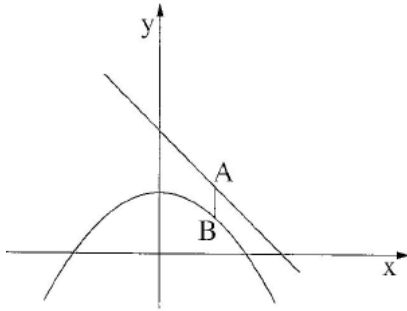
(ב) $\min(2,8) \cup y = 8$ (ג1) $P(1\frac{1}{3}, 8)$ (ג2)

שאלה מספר 6:

נתונה הפונקציה $f(x) = -0.5x^2 + 1$

ונתון הישר $f(x) = -x + 2$

הנקודה A נמצאת על הישר, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. ראה ציור.



- (א) מה צריך להיות שיעור ה-x של A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.
- (ב) מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** אורך הקטע AB הוא מינימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = y_A - y_B \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:** $y_A = -x + 2$ $y_B = -0.5x^2 + 1$

4. **פונקציית המטרה** $p = y_A - y_B \Rightarrow \min$

$$p = [-x + 2] - [-0.5x^2 + 1]$$

$$p = -x + 2 + 0.5x^2 - 1$$

$$p = 0.5x^2 - x + 1$$

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

הפונקציה

$$p = 0.5x^2 - x + 1$$

$$x = 0.5$$

$$p = 0.5(1)^2 - (1) + 1$$

$$p = 0.5$$

נגזרת ראשונה

$$p' = 1x - 1$$

$$p' = 0$$

$$0 = 1x - 1$$

$$1 = 1x$$

$$x = 1$$

נגזרת שנייה

Max/min
 $p''(x) = +1 \cup \min$

$$x = 1$$

$$y_A = 0.5x^2 + 1 = 0.5(1)^2 + 1 = 1.5$$

$$y_B = -x + 1 = -(1) + 1 = 0$$

סיכום התשובות

$$x = 1 \quad \min$$

$$y_A = 1.5$$

$$y_B = 0$$

$$p = 0.5$$

תשובה סופית:

(א) $x = 1 \quad \min$ (ב) $d_{AB} = 0.5$