

מבחן בגרות 35803 מועד א קיץ תשע"ו 2016

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

סוחר קנה שני סוגי פריטים: שולחנות וכיסאות. מחיר כל שולחן היה 300 שקלים, ומחיר כל כיסא היה 100 שקלים. סך הכול קנה הסוחר 75 פריטים. הסוחר שילם 600 שקלים עבור ההובלה. סך הכול הסתכמה ההוצאה של הסוחר ב- 11,100 שקלים. א. כמה שולחנות, וכמה כיסאות קנה הסוחר? ב. הסוחר מכר את השולחנות במחיר הגדול ב- 20% ממחיר הקנייה שלהם ואת הכיסאות במחיר הגדול ב- 35% ממחיר הקנייה שלהם. מצא את אחוז הרווח של הסוחר לעומת ההוצאה שלו. בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגריות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - כמות שולחנות, y - כמות כיסאות

| משוואה | סה"כ | כיסאות | | פעולה | שולחנות | |
|-----------------------|-----------------------|--------|------|-------|---------|------|
| | | מחיר | כמות | | מחיר | כמות |
| $300x + 100y = 10500$ | $11100 - 600 = 10500$ | 100 | y | + | x | 300 |
| $x + y = 75$ | 75 | | y | + | x | |

א. כמה שולחנות, וכמה כיסאות קנה הסוחר?

$$\begin{cases} 300x + 100y = 10500 \\ x + y = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 75 - x \\ y = 75 - 15 \\ y = 60 \end{cases}$$

$$300x + 100(75 - x) = 10500$$

$$300x + 7500 - 100x = 10500$$

$$200x = 3000$$

$$x = 15$$

תשובה: 15 שולחנות, 60 כסאות

ב. הסוחר מכר את השולחנות במחיר הגדול ב- 20% ממחיר הקנייה שלהם ואת הכיסאות במחיר הגדול ב- 35% ממחיר הקנייה שלהם. מצא את אחוז הרווח של הסוחר לעומת ההוצאה שלו.

| הרווח | סה"כ המכירה | כיסאות | | פעולה | שולחנות | |
|--------------------------|-------------|------------|------|-------|---------|-----------|
| | | מחיר | כמות | | מחיר | כמות |
| $13,500 - 11,100 = 2400$ | 13,500 | 100 · 1.35 | 60 | + | 15 | 300 · 1.2 |

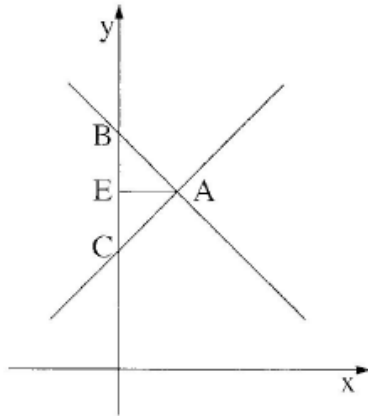
$$\frac{2400}{11100} \cdot 100 = 21.62\%$$

תשובה: אחוז הרווח של הסוחר לעומת ההוצאה הוא 21.62%

תשובה סופית:

(א) 15 שולחנות, 60 כסאות. **(ב)** אחוז הרווח של הסוחר לעומת ההוצאה הוא 21.62%

שאלה מספר 2:



נתונים הישרים $y = -x + 4$ ו- $y = x + 2$ הישרים נפגשים בנקודה A.

והם חותכים את ציר ה- y בנקודות B ו- C. כמתואר בציור.

(א) מצא את שיעורי הנקודות A, B, ו- C.

(ב) הראה כי המשולש ABC הוא:

(1) שווה שוקיים.

(2) ישר – זווית.

(ג) AE הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC.

מצא את משוואת התיכון AE. נמק.

(ד) המשיכו את התיכון AE עד לנקודה F, וכך נוצר ריבוע ABFC.

מצא את השיעורים של הנקודה F. נמק.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A, B, ו- C.

נקודה C

$$y = x + 2$$

$$x = 0$$

$$y = (0) + 2$$

$$y = 2$$

$$C (0,2)$$

נקודה B

$$y = -x + 4$$

$$x = 0$$

$$y = -(0) + 4$$

$$y = 4$$

$$B (0,4)$$

נקודה A

$$y = y \begin{cases} y = -x + 4 & y = x + 2 \\ y = x + 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$-x + 4 = x + 2 \quad y = 1 + 2$$

$$2 = 2x \quad y = 3$$

$$x = 1 \quad A (1,3)$$

תשובה: C (0,2) B (0,4) A (1,3)

(ב1) הראה כי המשולש ABC הוא : שווה שוקיים.

אורך צלע המשולש

$$C (0,2) \quad A (1,3)$$

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{2}$$

אורך צלע המשולש

$$B (0,4) \quad A (1,3)$$

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (3-4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{2}$$

תשובה: $d_{AC} = d_{AB} = \sqrt{2}$

(ב2) הראה כי המשולש ABC הוא : ישר זווית.

שיפוע AC

$$C (0,2) \quad A (1,3)$$

$$m = \frac{3-2}{1-0} = 1$$

$$m_{AC} = 1$$

שיפוע AB

$$B (0,4) \quad A (1,3)$$

$$m = \frac{3-4}{1-0} = -1$$

$$m_{AB} = -1$$

הוכחה לניצבות

$$m_{AC} = 1 \quad m_{AB} = -1$$

שיפוע הופכי נגדי

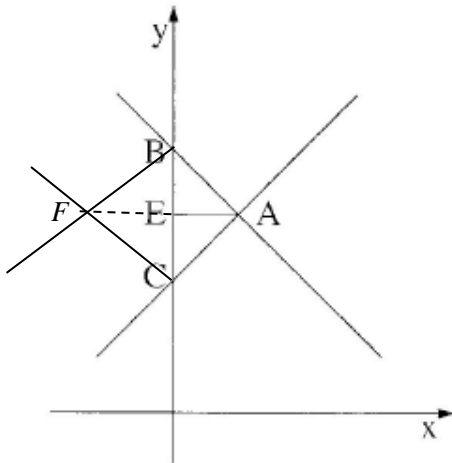
תשובה: $m_{AC} = 1 \quad m_{AB} = -1$ הופכי נגדי לכן ישר זווית

(ג). **AE הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC מצא את משוואת התיכון AE. נמק.**

| <u>נקודה E</u> | | <u>שיפוע AE</u> | | <u>משוואת AE</u> |
|-------------------------|-----------|---------------------------|-----------|------------------------|
| $C (0,2)$ | $B (0,4)$ | $E (0,3)$ | $A (1,3)$ | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| $x = \frac{0+0}{2} = 0$ | | $m = \frac{3-3}{1-0} = 0$ | | $(0,3) \quad m = 0$ |
| $y = \frac{4+2}{2} = 3$ | | $m_{AE} = 0$ | | $y - 3 = 0(x - 0)$ |
| $E (0,3)$ | | | | $y_{AE} = 3$ |

תשובה: $y_{AE} = 3$

(ד) **המשיכו את התיכון AE עד לנקודה F, וכך נוצר ריבוע ABFC. מצא את השיעורים של הנקודה F. נמק.**



| <u>נקודה F</u> | |
|--|-----------|
| $E (0,3)$ | $A (1,3)$ |
| $0 = \frac{1+x}{2} \Rightarrow x = -1$ | |
| $3 = \frac{3+y}{2} \Rightarrow y = 3$ | |
| $F (-1,3)$ | |

תשובה: $F (-1,3)$

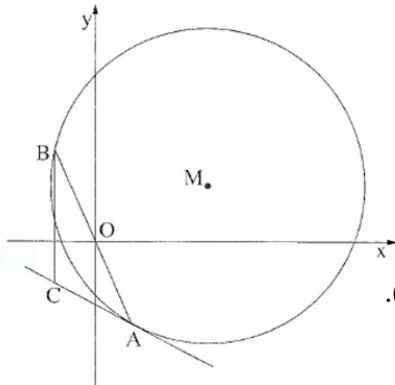
תשובה סופית :

$d_{AC} = d_{AB} = \sqrt{2}$: (א) $C (0,2)$ $A (1,3)$ $B (0,4)$ (ב) $m_{AC} = 1$ $m_{AB} = -1$ הופכי נגדי לכן ישר זווית

(ג) $y_{AE} = 3$ (ד) $F (-1,3)$

שאלה מספר 3

הנקודה $A(3,-6)$ נמצאת על המעגל $(x-8)^2 + (y-4)^2 = R^2$. (ראה ציור).



(א) מצא את משוואת המעגל.

(ב) הנקודה $O(0,0)$ היא אמצע הקטע AB .

(1) מצא את השיעורים של הנקודה B .

(2) הראה בעזרת הצבה כי הנקודה B נמצאת על המעגל.

העבירו משיק למעגל בנקודה A .

(ג) מצא את משוואת המשיק.

(ד) דרך הנקודה B העבירו מקביל לציר ה- y .

המקביל חותך בנקודה C את המשיק שמצאת בסעיף ג. (ראה ציור).

מצא את שיעורי הנקודה C .

פתרון:

(א) **מצא את משוואת המעגל.**

$$(x-8)^2 + (y-4)^2 = R^2$$

$$A(3,-6)$$

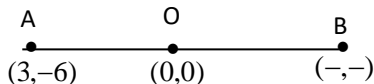
$$(3-8)^2 + (-6-4)^2 = R^2$$

$$125 = R^2$$

$$(x-8)^2 + (y-4)^2 = 125$$

תשובה: $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 125$

נקודה B



$$x_1, y_1 \quad x_M, y_M$$

$$0 = \frac{(3) + x_2}{2} \quad 0 = \frac{(-6) + y_2}{2}$$

$$x_2 = -3 \quad B(-3,6) \quad y_2 = 6$$

תשובה: $B(-3,6)$

(ב) **הנקודה $O(0,0)$ היא אמצע הקטע AB .**

מצא את השיעורים של הנקודה B .

(2) **הראה בעזרת הצבה כי הנקודה B נמצאת על המעגל.**

$$(x-8)^2 + (y-4)^2 = 125$$

$$B(-3,6)$$

$$(-3-8)^2 + (6-4)^2 = 125$$

$$125 = 125$$

תשובה: $125 = 125$

(ג). העבירו משיק למעגל בנקודה A. מצא את משוואת המשיק.

| | | |
|---|---|---|
| <p>שיפוע AM</p> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(4) + (6)}{(8) - (3)} = \frac{10}{5} = 2$ | <p>שיפוע המשיק</p> $m_{AM} = 2 \quad m_{\text{משיק}} = -\frac{1}{2}$ <p>שיפוע הופכי נגדי</p> | <p>משוואת המשיק</p> $y - y_1 = m(x - x_1)$ $(3, -6) \quad m = -\frac{1}{2}$ $y + 6 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} - 6$ $y = -\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ <p>תשובה: $y = -\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$</p> |
|---|---|---|

(ד). דרך הנקודה B העבירו מקביל לציר ה-y. המקביל חותך בנקודה C את המשיק שמצאת בסעיף ג. (ראה ציור). מצא את שיעורי הנקודה C.

נקודה C

$$y = -\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$$

$$x = -3$$

$$y = -\frac{1}{2}(-3) - 4\frac{1}{2}$$

$$y = -3$$

$$C (-3, -3)$$

תשובה: $C (-3, -3)$

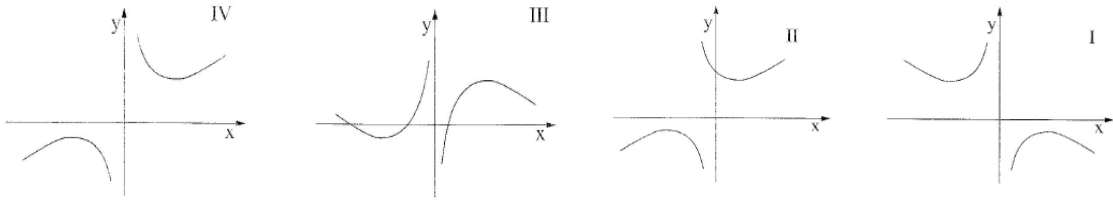
תשובה סופית:

(א) $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 125$ (ב) $B(-3,6)$ (ב2) $125 = 125$ (ג) $y = -\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ (ד) $C (-3,-3)$

שאלה מספר 4

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{6} + \frac{6}{x} + 1$,

- (א) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (ב) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 (ג) רשום את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה
 (ד) מבין הגרפים I II III IV שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק?



(ה) האם הישר $y = 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

פתרון:

(א) **רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.** **תשובה:** $x \neq 0$

(ב) **מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.**

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$
 $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

פונקציה
 $x; y$

$f(x) = \frac{x}{6} + \frac{6}{x} + 1$
 $f(6) = \frac{(+6)}{6} + \frac{6}{(+6)} + 1$
 $y = 3$
 $(6,3) \text{ min}$
 $f(-6) = \frac{(-6)}{6} + \frac{6}{(-6)} + 1$
 $y = -1$
 $(-6,-1) \text{ max}$

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$f'(x) = \frac{1}{6} - \frac{6 \cdot 1}{x^2}$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2}$
 $\frac{6}{x^2} = \frac{1}{6}$
 $x^2 = 36$
 $x = \pm 6$

נגזרת שנייה
 $\text{min}; \text{max}$

$f''(x) = +\frac{6 \cdot 2}{(x)^3}$
 $f''(-6) = +\frac{12}{(-6)^3} = -\frac{1}{18} \cap \text{max}$
 $f''(+6) = +\frac{12}{(+6)^3} = +\frac{1}{18} \cup \text{min}$
תשובה: $(6,3) \text{ min } (-6,-1) \text{ max}$

(ג) **רשום את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה**

| x | עלייה | x | ירידה | x | ירידה | x | עלייה | x |
|-----------|---------|----|---------|---|---------|---|---------|-----------|
| $-\infty$ | $< x <$ | -6 | $< x <$ | 0 | $< x <$ | 6 | $< x <$ | $+\infty$ |

תשובה: **תחומי עלייה:** $-\infty < x < -6$ $-1 < x < +\infty$
תחומי ירידה: $-6 < x < 0$ $0 < x < 6$

(ד) **מבין הגרפים I II III IV שלפניך איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק?**

תשובה: גרף מספר 4 המתאים לנקודות הקיצון ולסוגן.

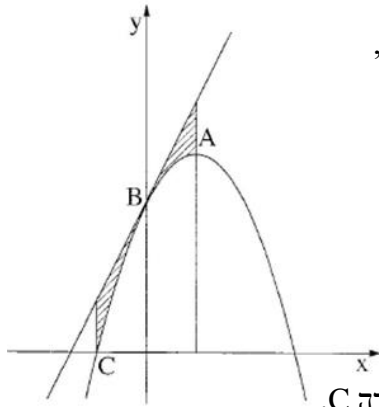
(ה) **האם הישר $y = 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.**

תשובה: הישר $y = 2$ לא חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ הוא נמצא מתחת לנקודת המינימום

תשובה סופית:

(א) $x \neq 0$ (ב) $(6,3) \text{ min } (-6,-1) \text{ max}$ (ג) תחומי עלייה: $-\infty < x < -6$ $-1 < x < +\infty$
 תחומי ירידה: $0 < x < 6$ $-6 < x < 0$ (ד) גרף מספר 4 (ה) לא

שאלה מספר 5



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + 3$,
 C היא נקודת החיתוך של הגרף עם החלק השלילי של ציר ה- x.
 B היא נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y.
 הנקודה A (1,4) נמצאת על הגרף הפונקציה $f(x)$.
 א. מצא את השיעורים של הנקודה B ושל הנקודה C.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.
 ב. (1) מצא את משוואת המשיק.
 (2) הראה כי המשיק מקביל ל- AC.

ג. העבירו שני אנכים לציר ה- x : אנך דרך הנקודה A ואנך דרך הנקודה C.
 מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי שני האנכים ועל ידי המשיק בנקודה B (השטח המקווקו בציור).

פתרון:

א. מצא את השיעורים של הנקודה B ושל הנקודה C.

נקודה C

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$y = 0$$

$$0 = -x^2 + 2x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$(3,0)$$

$$C (-1,0)$$

נקודה B

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$x = 0$$

$$y = -(0)^2 + 2(0) + 3 = 3$$

$$B (0,3)$$

תשובה: B (0,3) C (-1,0)

(ב1) מצא את משוואת המשיק.

$f(x) = a \cdot x^n$
 $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

פונקציה
 $x ; y$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

נגזרת ראשונה
 $x ; m$

$f'(x) = -2x + 2$
 $x = 0$
 $f'(x) = m = ?$
 $m = -2(0) + 2$
 $m = 2$

משוואת המשיק

$y - y_1 = m(x - x_1)$
 $(0,3) \quad m = 2$
 $y - 3 = 2(x - 0)$
 $y = 2x + 3$

תשובה: $y = 2x + 3$

(ב2) הראה כי המשיק מקביל ל- AC.

שיפוע AC

A (1,4) C (-1,0)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(0) - (4)}{(-1) - (1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

תשובה: $m_{AC} = m_{משיק} = 2$

ג. העבירו שני אנכים לציר ה x : אנך דרך הנקודה A ואנך דרך הנקודה C. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי שני האנכים ועל ידי המשיק בנקודה B (השטח המקווקו בצירור).

| | | |
|-----------------|---------------------------------------|------------------|
| x קטן/שמאל | פונקציה עליונה $y = 2x + 3$ | x גדול/ימין |
| $x = 0$ | פונקציה תחתונה $y = -x^2 + 2x + 3$ | $x = 1$ |

| | | |
|-----------------|---------------------------------------|------------------|
| x קטן/שמאל | פונקציה עליונה $y = 2x + 3$ | x גדול/ימין |
| $x = -1$ | פונקציה תחתונה $y = -x^2 + 2x + 3$ | $x = 0$ |

$$S_1 = \int_0^1 (2x+3) - (-x^2+2x+3) dx$$

$$S_1 = \int_0^1 (2x+3+x^2-2x-3) dx$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^2) dx$$

$$S_1 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$S_1 = \left[\frac{(1)^3}{3} \right] - \left[\frac{(0)^3}{3} \right]$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{3} \right] - [0]$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 (2x+3) - (-x^2+2x+3) dx$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 (2x+3+x^2-2x-3) dx$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 (x^2) dx$$

$$S_2 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0$$

$$S_2 = \left[\frac{(0)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} \right]$$

$$S_2 = [0] - \left[-\frac{1}{3} \right]$$

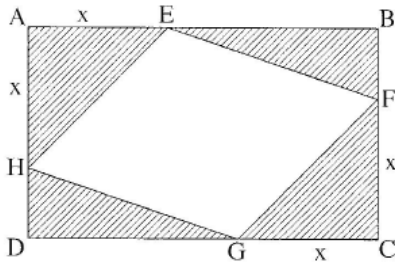
$$S_2 = \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$S_T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ :תשובה}$$

תשובה סופית:

$$S_T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{א}) \quad m_{AC} = m_{\text{משיק}} = 2 \quad (\text{ב}) \quad y = 2x + 3 \quad (\text{ב1}) \quad B(0,3) \quad C(-1,0) \quad (\text{א})$$

שאלה מספר 6:



במלבן ABCD נתון:

$$AB = DC = 10 \text{ ס"מ}$$

$$AD = BC = 6 \text{ ס"מ}$$

על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים:

$$AE = AH = CF = CG = x$$

ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם מקווקו בצירוף.

א. הבע באמצעות x את כל השטח המקווקו בצירוף.

ב. מה צריך להיות x , כדי שהשטח המקווקו יהיה מינימלי?

ג. חשב את שטח המרובע EFGH כאשר השטח המקווקו הוא מינימלי.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** שהשטח המקווקו יהיה מינימלי.

2. **נוסחת המטרה:** $p = S_{AEH} + S_{CFG} + S_{BFE} + S_{HDG} \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:**

$$S_{AEH} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{CFG} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{BFE} = \frac{(6-x) \cdot (10-x)}{2} = \frac{x^2 - 16x + 60}{2}$$

$$S_{HDG} = \frac{(6-x) \cdot (10-x)}{2} = \frac{x^2 - 16x + 60}{2}$$

4. **פונקציית המטרה**

$$p = S_{AEH} + S_{CFG} + S_{BFE} + S_{HDG} \Rightarrow \min$$

$$P = \left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot 2 + \left(\frac{x^2 - 16x + 60}{2}\right) \cdot 2$$

$$p = x^2 + x^2 - 16x + 60$$

$$p = 2x^2 - 16x + 60$$

הפונקציה

$$p = 2x^2 - 16x + 60$$

$$x = 4$$

$$p = 2(4)^2 - 16(4) + 60$$

$$p = 28$$

נגזרת ראשונה

$$p' = 4x - 16$$

$$p' = 0$$

$$0 = 4x - 16$$

$$16 = 4x$$

$$x = 4$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$p''(x) = +4 \cup \min$$

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

ג. חשב את שטח המרובע EFGH כאשר השטח המקווקו הוא מינימלי.

$$S_{EFGH} = S_{ABCD} - P$$

$$S_{EFGH} = (10 \cdot 6) - 28$$

$$S_{EFGH} = 32$$

תשובה סופית:

(א) $p = 2x^2 - 16x + 60$ (ב) $x = 4$ (ג) $S_{EFGH} = 32$