מבחן בגרות 35003 מועד א קיץ תשס"ה 2005

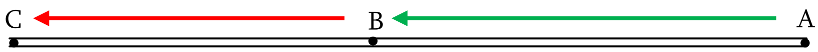
שאלה מספר 1

רוכב אופניים יצא מהעיר A, עבר דרך העיר B והגיע לעיר C.
המרחק מ– A ל– B הוא 240 ק"מ,
והמרחק מ– B ל– C הוא 160 ק"מ.
הרוכב רכב מ– A ל– B במהירות הגדולה ב– 20% מהמהירות שלו בדרך מ– B ל– C.
הרוכב עבר את הדרך מ– A ל– B בשעה אחת יותר מהזמן שעבר את הדרך מ– B ל– C.
מצא את מהירות הרוכב בדרך מ– B ל– C.
(מהירויות הרוכב היו קבועות)

גדול ב 20%

$$\frac{100+20}{100}=1.2$$

פתרון



החלק הראשון מ– A ל– B		
מהירות v	**זמן** $t=\frac{S}{V}$	**דרך** $S=t\cdot v$
$1.2v$	$t_1=\frac{240}{1.2v}$	240

החלק השני מ– B ל– C		
מהירות v	**זמן** $t=\frac{S}{V}$	**דרך** $S=t\cdot v$
v	$t_2=\frac{160}{v}$	160
	1	המתנה

$$t_1=t_2+1$$

$$\frac{240}{1.2v}=\frac{160}{v}+1 \qquad /1.2\cdot v$$

$$240=160\cdot 1.2+1\cdot 1.2\cdot v$$

$$240=192+1.2v$$

$$48=1.2v$$

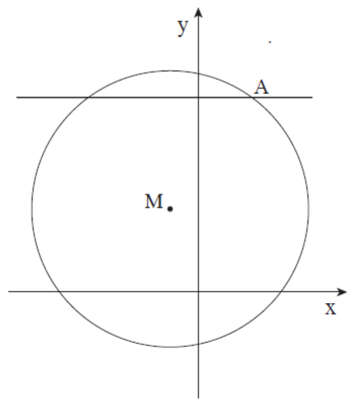
$$v=40$$

המהירות מ B ל C היא 40 קמ"ש

המהירות מ A ל B היא:
48 קמ"ש ($1.2\cdot 40=48$)

תשובה סופית:
מהירות הרוכב בדרך מ– B ל– C. 40 קמ"ש

שאלה מספר 2



הנקודה M היא מרכז המעגל $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישר $y=7$.

עם המעגל (ראה ציור)

ידוע שהנקודה A נמצאת ברביע הראשון

(א). מצא את השעורים של הנקודה A.

(ב). מצא את שיפוע הישר MA.

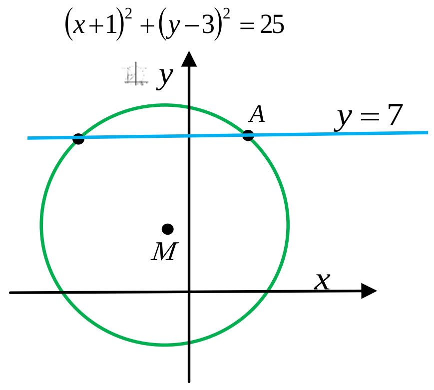
(ג). מצא את משוואת המשיק בנקודה A.

(ד). דרך הנקודה M העבירו אנך לישר y = 7

האנך חותך את הישר בנקודה B מצא את שטח המשולש AMB.

פתרון:

(א) מצא את השיעורים של הנקודה A



נקודה A

$(x+1)^2+(y-3)^2=25$

$y=7$

$(x+1)^2+(7-3)^2=25$

$(x+1)^2=25-16$

$x+1=\pm\sqrt{9}$

$x_{1,2}=\pm3-1$

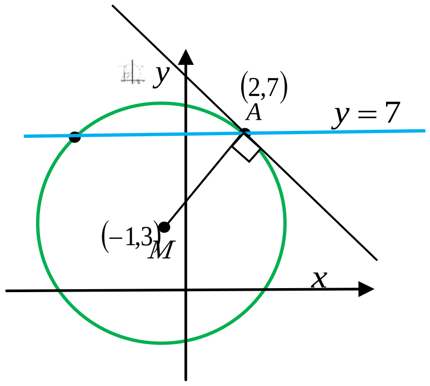
$x_1=+3-1=2$

$x_{1,2}=-3-1=-4$

$A(2,7)\quad(-4,7)$

תשובה: $A(2,7)$

(ב) מצא את השיפוע MA.



משוואת המעגל

$(x+1)^2+(y-3)^2=25$

$M(-1,3)\qquad R=5$

שיפוע MA

$M(-1,3)\quad A(2,7)$

$(x_1,y_1)\quad(x_2,y_2)$

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m_{MA}=\dfrac{7-3}{2+1}$

$m_{MA}=\dfrac{4}{3}$

תשובה: $m_{MA}=\dfrac{4}{3}$

(ג) מצא את משוואת הישר המשיק למעגל בנקודה A.

<u>משוואת משיק</u>

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(2,7) \qquad m = -\frac{3}{4}$

$y - 7 = -\frac{3}{4}(x-2)$

$y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2} + 7$

$y = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$

<u>שיפוע משיק</u>

$m_{MA} = \frac{4}{3} \quad m_{משיק} = -\frac{3}{4}$

שיפוע הופכי נגדי

<u>תשובה:</u> $y = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$

(ד) דרך הנקודה M העבירו אנך לישר y = 7 האנך חותך את הישר בנקודה B
מצא את שטח המשולש AMB.

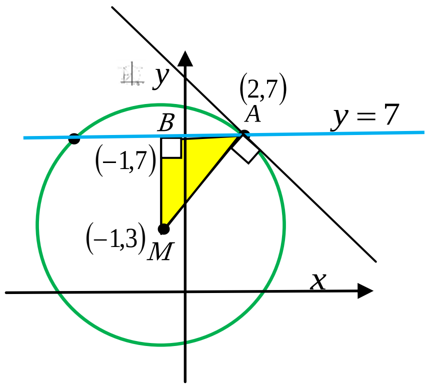
<u>נקודה B</u>

$B(-1,7)$

שיפוע הופכי נגדי

$S = \frac{MB \cdot AB}{2}$

$S_{AMB} = \frac{4 \cdot 3}{2} \qquad S_{AMB} = 6$



<u>תשובה:</u> $S_{AMB} = 6$

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $A(2,7)$ **(ב)** $m_{MA} = \frac{4}{3}$ **(ג)** $y = -\frac{3}{4}x + 8\frac{1}{2}$ **(ד)** $S_{AMB} = 6$

שאלה מספר 3.

נתונה הפונקציה $y=(x^2-3x+3)\cdot e^x$

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגן.

ב. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

פתרון:

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגן.

נגזרת שנייה

$u=x^2-1x$

$u'=2x-1$

$v=e^x$

$v'=e'$

$y'=(x^2-1)\cdot e^x$

$y'=u\cdot v'+u'\cdot v$

$y''=(x^2-1x)\cdot e^x+(2x-1)\cdot e^x$

$y'=e^{x}\cdot[x^2-1x+2x-1]$

$y'=e^x\cdot[x^2+1x-1]$

$x=0$

$y'=e^{(0)}\cdot[(0)^2+1(0)-1]=-1\cap\max$

$x=1$

$y'=e^{(1)}\cdot[(1)^2+1(1)-1]=+1e\cup\min$

נגזרת ראשונה

$u=x^2-3x+3$

$u'=2x-3$

$v=e^x$

$v'=e'$

$y=(x^2-3x+3)\cdot e^x$

$y'=u\cdot v'+u'\cdot v$

$y'=(x^2-3x+3)\cdot e^x+(2x-3)\cdot e^x$

$y'=e^{x}\cdot[x^2-3x+3+2x-3]$

$y'=e^x\cdot[x^2-1x]$

$y'=0$

$0=(x^2-1x)$

$0=x(x-1)$

$x_1=0$

$0=x-1 \qquad x_2=1$

פונקציה

$y=(x^2-3x+3)\cdot e^x$

$x=0 \qquad x_2=1$

$y=[(0)^2-3(0)+3]\cdot e^0=[3]\cdot 1=3$

$(0,3)$

$y=[(1)^2-3(1)+3]\cdot e^1=[1]\cdot e=e$

$(1,e)$

תשובה: $(1,e)\cup\min \qquad (0,3)\cap\max$

ב. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

תחום עלייה	תחום ירידה
$1<x<+\infty$	$0<x<1$

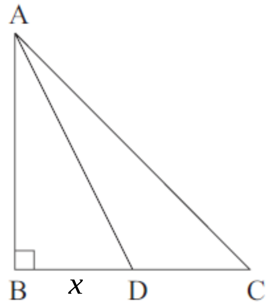
תשובה: **תחום עלייה** $1<x<+\infty$ **תחום ירידה** $0<x<1$

תשובה סופית:

(א) $(1,e)\cup\min \qquad (0,3)\cap\max$

(ב) **תחום עלייה** $1<x<+\infty$ **תחום ירידה** $0<x<1$

שאלה מספר 4.

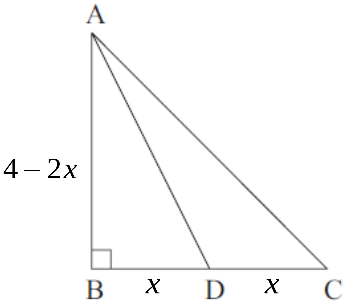


במשולש ישר-זווית ABC $B=90^0$
AD הוא תיכון לניצב BC. (ראה ציור)
נתון $AB+BC=4$.

א. סמן ב- x את BD
והבע את אורכי הניצבים באמצעות x.

ב. מצא את x שעבורו אורך התיכון AD יהיה מינימלי

פתרון:



1. משפט המטרה: אורך התיכון AD יהיה מינימלי

2. נוסחת המטרה: $AD^2=AB^2+BD^2$

3. נוסחת עזר:

$BC=2x$

$AB+2x=4$

$AB=4-2x$

4. פונקציית המטרה

$AD^2=(4-2x)^2+x^2$

$AD^2=(4-2x)(4-2x)+x^2$

$AD^2=16-8x-8x+4x^2+x^2$

$AD^2=5x^2-16x+16$

$$\boxed{p=\sqrt{5x^2-16x+16}}$$

נגזרת שנייה

Max/min

$p''(x)=+10 \cup \min$

נגזרת ראשונה

$p'=\dfrac{10x-16}{2\sqrt{5x^2-16x+16}}$

$p'=0$

$0=10x-16$

$10x=16$

$x=1.6$

הפונקציה

$p=\sqrt{5x^2-16x+16}$

$x=1.6$

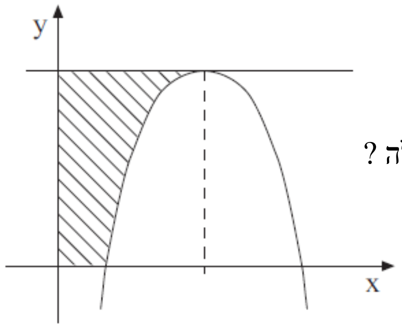
$p=\sqrt{5(1.6)^2-16(1.6)+16}$

$p=1.788$

תשובה סופית:

(א) $BC=2x$ $BC=4-2x$ **(ב)** $x=1.6 \quad \min$

שאלה מספר 5.



נתונה הפונקציה $y=-x^2+6x-5$. ראה ציור.

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.

ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה ?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי גרף הפונקציה
(השטח המקווקו בציור).

פתרון:

משיק במקסימום

$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

$(3,4) \qquad m=0$

$y-4=0(x-3)$

$y=4$

נגזרת 1

$y'=-2x+6$

$y'=m=0$

$0=-2x+6$

$2x=6$

$x=3$

פונקציה

$y=-x^2+6x-5$

$y=-(3)^2+6(3)-5$

$y=4$

$(3,4)$

חיתוך עם ציר ה-x

$0=-x^2+6x-5$

$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)(-5)}}{2(-1)}$

$x=\dfrac{-6\pm4}{-2}$

$x_1=5 \qquad x_2=1$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה $y=4$ / פונקציה תחתונה $y=-x^2+6x-5$	x קטן/שמאל
$x=3$		$x=1$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה $y=4$ / פונקציה תחתונה $y=0$	x קטן/שמאל
$x=1$		$x=0$

$$S_2=\int_1^3 (\ 4\ )-(\ -x^2+6x-5\ )dx$$

$$S_2=\int_1^3 (\ 4+x^2-6x+5\ )dx$$

$$S_2=\int_1^3 (\ x^2-6x+9\ )dx$$

$$S_2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_1^3$$

$$S_2=\left[\frac{(3)^3}{3}-\frac{6(3)^2}{2}+9(3)\right]-\left[\frac{(1)^3}{3}-\frac{6(1)^2}{2}+9(1)\right]$$

$$S_2=\left[\ 9\ \right]-\left[\ 6\frac{1}{3}\ \right]$$

$$S_2=\left[\ 2\frac{3}{3}\ \right]$$

$$S_1=\int_0^1 (\ 4\ )-(\ 0\ )dx$$

$$S_1=\int_0^1 (\ 4\ )dx$$

$$S_1=[4x]_0^1$$

$$S_1=[4(1)]-[4(0)]$$

$$S_1=[\ 4\ ]$$

$$S_T=S_1-S_2$$

$$S_2=[\ 4\ ]+\left[\ 2\frac{2}{3}\ \right]=6\frac{2}{3}$$

תשובה סופית:

(א) $(3,4)\max$ **(ב)** $y=4$ **(ג)** $S=4+2\frac{2}{3}=6\frac{2}{3}$