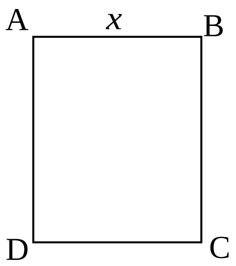
מבחן בגרות 35003 מועד חורף תשס"ו 2006

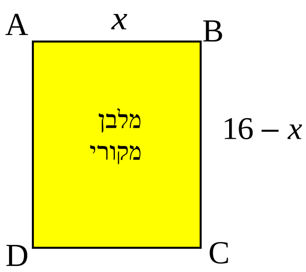
שאלה מספר 1

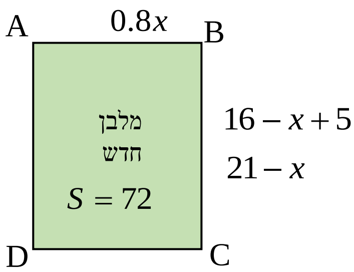


במלבן ABCD (ראה ציור)
סכום האורכים של שתי צלעות סמוכות הוא
$AB+BC=$ 16 ס"מ
הגדילו את אורך הצלע BC ב– 5 ס"מ.
והקטינו את אורך הצלע AB ב– 20%
וכך קיבלו מלבן חדש, ששטחו 72 סמ"ר.
חשב את אורך הצלע AB (מצא את שתי התשובות).

פתרון:

(א) נסמן ב – x את אורך AB ואת הנתונים הנוספים על המלבן החדש:





$$AB+BC=16$$
$$x+BC=16$$
$$BC=16-x$$

$$1-\frac{20\%}{100\%}=0.8$$

(ב). נבטא בעזרת x את שטח המלבן החדש ונמצא את x :

שטח המלבן החדש

$$S=a\cdot b$$
$$72=(0.8x)\cdot(21-x)$$
$$72=16.8x-0.8x^2$$
$$0.8x^2-16.8x+72=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-16.8)\pm\sqrt{282.24-4\cdot 0.8\cdot 72}}{2\cdot 0.8}$$
$$x_{1,2}=\frac{16.8\pm 7.2}{1.6}$$
$$x_1=15$$
$$x_2=6$$

הערה : שתי התשובות מתקבלות

תשובה סופית:
15 ס"מ 6 ס"מ

שאלה מספר 2

נתון המעגל $(x+K)^2+(y-3)^2=25$, **K הוא פרמטר.**

המעגל עובר דרך ראשית הצירים.

א. מצא את ערך הפרמטר K (מצא את שתי התשובות)

ב. רשום את השיעורים של מרכזי שני המעגלים המתאימים לשני הערכים של K שמצאת בסעיף א, וחשב את המרחק שבין שני המרכזים.

ג. דרך שני המרכזים שאת שיעוריהם רשמת , מעבירים מעגל חדש שקוטרו הוא הקטע שאת אורכו מצאת בסעיף ב. מצא את משוואת המעגל החדש (תוכל להיעזר בסרטוט המעגל החדש)

ד. המעגל החדש חותך את ציר ה– y בנקודות A ו– B . חשב את אורך הקטע AB

פתרון:

א. מצא את ערך הפרמטר K (מצא את שתי התשובות)

פרמטר k

$(x+k)^2+(y-3)^2=25$

$(0,0)$

$(0+k)^2+(0-3)^2=25$

$k^2+9=25$

$k^2=16$

$k=\pm\sqrt{16}$

$k=\pm 4$

$k_1=+4$

$k_2=-4$

פרמטר k

$(x+4)^2+(y-3)^2=25$

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$

ב. רשום את השיעורים של מרכזי שני המעגלים המתאימים לשני הערכים של K שמצאת בסעיף א, וחשב את המרחק שבין שני המרכזים.

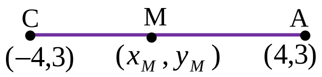
המרחק בין המרכזים

$(-4,3)$ $(4,3)$

$d=8$

ג. דרך שני המרכזים שאת שיעוריהם רשמת , מעבירים מעגל חדש שקוטרו הוא הקטע שאת אורכו מצאת בסעיף ב. מצא את משוואת המעגל החדש (תוכל להיעזר בסרטוט המעגל החדש)

מרכז המעגל



$(-4,3)$ (x_M,y_M) $(4,3)$

x_1,y_1 x_2,y_2

$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$ $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$

$x_M=\frac{(-4)+(4)}{2}$ $y_M=\frac{(3)+(3)}{2}$

$x_M=0$ $y_M=3$

$M(0.3)$

משוואת המעגל

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$M(0,3)$

$(x-0)^2+(y-3)^2=R^2$

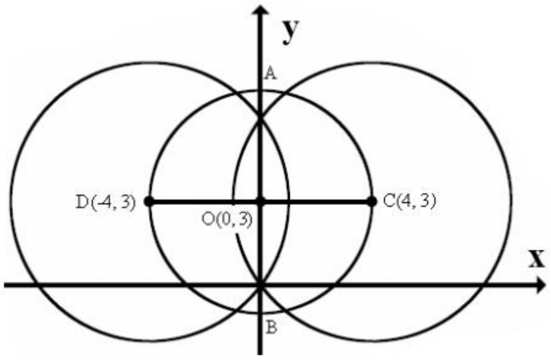
$A\ (4,3)$

$(3-0)^2+(4-0)^2=R^2$

$R^2=16$

$(x)^2+(y-3)^2=16$

תשובה: $(x)^2+(y-3)^2=16$



ד. המעגל החדש חותך את ציר ה– y בנקודות A ו– B . חשב את אורך הקטע AB

$$(x)^2+(y-3)^2=16$$
$$x=0$$
$$(0)^2+(y-3)^2=16$$
$$(y-3)^2=16$$
$$y-3=\pm\sqrt{16}$$
$$y=\pm4+3$$
$$y_1=7$$
$$y_2=-1$$

<u>תשובה:</u> $AB=8$

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $K=\pm4$ **(ב)** $d=8$ $(-4,3)$ $(4,3)$ **(ג)** $x^2+(y-3)^2=16$ **(ד)** $AB=8$

שאלה מספר 3.

נתונה הפונקציה $f(x)=2\sqrt{x}-x$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת, וקבע את סוגה (מינימום או מקסימום)

ג. הראה כי הפונקציה עוברת דרך הנקודות $(4,0)$ $(0,0)$

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. רשום את התחום שבו הפונקציה שלילית.

פתרון:

(א). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: תחום ההגדרה : לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד $x \ge 0$.

(ב). מצא את הנקודה שבה נגזרת הפונקציה מתאפסת, וקבע את סוגה (מינימום או מקסימום)

נגזרת שנייה
max/min

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-1/\sqrt{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$$f''(x)=-\frac{1\cdot}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(1)=-\frac{1}{2\sqrt{(1)}}=-\frac{1}{2}\cap \max$$

נגזרת ראשונה
m=0

$$f'(x)=\frac{2\cdot 1}{2\cdot\sqrt{x}}-1$$

$$f'(x)=m=0$$

$$0=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$$

$$1=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x}=1 \quad /(\ )^2$$

$$(\sqrt{x})^2=(1)^2$$

$$x=1$$

פונקציה
y=?

$$f(x)=2\sqrt{x}-x$$

$$x=1$$

$$f'(1)=2\sqrt{(1)}-(1)$$

$$(1,1)$$

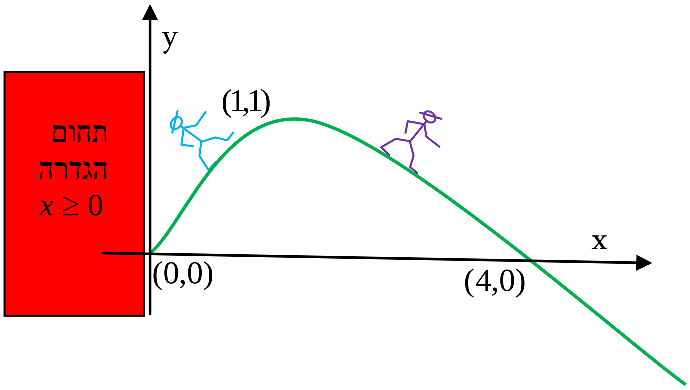
נקודות הקיצון:
$(1,1)\cap \max$

ג. הראה כי הפונקציה עוברת דרך הנקודות $(4,0)$ $(0,0)$

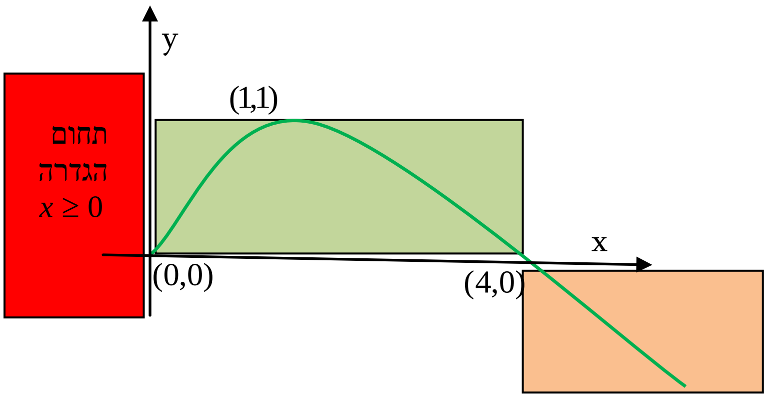
$$f(x)=2\sqrt{x}-x$$
$$(4,0)$$
$$0=2\sqrt{(4)}-(4)$$
$$0=0$$

$$f(x)=2\sqrt{x}-x$$
$$(0,0)$$
$$0=2\sqrt{(0)}-(0)$$
$$0=0$$

(ד). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה .



ה. רשום את התחום שבו הפונקציה שלילית.

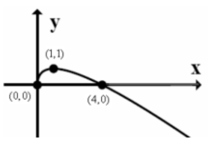


x	תחום הגדרה	x	חיובי	x	שלילי	x
$-\infty$		0	$\le x <$	4	$< x <$	$+\infty$

<u>תשובה:</u> תחום שלילי: $4 < x < +\infty$

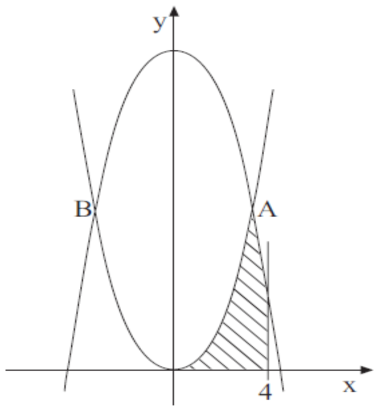
<u>תשובה סופית:</u>

(א) $x \ge 0$ **(ב)** $(1,1)\ \max$ **(ג)** הוכחה   **(ד)**



(ה) תחום שלילי: $4 < x < +\infty$

שאלה מספר4.



נתונות הפונקציות

$$f(x)=x^2$$

$$g(x)=-x^2+18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו B. (ראה ציור)

א. מצא את שיעורי ה– x של הנקודות A ו – B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות , על ידי ציר ה – x ועל ידי הישר $x=4$ (השטח המקווקו בציור)

פתרון:

נקודות AB

$f(x)=g(x)$

$-x^2+18=x^2$

$18=2x^2$

$x^2=9$

$x=\pm\sqrt{9}$

$x_A=+3 \quad x_B=-3$

תשובה: $x_A=+3 \quad x_B=-3$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה $y=x^2$	x קטן/שמאל
$x=3$	פונקציה תחתונה $y=0$	$x=0$

$S_2=\int_0^3 (\ x^2\ )-(\ 0\ )dx$

$S_2=\int_0^3 (\ x^2\ )dx$

$S_2=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$

$S_2=\left[\frac{(3)^3}{3}\right]-\left[\frac{(0)^3}{3}\right]$

$S_2=[\ 9\ ]-[\ 0\ ]$

$S_2=[\ 9\ ]$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה $y=-x^2+18$	x קטן/שמאל
$x=4$	פונקציה תחתונה $y=0$	$x=3$

$S_1=\int_3^4 (\ -x^2+18\ )-(\ 0\ )dx$

$S_1=\int_3^4 (\ -x^2+18\ )dx$

$S_1=\left[-\frac{1x^3}{3}+18x\right]_3^4$

$S_1=\left[-\frac{(4)^3}{3}+18(4)\right]-\left[-\frac{(3)^3}{3}+18(3)\right]$

$S_1=\left[\ 50\frac{2}{3}\ \right]-[\ 45\ ]$

$S_1=\left[\ 5\frac{2}{3}\ \right]$

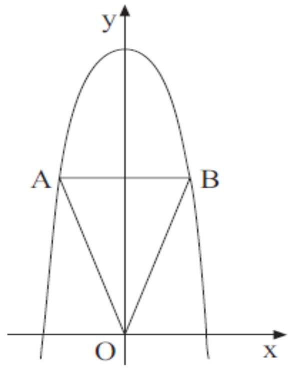
$S_T=S_1+S_2$

$S_T\left[\ 5\frac{2}{3}\ \right]+[\ 9\ ]=14\frac{2}{3}$

תשובה סופית:

(א) $x_b=-3 \quad x_a=3$ **(ב)** $S=5\frac{2}{3}+9=14\frac{2}{3}$

שאלה מספר5.

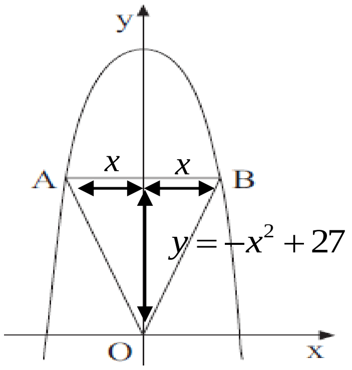


נתונה הפרבולה $y=-x^2+27$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפרבולה
בנקודות A ו– B (ראה ציור).

א. סמן ב– x את שיעור ה– x של הנקודה B (הנמצאת ברביע הראשון),
ובטא באמצעות x את אורך הקטע AB
ואת שטח המשולש AOB . (O היא ראשית הצירים)

ב. מה צריך להיות שיעור ה– x של נקודה B,
כדי ששטח משולש AOB יהיה מקסימלי ?

פתרון:



1. **משפט המטרה:** שטח משולש AOB יהיה מקסימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{2x\cdot y}{2}\Rightarrow \max$

3. **נוסחת עזר:** $y=-x^2+27$

4. **פונקציית המטרה**

$$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{2x\cdot y}{2}$$

$$p=\frac{(2x)\cdot(-x^2+27)}{2}$$

$$p=\frac{-2x^3+54x}{2}=\frac{-2x^3}{2}+\frac{54x}{2}$$

$$\boxed{p=-x^3+27x}$$

נגזרת שנייה

Max/min

$p''(x)=-6x$

$p''(+3)=-6(+3)=-18 \cap \max$

$p''(-3)=-6(-3)=+18 \cup \min$

נגזרת ראשונה

$p'=-3x^2+27$

$p'=0$

$0=-3x^2+27$

$3x^2=27$

$x^2=9 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{9}$

$x_1=3 \quad x_2=-3$

הפונקציה

$p=-x^3+27x$

$x=3$

$p=-(3)^3+27(3)$

$p=54$

נקודה B

$y=-x^2+27$

$y=-(3)^2+27=18$

$B\ (3,18)$

ריכוז התשובות

$x=3 \quad \max$

$y_B=18$

$p=54$

תשובה סופית :

(א) $AB=2x \quad S=-x^3+27x$ **(ב).** $x=3 \ \max$ $\quad S_{\Delta AOB}=54 \ \max$