

מבחן בגרות 35003 מועד חורף תשס"ה 2005

שאלה מספר 1

נתונה סדרה הנדסית . האיבר השלישי בסדרה הוא 18
 וסכום שני האיברים הראשונים הוא 8
 מצא את האיבר הראשון בסדרה (מצא שני פתרונות).

פתרון:

a_1	$a_1 \cdot q$	18		
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 8 \\ a_1 + a_1 \cdot q &= 8 \\ a_1(1 + q) &= 8 \\ a_1 &= \frac{8}{1 + q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ 18 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_1 &= \frac{18}{q^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ \frac{8}{1 + q} &= \frac{18}{q^2} \\ 8q^2 &= 18 + 18q \\ 8q^2 - 18q - 18 &= 0 \\ q &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4(8)(-18)}}{2 \cdot (8)} \\ q_1 &= \frac{18 + 30}{16} = \frac{48}{16} = 3 \\ q_2 &= \frac{18 - 30}{16} = \frac{-12}{16} = -0.75 \end{aligned}$$

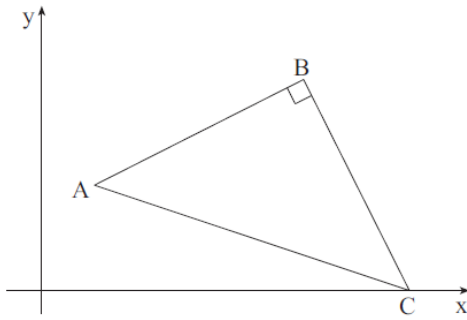
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{8}{1 + q} \\ q &= 3 \\ a_1 &= \frac{8}{1 + 3} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{8}{1 + q} \\ q &= -0.75 \\ a_1 &= \frac{8}{1 - 0.75} = 32 \end{aligned}$$

תשובה סופית:

$$a_1 = 32 \text{ או } a_1 = 2 \quad q = 0.75 \text{ או } q = 3$$

שאלה מספר 2



במשולש ישר זווית ABC (זווית B = 90°) קדקוד C נמצא על ציר ה-x (ראה ציור)

נתון A(1,2) B(5,4)

* מצא את המשוואה של BC.

(א) מצא את שיעורי הנקודה C.

(ב) מצא את משוואת המעגל שהקוטר שלו הוא AC.

(ג) האם הנקודה B נמצאת על המעגל שמצאת בסעיף ב' ? נמק.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודה C.

שיפוע AB

A(1,2) B(5,4)

$(x_1, y_1) (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{(4) - (2)}{(5) - (1)} = \frac{2}{4}$$

$$m_{AB} = \frac{1}{2}$$

שיפוע BC

$$m_{AB} = \frac{1}{2} \quad m_{BC} = -2$$

שיפוע הופכי נגדי

משוואת BC

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(5,4) m = -2

$$y - 4 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 10 + 4$$

$$y = -2x + 14$$

נקודה C

$$y = -2x + 14$$

$$y = 0$$

$$0 = -2x + 14$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

C(7,0)

תשובה: C(7,0)

(ב) מצא את משוואת המעגל שהקוטר שלו הוא AC.

מרכז המעגל

C(7,0) M(x_M, y_M) A(1,2)

x₁, y₁ x₂, y₂

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_M = \frac{(7) + (1)}{2} \quad y_M = \frac{(0) + (2)}{2}$$

$$x_M = 4 \quad y_M = 1$$

M(4,1)

משוואת המעגל

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

M(4,1)

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = R^2$$

A(1,2)

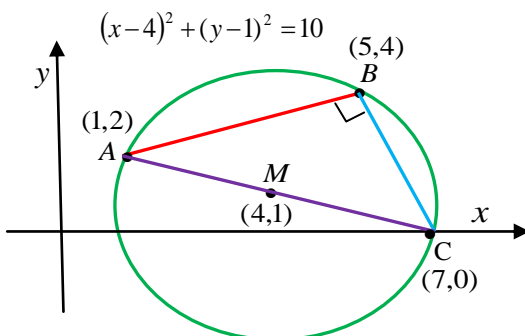
$$(1 - 4)^2 + (2 - 1)^2 = R^2$$

$$R^2 = 10$$

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

תשובה: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$

(ג) האם הנקודה B נמצאת על המעגל שמצאת בסעיף ב' ? נמק.



משוואת המעגל

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

B(5,4)

$$(5 - 4)^2 + (4 - 1)^2 = 10$$

$$10 = 10$$

תשובה: כן 10 = 10

תשובה סופית:

(א) C(7,0) (ב) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$ (ג) כן (ד) כן

שאלה מספר 3

בחנות בגדים מכרו חולצה במחיר הקטן ב- 40 שקל ממחיר הצאית. מאחר שנשארו בחנות הרבה חולצות ומעט חצאיות, שינתה החנות את המחירים. מחיר החולצה הוזל ב- 25%, ומחיר חצאית התייקר ב- 20%. לאחר שינוי המחירים שילמה רותי עבור חולצה וחצאית בסך הכול 282 שקלים מצא מה היו לפני השינוי מחיר חולצה ומחיר חצאית.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'...).

התייקר ב- 20%

$$1 + \frac{20}{100} = 1.2$$

הוזל ב- 25%

$$1 - \frac{25}{100} = 0.75$$

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר חולצה, y - מחיר חצאית

משוואה	סה"כ	חולצה		פעולה	חצאית		
		כמות	מחיר		כמות	מחיר	
$1x + 40 = 1y$		1	x	+ 40 =	1	y	לפני השינוי
$0.75x + 1.2y = 282$	282	1	0.75x	+	1	1.2y	אחרי השינוי

מצא מה היו לפני השינוי מחיר חולצה ומחיר חצאית.

$$\begin{cases} 1y - 1x = 40 \\ -1x + 1y = 40 \\ 0.75x + 1.2y = 282 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1x + 1y = 40 / 0.75 \\ 0.75x + 1.2y = 282 / 1 \\ -0.75x + 0.75y = 30 \\ 0.75x + 1.2y = 282 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1.95y &= 312 \\ y &= 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1y - 1x &= 40 \\ y &= 160 \\ 1(160) - 1x &= 40 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

תשובה: מחיר חולצה 120 שקל, מחיר חצאית 160 שקל

תשובה סופית:

מחיר חולצה 120 שקל, מחיר חצאית 160 שקל

שאלה מספר 4

נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{A} + \frac{3}{x}$ (A הוא פרמטר).

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 3$.
א. חשב את A

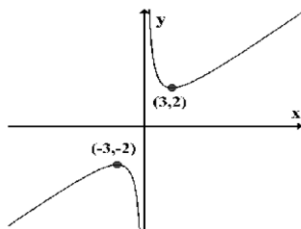
הצב $A = 3$ וענה על הסעיפים ב–ד.

- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגי הנקודות (מינימום, מקסימום)
ג. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

<p>פונקציה</p> $f(x) = \frac{x}{A} + \frac{3}{x}$	<p>נגזרת ראשונה</p> $f'(x) = \frac{1}{A} - \frac{3 \cdot 1}{x^2}$ $x = 3 \quad m = 0$ $f'(x) = m = 0$ $0 = \frac{1}{A} - \frac{3}{(3)^2}$ $\frac{1}{A} = \frac{3}{9}$ $9 = 3A / :3$ $A = 3$	<p>רמזים</p> $x = 3$ $m = 0$	<p>פתרון</p> <p>א. חשב את A</p> <p>תשובה: $A = 3$</p>
----------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגי הנקודות (מינימום, מקסימום)

<p>פונקציה</p> <p>y=?</p> $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ $f(+3) = \frac{(3)}{3} + \frac{3}{(3)} = 2$ <p>(3,2)</p> $f(-3) = \frac{(-3)}{3} + \frac{3}{(-3)} = -2$ <p>(-3,-2)</p>	<p>נגזרת ראשונה</p> <p>m=0</p> $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3 \cdot 1}{x^2}$ $f'(x) = m = 0$ $0 = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$ $\frac{3}{x^2} = \frac{1}{3}$ $x^2 = 9$ $x = \pm\sqrt{9}$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -3$	<p>נגזרת שנייה</p> <p>max/min</p> $f''(x) = + \frac{3 \cdot 2}{x^3} = + \frac{6}{x^3}$ $f''(+3) = \frac{6}{(+3)^3} = + \frac{2}{3} \cup \text{min}$ $f''(-3) = \frac{6}{(-3)^3} = - \frac{2}{3} \cap \text{max}$	<p>נקודות הקיצון:</p> <p>$(3,2) \cup \text{min}$</p> <p>$(-3,-2) \cap \text{max}$</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



ג. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.

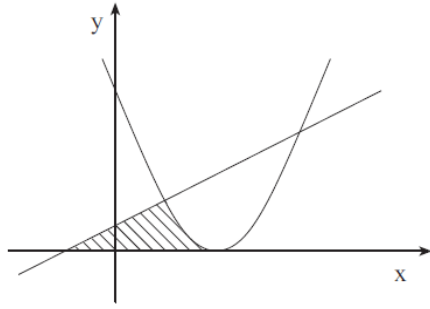
תשובה: תחום הגדרה $x \neq 0$ האסימפטוטה $x = 0$

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה סופית:

- (א) $A = 3$ (ב) $(-3,-2) \text{ max}$ (ג) $x \neq 0$ (ד)

שאלה מספר 5



נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (ראה ציור) מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה, על ידי הישר ועל ידי ציר ה- x (השטח המקוקו בציור).

פתרון:

נקודות החיתוך בין הישר לפרבולה

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= 0.5x + 0.5 \\ x^2 - 4x + 4 - 0.5x - 0.5 &= 0 \\ x^2 - 4.5x + 3.5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 4(1)(3.5)}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{4.5 \pm 2.5}{2} \\ x_1 &= 1 \quad x_2 = 3.5 \end{aligned}$$

קדקוד הפרבולה

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 4 \\ y' &= 2x - 4 \\ 0 &= 2x - 4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

חיתוך הישר עם ציר x

$$\begin{aligned} y &= 0.5x + 0.5 \\ y &= 0 \\ 0 &= 0.5x + 0.5 \\ 0.5x &= -0.5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $f(x) = 0.5x + 0.5$	x גדול/ימין
$x = -1$	פונקציה תחתונה $y = 0$	$x = 1$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y = x^2 - 4x + 4$	x גדול/ימין
$x = 1$	פונקציה תחתונה $y = 0$	$x = 2$

$$S_2 = \int_{-1}^1 (0.5x + 0.5) - (0) dx$$

$$S_2 = \int_{-1}^1 (x + 5) dx$$

$$S_2 = \left[\frac{0.5x^2}{2} + 0.5x \right]_{-1}^1$$

$$S_2 = \left[\frac{0.5(1)^2}{2} + 0.5(1) \right] - \left[\frac{0.5(-1)^2}{2} + 0.5(-1) \right]$$

$$S_2 = [0.75] - [-0.25]$$

$$S_2 = [1]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = [1] + \left[\frac{1}{3} \right] = 1\frac{1}{3}$$

$$S_1 = \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) - (0) dx$$

$$S_1 = \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$$

$$S_1 = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_1^2$$

$$S_1 = \left[\frac{(2)^3}{3} - \frac{4(2)^2}{2} + 4(2) \right] - \left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{4(1)^2}{2} + 4(1) \right]$$

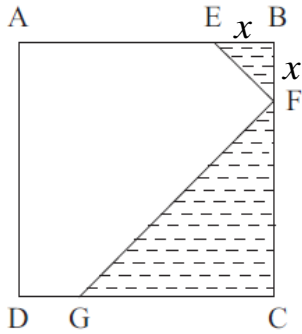
$$S_1 = \left[2\frac{2}{3} \right] - \left[2\frac{1}{3} \right]$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{3} \right]$$

תשובה סופית:

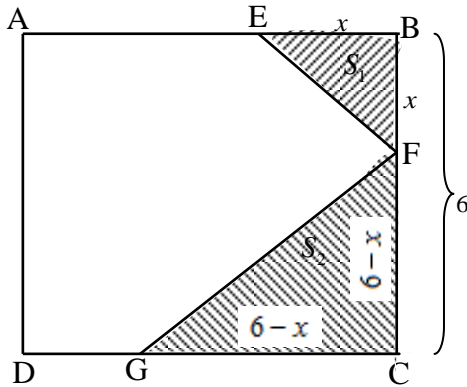
$$S = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

שאלה מספר 6



בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך ש- $BE = BF = 1 - CF = CG$ (ראה ציור) נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.
(א) סמן ב- x את BF ואת BE והבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG (השטח המקווקו)
(ב) **(1)** מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.
(2) חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

פתרון:



1. משפט המטרה: סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי

2. נוסחת המטרה: $p = S_1 + S_2 \Rightarrow \min$

3. נוסחת עזר: שטח משולש ABF שטח משולש GCF

$$S = \frac{(6-x)(6-x)}{2} \quad S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S = \frac{36 - 6x - 6x + x^2}{2} \quad S = \frac{x \cdot x}{2}$$

$$S_{GCF} = \frac{36 - 12x + x^2}{2} \quad S_{ABF} = \frac{x^2}{2}$$

פונקציית המטרה

$$p = \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{36 - 12x + x^2}{2}\right)$$

$$p = \frac{x^2 + 36 - 12x + x^2}{2}$$

$$p = \frac{2x^2 - 12x + 36}{2}$$

$$p = \frac{2x^2}{2} - \frac{12x}{2} + \frac{36}{2}$$

$P = x^2 - 6x + 18$

הפונקציה

$$P = x^2 - 6x + 18$$

$$x = 3$$

$$P = (3)^2 - 6(3) + 18$$

$$P = 9$$

נגזרת ראשונה

$$P' = 2x - 6$$

$$P' = 0$$

$$0 = 2x - 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$P''(x) = +2 \cup \min$$

תשובה סופית:

(א) $p = x^2 - 6x + 18$ **(ב)** $x = 3$ **(ג)** $S = 9$ **(ד)** \min