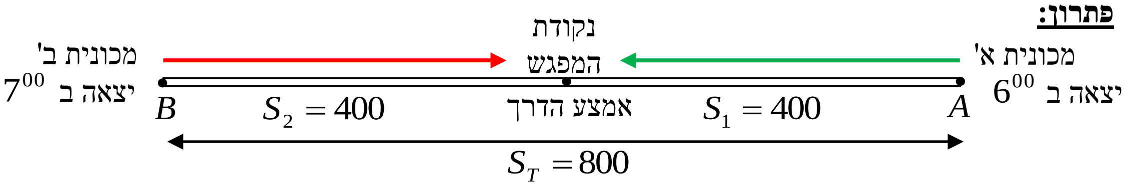
מבחן בגרות 35003 מועד ב' קיץ תשס"ה 2005

שאלה מספר 1

משני מקומות A ו– B , שהמרחק ביניהם 800 ק"מ ,
יצאו שתי מכוניות זו לקראת זו. מכונית אחת יצאה מ– A בשעה 6^{00} .
והמכונית האחרת יצאה מ– B בשעה 7^{00}.
שתי המכוניות נפגשו באמצע הדרך בין A ל– B.
מהירות המכונית שיצאה מ – A קטנה ב– 20 קמ"ש ממהירות המכונית שיצאה מ– B.
מצא את המהירות של המכונית שיצאה מ– A.

פתרון:



מכונית מנקודה B		
דרך $S = t \cdot v$	**זמן** $t = \frac{S}{V}$	**מהירות** **v**
המתנה	1	
400	$t_2 = \frac{400}{v+20}$	$v+20$

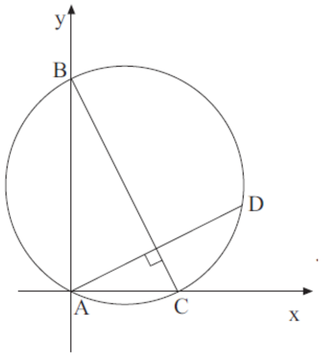
מכונית מנקודה A		
דרך $S = t \cdot v$	**זמן** $t = \frac{S}{V}$	**מהירות** **v**
400	$t_1 = \frac{400}{v}$	v

$$t_2 + 1 = t_1$$
$$\frac{400}{v+20} + 1 = \frac{400}{v} \quad /(v+20)(v)$$
$$400v + 1v(v+20) = 400(v+20)$$
$$400v + 1v^2 + 20v = 400v + 8000$$
$$1v^2 + 20v - 8000 = 0$$
$$v_{1,2} = \frac{-(20) \pm \sqrt{400 - 4(1)(-8000)}}{2(1)}$$
$$v_{1,2} = \frac{-20 \pm 180}{2}$$
$$v_1 = 80 \quad v_2 = -100$$

תשובה: מהירות המכונית 80 קמ"ש

תשובה סופית:
המהירות של המכונית שיצאה מ – A. **80 קמ"ש**

<u>שאלה מספר 2</u>



מעגל $(x-2)^2+(y-4)^2=20$

חותך את הצירים בנקודות A , B , C, כמתואר בציור.

ישר העובר דרך A ומאונך ל – BC

חותך את המעגל בנקודה נוספת D.

א. מצא את השיעורים של הנקודות A , B , C,

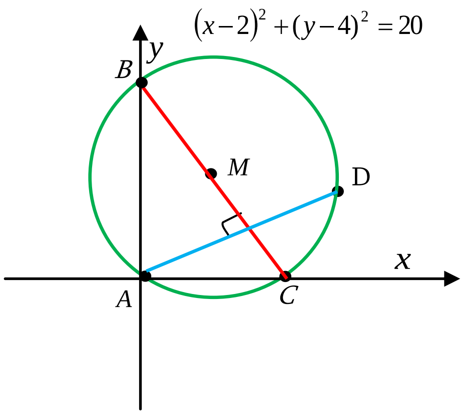
ב. מצא את המשוואה של AD.

ג. דרך נקודה D העבירו ישר המקביל ל – BC

מצא את משוואת הישר המקביל.

<u>פתרון:</u>

(א) מצא את השיעורים של הנקודות A , B , C,



נקודות AC

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

$y=0$

$(x-2)^2+(0-4)^2=20$

$(x-2)^2=20-16$

$x-2=\pm\sqrt{4}$

$x_{1,2}=\pm2+2$

$x_1=+2+2=4$

$x_2=-2+2=0$

$A(0,0)\quad C(4,0)$

נקודות AB

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

$x=0$

$(0-2)^2+(y-4)^2=20$

$(y-4)^2=20-4$

$y-4=\pm\sqrt{16}$

$y_{1,2}=\pm4+4$

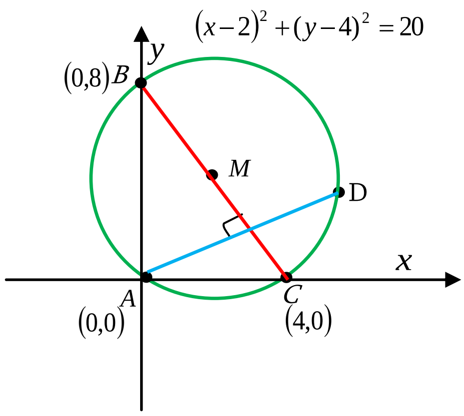
$y_1=+4+4=8$

$y_{1,2}=-4+4=0$

$A(0,0)\quad B(0,8)$

<u>תשובה:</u> $A(0,0)\quad B(0,8)\quad C(4,0)$

(ב) ישר העובר דרך A ומאונך ל – BC חותך את המעגל בנקודה נוספת D.
מצא את המשוואה של AD.



<u>שיפוע משיק</u>

$m_{BC}=-2\quad m_{AD}=\frac{1}{2}$

שיפוע הופכי נגדי

<u>משוואת AD</u>

$y-y_1=m(x-x_1)$

$(0,0)\qquad m=\frac{1}{2}$

$y-0=\frac{1}{2}(x+0)$

$y=\frac{1}{2}x$

<u>שיפוע BC</u>

$B(8,0)\quad C(4,0)$

$(x_1,y_1)\quad (x_2,y_2)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

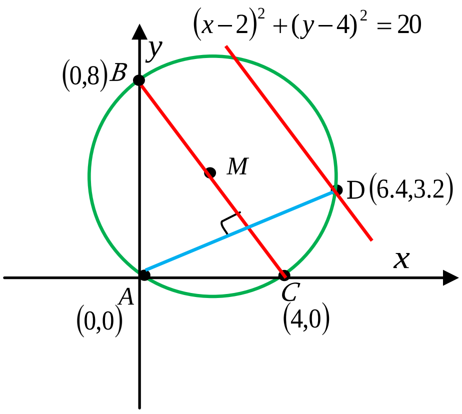
$m_{BC}=\frac{(0)-(8)}{(4)-(0)}=\frac{-8}{4}$

$m_{BC}=-2$

<u>תשובה:</u> $y_{AD}=\frac{1}{2}x$

(ג) דרך נקודה D העבירו ישר המקביל ל – BC

(ג1) מצא את נקודה D



נקודה D

$$(x-2)^2+(y-4)^2=20$$
$$y=0.5x$$
$$(x-2)^2+(0.5x-4)^2=20$$
$$x^2-4x+4+0.25x^2-4x+16-20=0$$
$$1.25x^2-8x=0$$
$$x\cdot(1.25x-8)$$
$$x_D=6.4$$

נקודה D

$$y=0.5x$$
$$x_D=6.4$$
$$y=0.5\cdot(6.4)$$
$$y=3.2$$
$$D(6.4,3.2)$$

תשובה: $D(6.4,3.2)$

(ג2) מצא את משוואת הישר המקביל.

משוואת המקביל ל BC

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$(6.4,3.2) \qquad m=-2$$
$$y-3.2=-2(x-6.4)$$
$$y=-2x+12.8+3.2$$
$$y=-2x+16$$

תשובה: $y_{\text{המקביל}}=-2x+16$

תשובה סופית:

(א) $C(4,0)$ $B(0,8)$ $A(0,0)$ **(ב)** $y_{AD}=\frac{1}{2}x$ **(ג1)** $D(6.4,3.2)$ **(ג2)** $y_{\text{המקביל}}=-2x+16$

.

שאלה מספר 3

הפונקציה $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ המוגדרת בתחום $1 \le x \le 5$

א. מצא את שיעורי הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת וקבע את סוג הקיצון.

ב. מצא את ערכי הפונקציה בקצות תחום ההגדרה שלה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הגדרתה.

פתרון:

א. מצא את שיעורי הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת וקבע את סוג הקיצון.

נגזרת שנייה
max/min
(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$f''(x)=-2 \cap \max$

נגזרת ראשונה
m=0

$f'(x)=\frac{1\cdot(-2x+6)}{2\cdot\sqrt{-x^2+6x-5}}$

$f'(x)=m=0$

$0=\frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-5}}$

$0=-2x+6$

$2x=6$

$x=3$

פונקציה
y=?

$f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

$x=3$

$f'(3)=\sqrt{-(3)^2+6(3)-5}$

$y=2$

$(3,2)$

תשובה: נקודת הקיצון: $(3,2)\cap\max$

ב. מצא את ערכי הפונקציה בקצות תחום ההגדרה שלה.

פונקציה
y=?

$f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

$x=1$

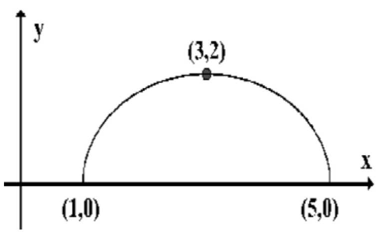
$f'(1)=\sqrt{-(1)^2+6(1)-5}=0$

$(1,0)$

$f'(5)=\sqrt{-(5)^2+6(5)-5}=0$

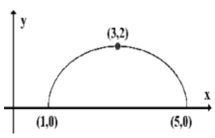
$(5,0)$

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הגדרתה.



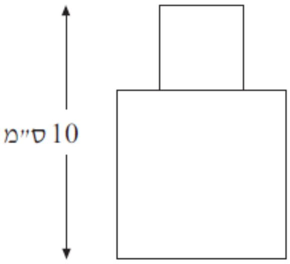
תשובה סופית:

(א) $(3,2)\max$ **(ב)** $(1,0)\ (5,0)\ y=0$ **(ג)**



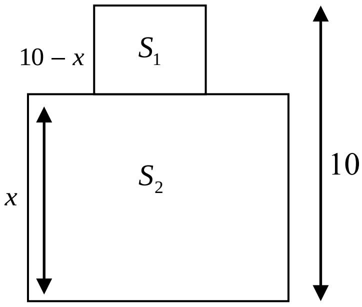
<u>שאלה מספר 4</u>

הצורה המוצגת בציור מורכבת משני ריבועים
המונחים זה על זה. גובה הצורה הוא 10 ס"מ (ראה ציור)
(א) סמן ב- x את צלע הריבוע התחתון והבע באמצעות x את
שטח הריבוע העליון ואת שטח הריבוע התחתון.
(ב) מה צריך להיות אורך הצלע של הריבוע התחתון
כדי ששטח הצורה (סכום השטחים) יהיה מינימלי ?



<u>פתרון:</u>

1. **<u>משפט המטרה:</u>** ששטח הצורה (סכום השטחים) יהיה מינימלי



2. **<u>נוסחת המטרה:</u>** $p = S_1 + S_2 \Rightarrow \min$

3. **<u>נוסחת עזר:</u>** $S_2 = (x)^2$ $\quad S_1 = (10-x)^2$

4. **<u>פונקציית המטרה</u>**

$$p = S_1 + S_2$$
$$p = (10-x)^2 + x^2$$
$$P = 100 - 20x + x^2 + x^2$$

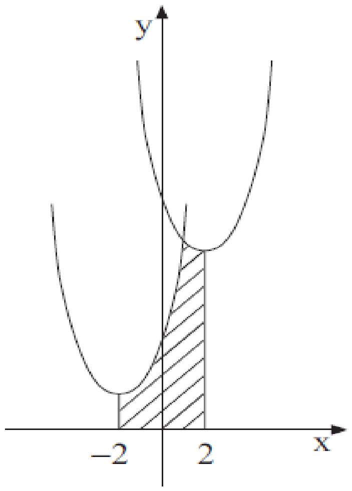
$$\boxed{P = 2x^2 - 20x + 100}$$

<u>נגזרת שנייה</u>	**<u>נגזרת ראשונה</u>**	**<u>הפונקציה</u>**
Max/min $P'' = +4 \cup \min$	$P' = 4x - 20$ $P' = 0$ $0 = 4x - 20x$ $4x = 20$ $x = 5$	$P = 2x^2 - 20x + 100$ $x = 5$ $P = 2(5)^2 - 20(5) + 100$ $P = 50$

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $S = x^2$ $\quad S = (10-x)^2$ $\qquad$ **(ב)** $x = 5 \quad \min$

שאלה מספר 5



נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$g(x)=x^2-4x+14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות , על ידי ציר ה- x
ועל ידי הישרים $x=2$ ו- $x=-2$
(השטח המקווקו בציור)

פתרון:

נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות

$$\begin{cases} y=x^2+4x+6 \\ y=x^2-4x+14 \end{cases}$$
$$y=y$$
$$x^2+4x+6=x^2-4x+14$$
$$8x=8$$
$$x=1$$

$$y=x^2+4x+6$$
$$x=1$$
$$y=(1)^2+4(1)+6=11$$
$$(1{,}11)$$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y=x^2+4x+6$	x גדול/ימין
$x=-2$	פונקציה תחתונה $y=0$	$x=1$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y=x^2-4x+14$	x גדול/ימין
$x=1$	פונקציה תחתונה $y=0$	$x=2$

$$S_1=\int_{-2}^{1}(\ x^2+4x+6\ )-(\ 0\ )dx$$
$$S_1=\int_{-2}^{1}(\ x^2+4x+6\ )dx$$
$$S_1=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}$$
$$S_1=\left[\frac{(1)^3}{3}+\frac{4(1)^2}{2}+6(1)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}+\frac{4(-2)^2}{2}+6(-2)\right]$$
$$S_1=\left[\ 8\frac{1}{3}\ \right]-\left[\ -6\frac{2}{3}\ \right]=15$$

$$S_2=\int_{1}^{2}(\ x^2-4x+14\ )-(\ 0\ )dx$$
$$S_2=\int_{1}^{2}(\ x^2-4x+14\ )dx$$
$$S_2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+14x\right]_{1}^{2}$$
$$S_2=\left[\frac{(2)^3}{3}-\frac{4(2)^2}{2}+14(2)\right]-\left[\frac{(1)^3}{3}-\frac{4(1)^2}{2}+14(1)\right]$$
$$S_2=\left[\ 22\frac{2}{3}\ \right]-\left[\ 12\frac{1}{3}\ \right]=10\frac{1}{3}$$

$$S_T=S_1-S_2$$
$$S_2=[\ 15\ ]+\left[\ 10\frac{1}{3}\ \right]=25\frac{1}{3}$$

תשובה סופית:

(א) $(1{,}11)$ **(ב)** $S=10\frac{1}{3}+15=25\frac{1}{3}$