

מבחן בגרות 35003 מועד נובמבר תשס"ה 2005

שאלה מספר 1.

בקיץ קנה יואב מספר מסוים של מחברות, ושילם עבורן 75 שקלים. בחורף הוא קיבל הנחה של 20% למחברת, וקנה 6 מחברות יותר ממספר המחברות שקנה בקיץ. עבור המחברות שקנה בחורף שילם יואב 72 שקלים. כמה מחברות קנה יואב בקיץ?

פתרון

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'...).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר מחברת y - כמות המחברות

הנחה ב - 20%

$$1 - \frac{20}{100} = 0.8$$

משוואה	מחברות			
	סה"כ	כמות	מחיר	
$x \cdot y = 75$	75	y	x	מחיר בקיץ
$0.8x \cdot (y + 6) = 72$	72	y + 6	0.8x	מחיר בחורף

$$\begin{array}{lll}
 x \cdot y = 75 & 0.8x \cdot (y + 6) = 72 & y = \frac{75}{x} \\
 y = \frac{75}{x} & 0.8xy + 4.8x = 72 & x = 2.5 \\
 & 0.8 \cdot 75 \cdot + 4.8x = 72 & y = \frac{75}{2.5} = 30 \\
 & 60 + 4.8x = 72 & \\
 & 4.8x = 12 & \\
 & x = 2.5 &
 \end{array}$$

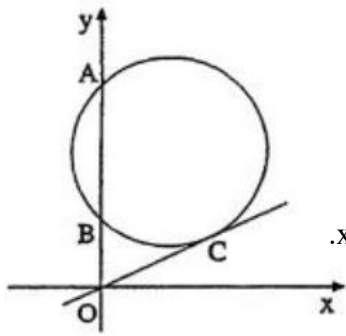
כמה מחברות קנה יואב בקיץ?

תשובה: יואב קנה 30 מחברות ב - 2.5 שקל

תשובה סופית:

יואב קנה 30 מחברות ב - 2.5 שקל

שאלה מספר 2.



נתון המעגל $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

המעגל חותך את ציר ה- y בשתי הנקודות A ו-B (ראה ציור)

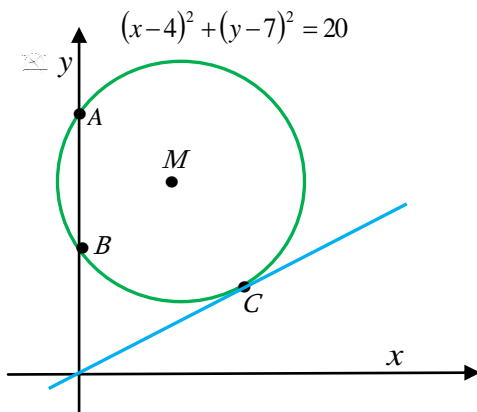
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. הישר $y = \frac{1}{2}x$ משיק למעגל הנתון בנקודה C.

ג. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה C ומקביל לציר ה-x.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



נקודות AB

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$$

$$x = 0$$

$$(0-4)^2 + (y-7)^2 = 20$$

$$(y-7)^2 = 20 - 16$$

$$y-7 = \pm\sqrt{4}$$

$$y_{1,2} = \pm 2 + 7$$

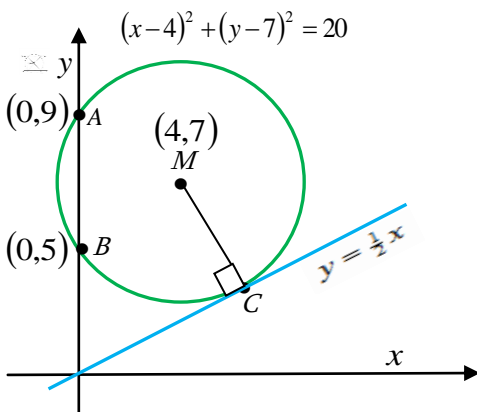
$$y_{1,2} = -2 + 7 = 5$$

$$y_{1,2} = +2 + 7 = 9$$

תשובה: A(0,9) B(0,5)

(ב) הישר $y = \frac{1}{2}x$ משיק למעגל הנתון בנקודה C.

מצא את השיעורים של נקודה ההשקה C



שיפוע CM

$$m_{\text{משיק}} = \frac{1}{2} \quad m_{CM} = -2$$

שיפוע הופכי נגדי

משוואת המעגל

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$$

$$M(4,7) \quad R = \sqrt{20}$$

משוואת MC

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(4,7) \quad m = -2$$

$$y - 7 = -2(x - 4)$$

$$y = -2x + 8 + 7$$

$$y = -2x + 15$$

נקודה C

$$y_{CM} = y_{\text{משיק}}$$

$$-2x + 15 = \frac{1}{2}x$$

$$15 = 2x + \frac{1}{2}x$$

$$15 = 2\frac{1}{2}x$$

$$x = 6$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$x = 6$$

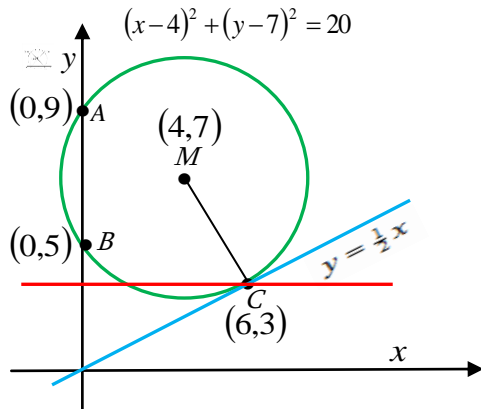
$$y = \frac{1}{2}(6)$$

$$y = 3$$

$$C(6,3)$$

תשובה: C(6,3)

(ג) מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה C ומקביל לציר ה-x.



משוואת ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(6,3) \quad m = 0$$

$$y - 3 = 0(x - 6)$$

$$y = 3$$

תשובה: $y = 3$

תשובה סופית:

(א) B(0,5) A(0,9) (ב) C(6,3) (ג) $y = 3$

שאלה מספר 3.

נתונה הפונקציה $y = \frac{x-1}{3} + \frac{3}{x}$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

(א.) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: תחום הגדרה = $x \neq 0$ האסימפטוטה $x = 0$

(ב.) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

פונקציה

y=?

$$f(x) = \frac{x-1}{3} + \frac{3}{x}$$

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{x}$$

$$f(3) = \frac{(3)}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{(3)} = 1\frac{2}{3}$$

$$(3, 1\frac{2}{3})$$

$$f(-3) = \frac{(-3)}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{(-3)} = -2\frac{1}{3}$$

$$(-3, -2\frac{1}{3})$$

נגזרת ראשונה

m=0

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3 \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

נגזרת שנייה

max/min

$$f''(x) = +\frac{3 \cdot 2}{x^3} = \frac{6}{x^3}$$

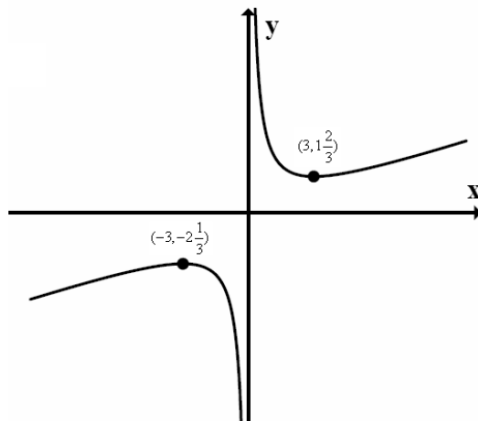
$$f''(-3) = \frac{6}{(-3)^3} = -\frac{2}{9} \cap \text{max}$$

$$f''(+3) = \frac{6}{(+3)^3} = +\frac{2}{9} \cup \text{min}$$

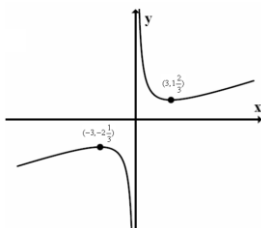
נקודות הקיצון:

$$(-3, -2\frac{1}{3}) \cap \text{max}$$

$$(3, 1\frac{2}{3}) \cup \text{min}$$



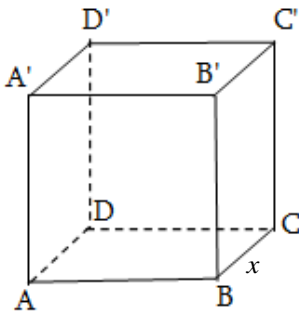
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



תשובה סופית:

(א) $x \neq 0$ (ב) $(-3, -2\frac{1}{3}) \text{ max}$ (ג) $(3, 1\frac{2}{3}) \text{ min}$

שאלה מספר 4 .



רוצים לבנות תיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה ריבוע (ראה ציור) סכום האורכים של גובה התיבה ושל צלע הבסיס (BB' + BC) הוא 15 ס"מ.
 (א) הבע באמצעות x את גובה התיבה BB'
 (ב) מה צריך להיות האורך של צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?
 (ג) חשב את הנפח המקסימלי

פתרון:

1. **משפט המטרה:** שנפח התיבה יהיה מקסימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = x \cdot x \cdot BB' \Rightarrow \max$

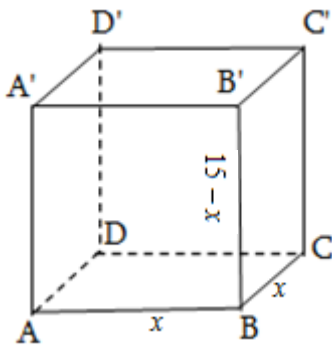
3. **נוסחת עזר:** $x + BB' = 15$

$$BB' = 15 - x$$

4. **פונקציית המטרה** $p = x \cdot x \cdot (15 - x)$

$$p = x^2 \cdot (15 - x)$$

$$p = 15x^2 - x^3$$



הפונקציה

$$P = 15x^2 - x^3$$

$$x = 10$$

$$P = 15(10)^2 - (10)^3$$

$$P = 500$$

נגזרת ראשונה

$$P' = 30x - 3x^2$$

$$P' = 0$$

$$0 = 30x - 3x^2$$

$$0 = x \cdot (30 - 3x)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 10$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$P''(x) = 30 - 6(x)$$

$$P''(0) = 30 - 6(0) = +30 \cup \min$$

$$P''(10) = 30 - 6(10) = -30 \cap \max$$

ריכוז התשובות

$$x = 10 \quad \max$$

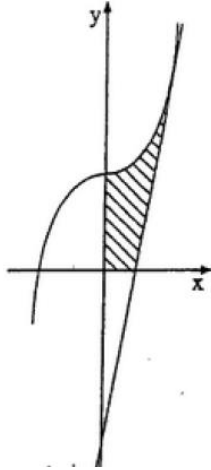
$$y = 15 - 10 = 5$$

$$p = 500$$

תשובה סופית:

(א) $BB' = 15 - x$ (ב) $\max x = 10$ (ג) $P = 500$

שאלה מספר 5.



נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 4$
 מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 2$
 (ראה ציור)
 א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $f(x)$,
 על ידי המשיק ועל ידי הצירים
 (השטח המקווקו בציור).

פתרון:

- א. (1) מצא את משוואת המשיק.
 (2) מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

חיתוך המשיק עם צי ה- x

$$\begin{aligned} y &= 12x - 12 \\ y &= 0 \\ 0 &= 12x - 12 \\ 12x &= 12 \quad x = 1 \\ (1, 0) \end{aligned}$$

נקודה A

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 4 \\ x &= 2 \\ y &= (2)^3 + 4 = 12 \\ A(2, 12) \end{aligned}$$

משיק לנקודה A

$$\begin{aligned} f'(x) &= m = 3x^2 \\ m &= 3(2)^2 = 12 \\ y - y_1 &= m \cdot (x - x_1) \\ (2, 12) \quad m &= 12 \\ y - 12 &= 12(x - 2) \\ y &= 12x - 24 + 12 \\ y &= 12x - 12 \end{aligned}$$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y = x^3 + 4$	x גדול/ימין
$x = 0$	פונקציה תחתונה $y = 0$	$x = 1$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y = x^3 + 4$	x גדול/ימין
$x = 1$	פונקציה תחתונה $f(x) = 12x - 12$	$x = 2$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 + 4) - (0) dx$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 + 4) dx$$

$$S_1 = \left[\frac{x^4}{4} + 4x \right]_0^1$$

$$S_1 = \left[\frac{(1)^4}{4} + 4(1) \right] - \left[\frac{(0)^4}{4} + 4(0) \right]$$

$$S_1 = \left[4\frac{1}{4} \right] - [0]$$

$$S_1 = 4\frac{1}{4}$$

$$S_T = S_1 - S_2$$

$$S_T = \left[4\frac{1}{4} \right] + \left[1\frac{3}{4} \right] = 6$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 + 4) - (12x - 12) dx$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 + 4 - 12x + 12) dx$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 12x + 16) dx$$

$$S_2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{12x^2}{2} + 16x \right]_1^2$$

$$S_2 = \left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{12(2)^2}{2} + 16(2) \right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{12(1)^2}{2} + 16(1) \right]$$

$$S_2 = [12] - \left[10\frac{1}{4} \right] = 12$$

$$S_2 = 1\frac{3}{4}$$

תשובה סופית:

$$S_T = \left[4\frac{1}{4} \right] + \left[1\frac{3}{4} \right] = 6 \quad \text{(ב)} \quad y = 12x - 12 \quad \text{(א)}$$