

מבחן בגרות 35003 מועד ב' קיץ תשס"ד 2004

שאלה מספר 1

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל נסיגה

$$\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$$

- א. הבע באמצעות t את האיברים a_2 , a_3 ו- a_4 .
 ב. האיבר במקום ה-40 בסדרה הנתונה שווה ל-198 חשב את t .
 ג. סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-6275 חשב את n .

פתרון:

- א. **הבע באמצעות t את האיברים a_2 , a_3 ו- a_4 .**

$$\begin{cases} a_1 = t \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = a_1 + 5 \\ n = 1 \\ a_2 = t + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = a_2 + 5 \\ n = 2 \\ a_3 = t + 5 + 5 \\ a_3 = t + 10 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = a_3 + 5 \\ n = 3 \\ a_4 = t + 10 + 5 \\ a_4 = t + 15 \end{cases}$$

תשובה: $a_2 = t + 5$ $a_3 = t + 10$ $a_4 = t + 15$

- ב. **האיבר במקום ה-40 בסדרה הנתונה שווה ל-198 חשב את t .**
 הסדרה מהווה סדרה חשבונית קיים בה הפרש קבוע

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ d &= a_3 - a_2 = (t+10) - (t+5) = 5 & 198 &= t + (40-1) \cdot 5 \\ d &= a_4 - a_3 = (t+15) - (t+10) = 5 & 198 - 195 &= t \\ & & 3 &= t \end{aligned}$$

תשובה: $3 = t$

- ג. **סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-6275 חשב את n .**

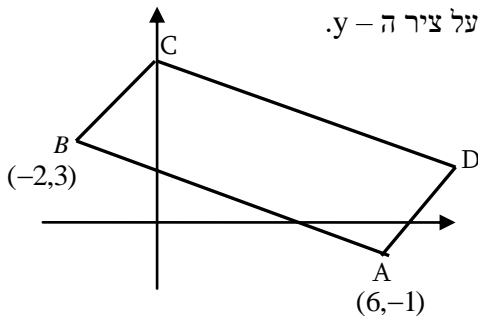
$$\begin{aligned} a_1 &= 3 & S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1) \cdot d] & 5n^2 + 1n - 12550 &= 0 \\ a_2 &= 3 + 5 = 8 & 6275 &= \frac{n}{2} [2(3) + (n-1) \cdot 5] & n_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(5)(-12550)}}{2(5)} \\ a_3 &= 8 + 10 = 18 & 12550 &= n[6 + 5n - 5] & n_{1,2} &= \frac{-1 \pm 501}{10} \\ d &= 5 & 12550 &= n[1 + 5n] & n_1 &= \frac{-1 + 501}{10} = 50 \\ & & 12550 &= 1n + 5n^2 & n_2 &= \frac{-1 + 501}{10} \neq -50.2 \\ & & 5n^2 + 1n - 12550 &= 0 & & \end{aligned}$$

תשובה: $n = 50$

תשובה סופית:

(א) $a_4 = t + 15$ (ב) $t = 3$ (ג) $n = 50$

שאלה מספר 2.



במלבן ABCD נתון A (6, -1), B (-2, 3) קדקוד C נמצא על ציר ה-y.

- א. מצא את השיפוע של הצלע BC.
 ב. מצא את: (1) שיעורי הקדקוד C. (2) שיעורי הקדקוד D.

פתרון:

א. מצא את השיפוע של הצלע BC.

שיפוע BC

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \quad m_{BC} = +2$$

שיפוע הופכי נגדי

שיפוע AB

$$m_{AB} = \frac{-1-3}{6+2} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

תשובה: $m_{BC} = +2$

(ב) 1. מצא את שיעורי הקדקוד C.

<u>משוואת BC</u>	<u>נקודה C</u>
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y = 2x + 7$
$(-2, 3) \quad m = 2$	$x = 0$
$y - 3 = 2(x + 2)$	$y = 2(0) + 7$
$y_{BC} = 2x + 4 + 3$	$y = 7$
$y_{BC} = 2x + 7$	$C (0, 7)$

תשובה: C (0,7)

(ב) 2. מצא את שיעורי הקדקוד D.

<u>משוואת AD</u>	<u>משוואת CD</u>	<u>נקודה D</u>	<u>נקודה D</u>
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$\begin{cases} y = 2x - 13 \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2x - 13 \\ x = 8 \end{cases}$
$(6, -1) \quad m = 2$	$(0, 7) \quad m = -\frac{1}{2}$	$2x - 13 = -\frac{1}{2}x + 7$	$y = 2(8) - 13$
$y + 1 = 2(x - 6)$	$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 0)$	$2\frac{1}{2}x = 20$	$y = 3$
$y_{AD} = 2x - 12 - 1$	$y_{CD} = -\frac{1}{2}x + 7$	$x = 8$	$D (8, 3)$
$y_{AD} = 2x - 13$			

תשובה: D (8,3)

תשובה סופית:

(א) $m = 2$ (ב) C(0,7) (ב) D(8,3)

שאלה מספר 3.

מורה לספרות הזמין 4 עותקים של "שירי ביאליק"
 ו- 5 עותקים של " סיפור פשוט " מאת עגנון.
 לפי המחירון הוא היה צריך לשלם עבור כל ההזמנה 320 שקלים.
 בגלל ההזמנה המרוכזת קיבל המורה הנחה של 15% על "שירי ביאליק"
 והנחה של 10% על " סיפור פשוט".
 בסך הכול שילם המורה 282 שקלים.
 מה היה מחיר של עותק " שירי ביאליק " ושל עותק " סיפור פשוט " לפני ההנחה
 (כלומר המחיר לפי המחירון).

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ , שקלים, ק"ג , % , וכו'....).

נתונים
 הגדרת המשתנים: x - מחיר ביאליק, y - מחיר עגנון

הנחה של 15% **הנחה של 10%**

$$1 - \frac{15}{100} = 0.85$$

$$1 - \frac{10}{100} = 0.9$$

פתרון:

משוואה	סה"כ	עותקים של עגנון		פעולה	עותקים של ביאליק		
		מחיר	כמות		מחיר	כמות	
$4x + 5y = 320$	320	y	5	+	x	4	לפני השינוי
$3.4x + 4.5y = 282$	282	0.9y	5	+	0.85x	4	אחרי השינוי

מה היה מחיר של עותק " שירי ביאליק " ושל עותק " סיפור פשוט " לפני ההנחה
 (כלומר המחיר לפי המחירון).

$$\begin{cases} 4x + 5y = 320 / 3.4 \\ 3.4x + 4.5y = 282 / -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 5y = 320 \\ y = 40 \\ 4x + 5(40) = 320 \\ 4x = 120 \\ x = 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1y &= -40 \\ y &= 40 \end{aligned}$$

תשובה: מחיר עותק של ביאליק 30 ₪ , ו מחיר עותק של עגנון 40 ₪

תשובה סופית:

מחיר עותק של ביאליק 30 ₪ , ו מחיר עותק של עגנון 40 ₪

שאלה מספר 4.

נתונה הפונקציה $y = (x-1) \cdot (x-3)$.

- א. מצא את משוואת המשיקים לפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את שיעור ה- x של הנקודה שבה שני המשיקים שמצאת בסעיף א' חותכים זה את זה.
- ג. מצא את : (1) שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה.
(2) משוואת הישר המשיק לפונקציה בנקודת הקיצון שלה.

פתרון:

(א.) מצא את משוואת המשיקים לפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

<u>פונקציה</u>	<u>נגזרת ראשונה</u>	<u>משוואת משיק (ישר)</u>
$y = 0 \quad x = ?$	$x = 3 \quad m = ?$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$f(x) = (x-1)(x-3)$	$f'(x) = 2x - 4$	
$f(x) = x^2 - 3x - 1x + 3$	$f'(3) = 2(3) - 4$	$(3,0) \quad m = 2$
$0 = x^2 - 4x + 3$	$m = 2$	$(y-0) = 2(x-3)$
$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4(1)(3)}}{2(1)}$	$x = 1 \quad m = ?$	$y = 2x - 6$
$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$	$f'(1) = 2(1) - 4$	$(1,0) \quad m = -2$
$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$	$m = -2$	$y - 0 = -2(x - 1)$
$(3,0) \quad (1,0)$		$y = -2x + 2$

(ב.) מצא את שיעור ה- x של הנקודה שבה שני המשיקים שמצאת בסעיף א' חותכים זה את זה.

$$\begin{aligned}
 y &= 2x - 6 \quad y = -2x + 2 \\
 2x - 6 &= -2x + 2 \\
 2x + 2x &= 2 + 6 \\
 4x &= 8 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

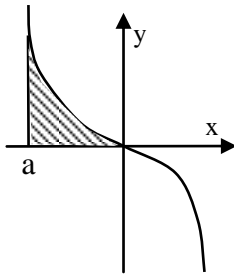
(ג.) מצא את : (1) שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה.
(2) משוואת הישר המשיק לפונקציה בנקודת הקיצון שלה.

<u>פונקציה</u>	<u>נגזרת ראשונה</u>	<u>משוואת משיק לקיצון</u>
$f(x) = (x-1)(x-3)$	$f'(x) = 2x - 4$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$f(x) = x^2 - 3x - 1x + 3$	$m = 0$	$(2,-1) \quad m = 0$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$	$0 = 2x - 4$	$(y+1) = 0(x-2)$
$y = (2)^2 - 4(2) + 3$	$2x = 4$	$y = -1$
$(2,-1)$	$x = 2$	

תשובה סופית:

(א) $y = 2x - 6$ (ב) $x = 2$ (ג) $x = 2$ (ד) $y = -2x + 2$ (ה) $y = -1$

שאלה מספר 5.



- נתונה הפונקציה $y = -x^3$ (ראה ציור)
- א.** הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הפונקציה על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- x . השטח המקווקו בציור.
- ב.** נתון כי השטח המקווקו שווה ל- $-a^3$ מצא את a

פתרון:

x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = -x^3$	גדול/ימין
$x = a$	פונקציה תחתונה	$x = 0$
	$y = 0$	

$$S_T = \int_{(x \text{ שמאל})}^{(x \text{ ימין})} (פונקציה עליונה) - 1 \cdot (פונקציה תחתונה) dx$$

$$S_T = \int_a^0 (-x^3) - 1 \cdot (0) dx$$

$$S_T = \int_a^0 (-x^3) dx$$

$$-a^3 = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_a^0$$

$$-a^3 = \left[\frac{(0)^4}{4} \right] - \left[\frac{(a)^4}{4} \right]$$

$$-a^3 = [0] - \left[\frac{a^4}{4} \right]$$

$$\frac{a^4}{4} = a^3$$

$$a^4 = 4a^3$$

$$a^4 - 4a^3 = 0$$

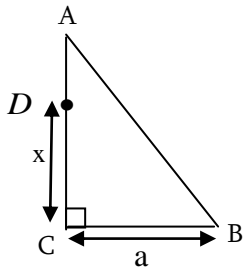
$$a^3(a - 4) = 0$$

$$a \neq 0 \quad a = 4$$

תשובה סופית:

$a = 4$ (ב) $\frac{a^4}{4}$ (א)

שאלה מספר 6.



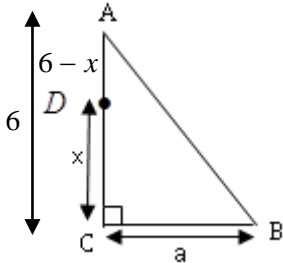
במשולש ישר זווית ABC זווית $C = 90^\circ$
 אורכי הניצבים הם: $AC = 6$, $BC = a$.
 D היא נקודה כלשהי על הניצב AC (ראה ציור)
 נסמן ב-x את מרחק הנקודה D מקדקוד C.
 א. הבע באמצעות x ו-a את סכום ריבועי המרחקים של נקודה D משלושת הקדקודים A, B, C.
 ב. מצא עבור איזה ערך של x, הסכום שהבעת בסעיף א הוא מינימלי.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** סכום ריבועי המרחקים של נקודה D משלושת הקדקודים A, B, C הוא מינימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = AD^2 + BD^2 + CD^2 \Rightarrow \max$

3. נוסחת עזר:



נגדיר את ריבוע המרחק מנקודה A $AD^2 = (6-x)^2$
 נגדיר את ריבוע המרחק מנקודה B $BD^2 = x^2 + a^2$
 נגדיר את ריבוע המרחק מנקודה C $CD^2 = x^2$

פונקציית המטרה
 $p = AD^2 + BD^2 + CD^2 \Rightarrow \max$
 $P = (6-x)^2 + x^2 + a^2 + x^2$
 $p = 36 - 12x + x^2 + a^2 + x^2$

$p = 3x^2 + 12x + 36 + a^2$

הפונקציה
 $P = 3x^2 - 12x + 36 + a^2$

נגזרת ראשונה
 $p' = 6x - 12x$
 $p' = 0$
 $x = 2$

נגזרת שנייה
Max/min
 $p'' = +2 \cup \min$

תשובה סופית:

$x = 2$ max (ב) $p = 3x^2 + 12x + 36 + a^2$ (א)