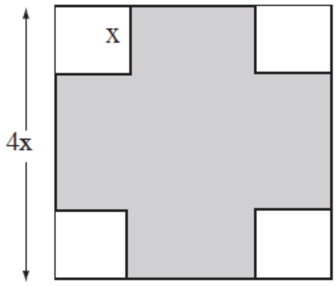
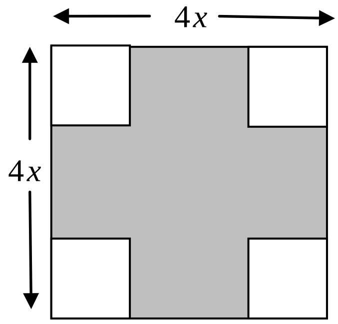
מבחן בגרות 35003 מועד א קיץ תשס"ז 2007

שאלה מספר 1



לגינת נוי צורת ריבוע שאורך צלעו 4x
בכל אחת מארבע פינות הגינה יש חלקת פרחים.
כל חלקה היא בצורת ריבוע קטן , שאורך צלעו הוא רבע מצלע הגינה (ראה ציור)
בשטח הנותר של הגינה (השטח האפור בציור) יש דשא.
א. הבע באמצעות x את השטח של הדשא.
ב. על פי תכנון חדש של גינת הנוי, האורך של צלע הגינה יוגדל ב– 25% ואורך הצלע של כל אחת מחלקות הפרחים לא ישונה.
הבע באמצעות x את השטח של הדשא על פי התכנון החדש.
ג. בתכנון החדש , השטח של הדשא גדול ב– 36 מ"ר משטח הדשא שהבעת בסעיף א' חשב את x.



פתרון:

א. הבע באמצעות x את השטח של הדשא. (השטח האפור בציור)

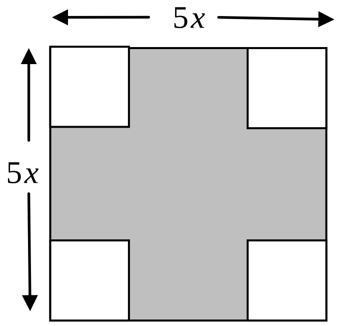
השטח הכולל הוא: $S = 4x \cdot 4x = 16x^2$

שטח ריבוע אחד: $S = x \cdot x = x^2$

שטח הדשא הוא: $S_1 = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2$

תשובה: $S_1 = 12x^2$

ב. על פי תכנון חדש של גינת הנוי, האורך של צלע הגינה יוגדל ב– 25% ואורך הצלע של כל אחת מחלקות הפרחים לא ישונה. הבע באמצעות x את השטח של הדשא על פי התכנון החדש.



$$1 + \frac{25\%}{100\%} = 1.25$$

אורך הצלע לאחר ההגדלה: $a = 1.25 \cdot 4x = 5x$

השטח הכולל הוא: $S = 5x \cdot 5x = 25x^2$

שטח ריבוע אחד: $S = x \cdot x = x^2$

שטח הדשא הוא: $S_2 = 25x^2 - 4x^2 = 21x^2$

תשובה: $S_2 = 21x^2$

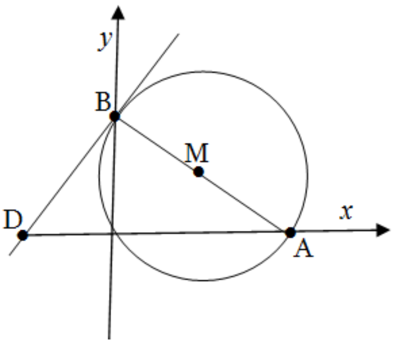
ג. בתכנון החדש , השטח של הדשא גדול ב– 36 מ"ר משטח הדשא שהבעת בסעיף א' חשב את x.

$$S_2 - S_1 = 36$$
$$21x^2 - 12x^2 = 36$$
$$9x^2 = 36$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$

תשובה סופית:

(א) שטח הדשא = $12x^2$ **(ב)** שטח הדשא החדש = $21x^2$ **(ג)** $x = 2$

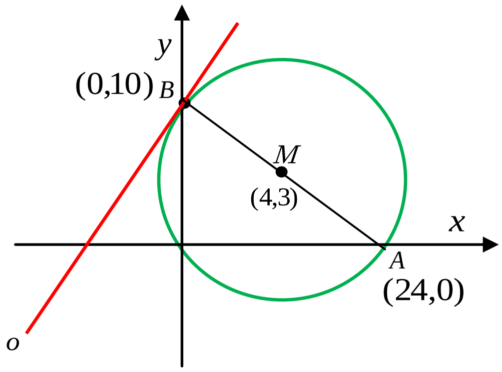
שאלה מספר 2



הישר $5x+12y=120$ חותך את ציר ה– x בנקודה A.
ואת ציר ה – y בנקודה B.
א. מצא את השיעורים של הנקודה A ואת השיעורים של נקודה B.
ב. מצא את משוואת המעגל שהקטע AB הוא קוטר שלו.
ג. העבירו ישר המשיק בנקודה B למעגל שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
המשיק חותך את ציר ה – x בנקודה D.
(1) מצא את שיעורי הנקודה D.
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
(2) חשב את שטח המשולש ABD
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית..

פתרון:

א. מצא את השיעורים של הנקודה A ואת השיעורים של נקודה B



נקודה B	**נקודה A**
$5x+12y=120$	$5x+12y=120$
$x=0$	$y=0$
$5(0)+12y=120$	$5x+12(0)=120$
$12y=120$	$5x=120$
$y=10$	$x=24$
$B\ (0{,}10)$	$A\ (24{,}0)$

ב. מצא את משוואת המעגל שהקטע AB הוא קוטר שלו.

משוואת המעגל

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$M(12{,}5)$

$(x-12)^2+(y-5)^2=R^2$

$A\ (0{,}10)$

$(0-12)^2+(10-5)^2=R^2$

$R^2=169$

$(x-12)^2+(y-5)^2=169$

נקודה A

A M B

(0,10) (24,0)

$x_1, y_1 \quad x_M, y_M \quad x_2, y_2$

$x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2} \qquad y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$x_M=\dfrac{0+24}{2} \qquad y_M=\dfrac{10+0}{2}$

$x_M=12 \qquad y_M=5$

$M(12.5)$

תשובה: $(x-12)^2+(y-5)^2=169$

ג. העבירו ישר המשיק בנקודה B למעגל שאת משוואתו מצאת בסעיף ב.
המשיק חותך את ציר ה – x בנקודה D.
(1) מצא את שיעורי הנקודה D.

משוואת BD

$y-y_1=m(x-x_1)$

$(0,10)\qquad m=2.4$

$y-10=2.4(x-0)$

$y=2.4x+10$

שיפוע המשיק

$m_{AB}=-\frac{5}{15}\qquad m_{\text{המשיק}}=\frac{12}{5}=2.4$

שיפוע הופכי נגדי

השיפוע

$5x+12y=120$

$12y=-5x+120$

$y=-\frac{5}{12}y+10$

$m=-\frac{5}{12}$

נקודה D

$y=2.4x+10$

$y=0$

$0=2.4x+10$

$-2.4x=10$

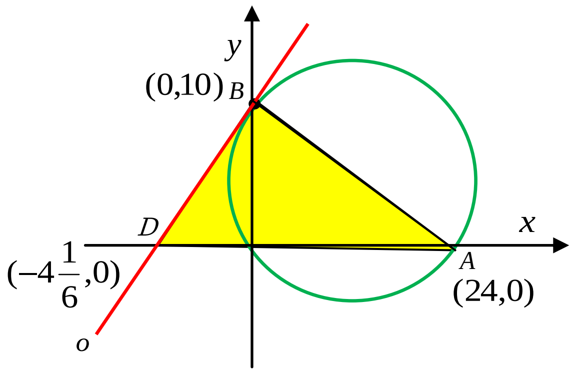
$x=-\frac{10}{2.4}$

$x=-4\frac{1}{6}$

$D\ (-4\frac{1}{6},0)$

תשובה: $D\ (-4\frac{1}{6},0)$

(2) חשב את שטח המשולש ABD
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית..



שטח המשולש ABD

$S=\frac{a\cdot h_a}{2}$

$S=\frac{28\frac{1}{6}\cdot 10}{2}$

$S=140\frac{5}{6}$

תשובה: $S=140\frac{5}{6}$

תשובה סופית:

(א) $A(24,0)\ \ B(0,10)$ **(ב)** $(x-12)^2+(y-5)^2=169$

(ג1) $D\ (-4\frac{1}{6},0)$ **(ג2)** $S=140\frac{5}{6}$

שאלה מספר 3

נתונה הפונקציה $f(x)=5-x-\frac{4}{x}$

(א). מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
(ב). רשום את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה – x.
(ג). מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה – x.
(ד). מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגן.
(ה) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון:

(א). מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?

תשובה: תחום ההגדרה הוא : $x \neq 0$

(ב). רשום את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה – x.

תשובה: האסימפטוטה : $x=0$

(ג). מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה – x.

חיתוך עם ציר ה – x.

y=0

$$f(x)=5-x-\frac{4}{x}$$

$$y=0$$

$$0=5-x-\frac{4}{x} \quad / \, x$$

$$0=5x-x^2-4$$

$$0=-x^2+5x-4$$

$$x_{1,2}=\frac{-(5)\pm\sqrt{25-4(-1)(-4)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{-2}$$

(4,0) (1,0)

תשובה: (4,0) (1,0)

(ד). מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגן.

$f(x)=\frac{a}{b\cdot x^n}$

$f'(x)=-\frac{a\cdot n}{b\cdot x^{n+1}}$

פונקציה

y=?

$f(x)=5-x-\frac{4}{x}$

$f(2)=5-(2)-\frac{4}{(2)}=1$

$(2,1)$

$f(-2)=5-(-2)-\frac{4}{(-2)}=9$

$(-2,9)$

נגזרת ראשונה

$f'(x)=-1+\frac{4\cdot 1}{x^2}$

$f'(x)=m=0$

$0=-1+\frac{4}{x^2}$

$1=\frac{4}{x^2}$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=+2 \quad x_2=-2$

נגזרת שנייה

max/min

$f''(x)=-\frac{4\cdot 2}{x^3}=-\frac{8}{x^3}$

$f''(-2)=-\frac{8}{(-2)^3}=+1\cup \min$

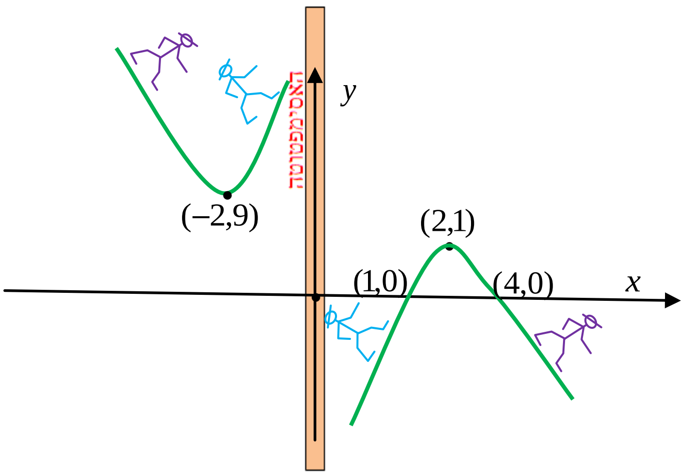
$f''(+2)=-\frac{8}{(+2)^3}=-1\cap \max$

נקודות הקיצון:

$(-2,9)\cup \min$

$(2,1)\cap \max$

$x\neq 0$



(ה) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

x	יורדת	x	עולה	x	עולה	x	יורדת	x
$-\infty$	$<x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x<$	$+\infty$

תשובה: **תחומי ירידה:** $2<x<+\infty$ ו- $-\infty<x<-2$

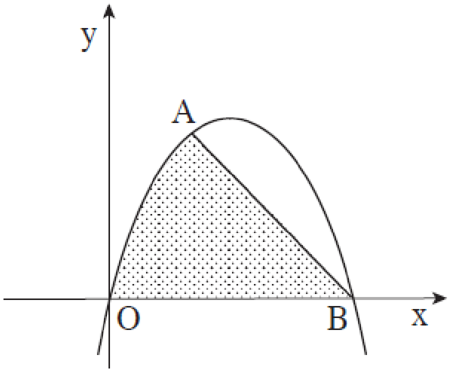
תחומי עלייה: $0<x<2$ ו- $-2<x<0$

תשובה סופית:

(א) $x\neq 0$ **(ב)** $x=0$ **(ג)** $(1,0)(4,0)$ **(ד)** $(-2,9)\cup\min$ $(2,1)\cap\max$

(ה) תחום ירידה $2<x<+\infty$ ו- $-\infty<x<-2$ תחום עלייה $0<x<2$ ו- $-2<x<0$

שאלה מספר 4



נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+ax$

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$

(ראה ציור)

א. מצא את ערך הפרמטר a.

הצב בפונקציה $a=6$ ופתור את הסעיפים ב, ו - ג

ב. הפונקציה חותכת את ציר ה– x בנקודה $O(0,0)$ ובנקודה B.

מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר ה– x (השטח המסומן)

פתרון:

פרמטר A

$y=-x^2+ax$

$(2,8)$

$8=-(2)^2+a(2)$

$8=-4+2a$

$12=2a$

$a=6$

נקודה B

$y=-x^2+6x$

$y=0$

$0=-x^2+6x$

$0=x(\cdot -x+6)$

$x=0 \qquad -x+6=0$

$x_o=0 \quad x_B=6$

$O(0,0) \quad B(6,0)$

משוואת AB

$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

$(6,0) \quad m\dfrac{0-8}{6-2}=-2$

$y-0=-2(x-6)$

$y=-2x+12$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה	x קטן/שמאל
	$y=-2x+12$	
	פונקציה תחתונה	
$x=6$	$y=0$	$x=2$

$S_3=\int_2^6 (\ -2x+12\ )-(\ 0\ )dx$

$S_3=\int_2^6 (\ -2x+12\ )dx$

$S_3=\left[-\dfrac{2x^2}{2}+12x\right]_2^6$

$S_3=\left[-\dfrac{2(6)^2}{2}+12(6)\right]-\left[-\dfrac{2(2)^2}{2}+12(2)\right]$

$S_3=[\ 36\ ]-[\ 20\ ]$

$S_3=[\ 16\ ]$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה	x קטן/שמאל
	$y=-x^2+6x$	
	פונקציה תחתונה	
$x=2$	$y=0$	$x=0$

$S_1=\int_0^2 (\ -x^2+6x\ )-(\ 0\ )dx$

$S_1=\int_0^2 (\ -x^2+6x\ )dx$

$S_1=\left[\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{6x^2}{2}\right]_0^2$

$S_1=\left[\dfrac{-(2)^3}{3}+\dfrac{6(2)^2}{2}\right]-\left[\dfrac{-(0)^3}{3}+\dfrac{6(0)^2}{2}\right]$

$S_1=\left[\ 9\dfrac{1}{3}\ \right]-[\ 0\ ]$

$S_1=\left[\ 9\dfrac{1}{3}\ \right]$

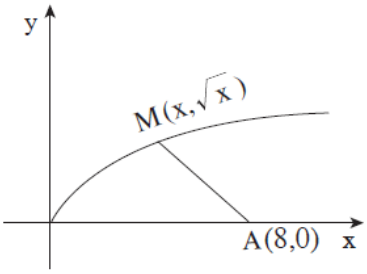
$S_2=S_3-S_1$

$S_2=\left[\ 9\dfrac{1}{3}\ \right]-[\ 16\ ]=25\dfrac{1}{3}$

תשובה סופית:

(א) $a=6$ **(ב)** $B(6,0)$ **(ג)** $S=16+9\frac{1}{3}=25\frac{1}{3}$

שאלה מספר 5



נתונה הפונקציה $y=\sqrt{x}$

על ציר ה- x נתונה הנקודה $A(8,0)$

M היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה (ראה ציור)

(א) בטא את ריבוע המרחק AM (כלומר AM^2) באמצעות שיעור ה – x של הנקודה M.

(ב) מה צריך להיות שיעור ה – x של הנקודה M כדי שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי ?

(ג) חשב את ריבוע המרחק המינימלי של MA בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית

פתרון:

1. **משפט המטרה:** ריבוע המרחק המינימלי של MA

2. **נוסחת המטרה:** $p=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

3. **נוסחת עזר:** $M\ (x,\sqrt{x})$ $\quad A\ (8,0)$

4. **פונקציית המטרה**

$p=(x-8)^2+(\sqrt{x}-0)^2$

$P=x^2-16x+64+x$

$$\boxed{p=x^2-15x+64}$$

נגזרת שנייה

Max/min

$p''(x)=+2 \cup \text{min}$

נגזרת ראשונה

$p'=2x-15$

$p'=0$

$0=2x-15$

$2x=15$

$x=7.5$

הפונקציה

$p=x^2-15x+64$

$x=7.5$

$p=(7.5)^2-15(7.5)+64$

$p=7.75$

נקודה M

$x=7.5$

$y=\sqrt{x}$

$y=\sqrt{7.5}=2.73$

$M(7.5,2.73)$

ריכוז התשובות

$x=7.5$ min

$y_M=2.73$

$p=7.75$

תשובה סופית:

(א) $p=x^2-15x+64$ **(ב)** $M(7.5,2.73)$ **(ג)** $p=7.75$

שאלה 6 : **מיועדת רק לתלמידים שאושר להם מבחן מותאם (מדבקה סגולה)**

הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא $f''(x)=-6x+24$

לפונקציה יש נקודת מקסימום ב- $x=6$

(א). מצא את הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

(ב). מצא את ערך ה- x של נקודת מינימום של הפונקציה.

(ג). ערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא -32 . מצא את הפונקציה $f(x)$

פתרון:

(א). **מצא את** $f'(x)$.

נגזרת שנייה

max/ min

$f''(x)=-6x+24$

אינטגרציה $\Leftarrow$

מציאת נגזרת ראשונה

$x=3 \quad m=0$

$f'(x)=\int(-6x+24)dx+C$

$f(x)=\frac{-6x^2}{2}+24x+C$

$0=\frac{-6(6)^2}{2}+24(6)+C$

$0=36+C$

$c=-36$

$f'(x)=-3x^2+24x-36$

(ב). **מצא את ערך ה- x של נקודת מינימום של הפונקציה.**

מציאת נקודות הקיצון

$m=0$

$f'(x)=-3x^2+24x-36$

$m=0$

$0=-3x^2+24x-36$

$x_{1,2}=\frac{-(24)\pm\sqrt{576-4(-3)(-36)}}{2(-3)}$

$x_{1,2}=\frac{-24\pm12}{-6}$

$x_1=6\cap\max \quad x_2=2\cup\min$

$(2,-32)\cup\min$

(ג). **ערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא 32 – מצא את** $f(x)$

נגזרת שנייה

max/ min

$f''(x)=-6x+24$

נגזרת ראשונה

$x= \quad m=$

$f'(x)=-3x^2+24x-36$

אינטגרציה $\Leftarrow$

מציאת הפונקציה

$x=2 \quad y=-32$

$f(x)=\int(-3x^2+24x-36)dx+C$

$f(x)=\frac{-3x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}-36x+C$

$-32=\frac{-3(2)^3}{3}+\frac{24(2)^2}{2}-36(2)+C$

$-32=-8+48-72+C$

$C=0$

$f(x)=x^3+12x^2-36x$

תשובה סופית:

(א) $f'(x)=-3x^2+24x-36$ **(ב)** $x=2$ **(ג)** $f(x)-x^3+12x^2-36x$