

מבחן בגרות 35003 מועד ב' קיץ תשס"ז 2007

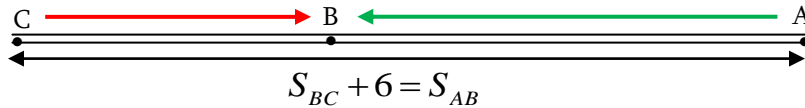
ענה על שלוש מהשאלות 1-5 (לכל שאלה - $\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב ! אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

מכונית נסעה מעיר A לעיר C. בין עיר A לעיר C נמצאת עיר B.
 הדרך מ-A ל-B ארוכה ב-6 ק"מ מהדרך מ-B ל-C.
 המכונית עברה את הדרך מ-A ל-B ב-1½ שעות, ואת הדרך מ-B ל-C ב-2 שעות.
 מהירות המכונית בדרך מ-A ל-B הייתה גדולה ב-24 קמ"ש מהמהירות שלה בדרך מ-B ל-C.
 המהירויות של המכונית בשני הקטעים היו קבועות.
 א. חשב את מהירות המכונית בדרך מ-A ל-B ואת מהירות המכונית מ-B ל-C.
 ב. חשב את המרחק בין A ל-C.

פתרון:



קטע מ-B ל-C			קטע מ-A ל-B		
דרך	זמן	מהירות	דרך	זמן	מהירות
$S = t \cdot v$	t	v	$S = t \cdot v$	t	v
$S_{BC} = 2 \cdot v$	2	v	$S_{AB} = 1.5 \cdot (v + 24)$	1.5	v + 24

(א.) חשב את מהירות המכונית בדרך מ-A ל-B ואת מהירות המכונית מ-B ל-C.

$$S_{BC} + 6 = S_{AB}$$

$$2 \cdot v + 6 = 1.5 \cdot (v + 24)$$

$$2v + 6 = 1.5v + 36$$

$$0.5v = 30$$

$$v = 60$$

תשובה: מהירות המכונית מ-B ל-C 60 קמ"ש
 מהירות המכונית מ-A ל-B 84 קמ"ש

(ב.) חשב את המרחק בין A ל-C.

$$S_{AB} = 1.5 \cdot (v + 24) \quad S_{BC} = 2 \cdot v \quad S_{AC} = S_{AB} + S_{BC}$$

$$v = 60 \quad v = 60 \quad S_{AC} = 120 + 126 = 146$$

$$S_{AB} = 1.5 \cdot (60 + 24) \quad S_{BC} = 2 \cdot (60)$$

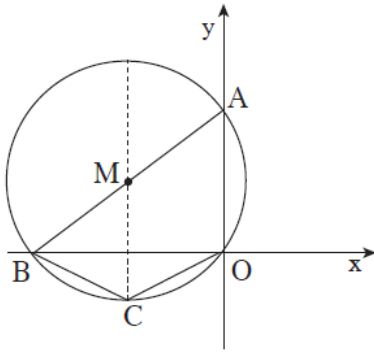
$$S_{AB} = 126 \quad S_{BC} = 120$$

תשובה: 246 ק"מ

תשובה סופית:

(א) מהירות בקטע BC 60 קמ"ש, מהירות בקטע AB 84 קמ"ש (ב) 246 ק"מ

שאלה מספר 2

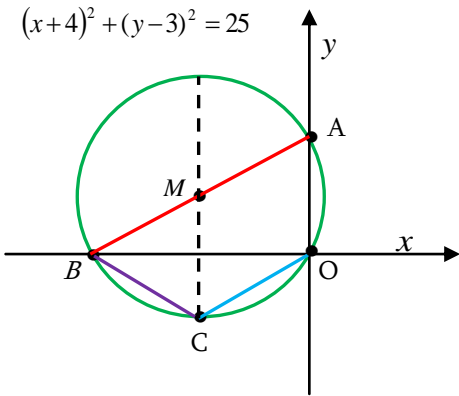


נתון המעגל $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ שמרכזו M.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O
(ראה ציור)

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
ב. (1) מצא את שטח המשולש ABO.
(2) קוטר המעגל במאונך לציר ה-x.
חותך את המעגל בנקודה C (ראה ציור).
מצא את שטח המרובע ABCO.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



נקודה A

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$x = 0$$

$$(0+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$(y-3)^2 = 25 - 16$$

$$y - 3 = \pm\sqrt{9}$$

$$y = \pm 3 + 3$$

$$y_1 = +3 + 3 = 6$$

$$y_2 = -3 + 3 = 0$$

A(0,6) (0,0)

נקודה B

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$y = 0$$

$$(x+4)^2 + (0-3)^2 = 25$$

$$(x+4)^2 = 25 - 9$$

$$x+4 = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4 - 4$$

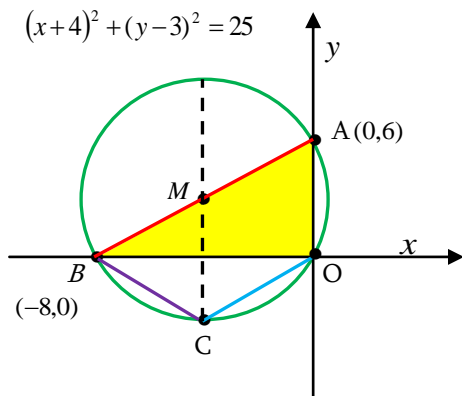
$$x_1 = +4 - 4 = 0$$

$$x_2 = -4 - 4 = -8$$

B(-8,0) (0,0)

תשובה: A(0,6) B(-8,0)

(ב) מצא את שטח המשולש ABO.

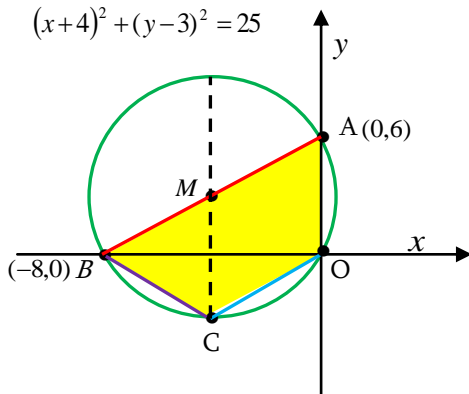


$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{BO \cdot AO}{2}$$

$$S_{ABO} = \frac{6 \cdot 8}{2} \quad S_{ABO} = 24$$

תשובה: $S_{ABO} = 24$

(2) קוטר המעגל במאונך לציר ה- x . חותך את המעגל בנקודה C (ראה ציור) מצא את שטח המרובע ABCO.



נחבר את שני המשולשים ABO שמצאנו בסעיף הקודם עם המשולש BCO ונקבל את המרובע ABCO.

א. נמצא את מרכז המעגל ממשוואת המעגל

משוואת המעגל

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$M(-4,3) \quad R=5$$

ב. הקוטר מאונך לציר ה- x משמעות בנקודה C ה- $x=4$

נקודה C

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$x = -4$$

$$(-4+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$(y-3)^2 = 25 - 0$$

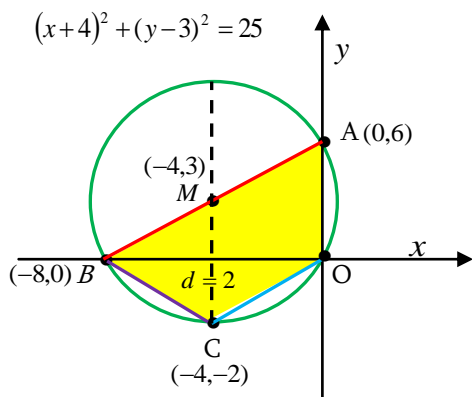
$$y-3 = \pm\sqrt{25}$$

$$y = \pm 5 + 3$$

$$y_1 = -5 + 3 = -2$$

$$y_2 = +5 + 3 = 8$$

$$C(0, -2) \quad (0, 8)$$



$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} \quad S_{BCO} = \frac{8 \cdot 2}{2} \quad S_{BCO} = 8$$

$$S_{ABCO} = S_{BCO} + S_{ABO} = 24 + 8 = 32$$

תשובה: $S_{ABCO} = 32$

תשובה סופית:

$$S_{ABCO} = 32 \quad (ב) \quad S_{ABO} = 24 \quad (א) \quad A(0,6) \quad B(-8,0) \quad (א)$$

שאלה מספר 3

נתונה הפונקציה $y = \sqrt{2x} - x$

- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) לפונקציה יש נקודת מקסימום אחת. מצא את שיעוריה.
- (ג) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- (ד) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ה) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ו) מצא את התחום החיובי והשלילי של הפונקציה.

פתרון:

(א) **מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

תשובה: תחום ההגדרה: לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד $x \geq 0$.

(ב) **לפונקציה יש נקודת מקסימום אחת. מצא את שיעוריה.**

$$f(x) = a\sqrt{bx}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

פונקציה
y=?

$$f(x) = \sqrt{2x} - x$$

$$x = 0.5$$

$$f'(0.5) = \sqrt{2(0.5)} - (0.5)$$

$$(0.5, 0.5)$$

נגזרת ראשונה
m=0

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2x}} - 1$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$\sqrt{2x} = 1$$

$$\sqrt{2x} = 1 \quad /(\)^2$$

$$(\sqrt{2x})^2 = (1)^2$$

$$2x = 1$$

$$x = 0.5$$

נגזרת שנייה
max/min

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1/\sqrt{2x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$$f''(x) = -\frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{2x}}$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1\sqrt{2(0.5)}} = -1 \cap \max$$

נקודות הקיצון:
 $(0.5, 0.5) \cap \max$

(ג) **מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .**

חיתוך עם ציר x
y=0

$$f(x) = \sqrt{2x} - x$$

$$0 = \sqrt{2x} - x$$

$$x = \sqrt{2x} \quad /(\)^2$$

$$(x)^2 = (\sqrt{2x})^2$$

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$

$(0,0) \quad (2,0)$

חיתוך עם ציר y
x=0

$$f(x) = \sqrt{2x} - x$$

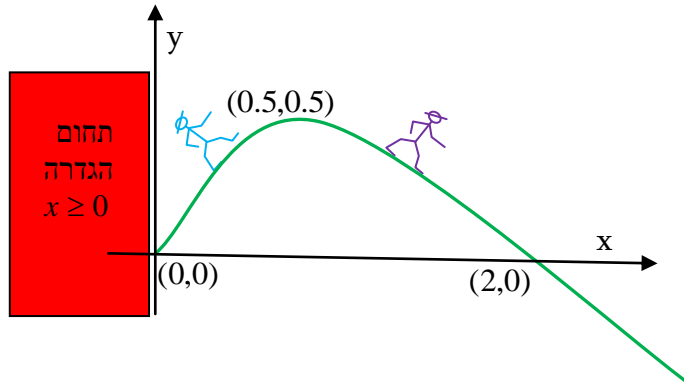
$$x = 0$$

$$y = \sqrt{2(0)} - (0)$$

$$y = 0$$

$(0,0)$

(ד). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה .

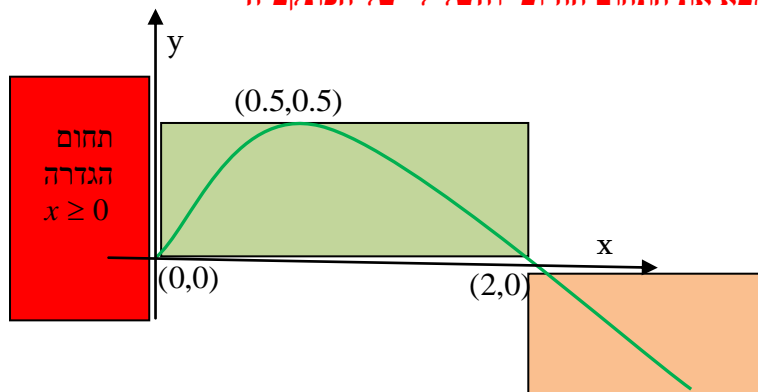


(ה). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

x	תחום הגדרה	x	עלייה	x	ירידה	x
$-\infty$		0	$\leq x <$	0.5	$< x <$	$+\infty$

תשובה: תחום עלייה: $0 \leq x < 0.5$ תחום ירידה: $0.5 < x < +\infty$

(ו). מצא את התחום החיובי והשלילי של הפונקציה.



x	תחום הגדרה	x	חיובי	x	שלילי	x
$-\infty$		0	$\leq x <$	2	$< x <$	$+\infty$

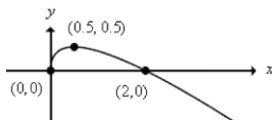
תשובה: תחום חיובי: $0 \leq x < 2$ תחום שלילי: $2 < x < +\infty$

תשובה סופית:

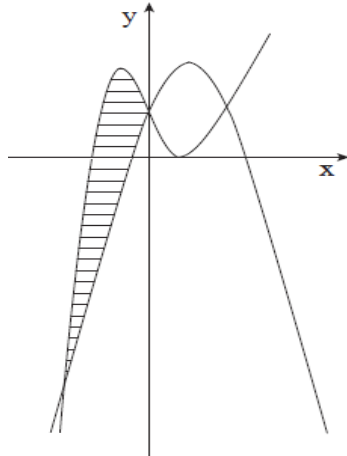
(א) $x \geq 0$ (ב) $\max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (ג) $(0,0) (2,0)$ (ד) שרטוט

(ה) תחום עלייה: $0 \leq x < 0.5$ תחום ירידה: $0.5 < x < +\infty$

(ו) תחום חיובי: $0 \leq x < 2$ תחום שלילי: $2 < x < +\infty$



שאלה מספר 4



נתונות שתי הפונקציות :

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

(ראה ציור)

$$y = x^3 - 3x + 2$$

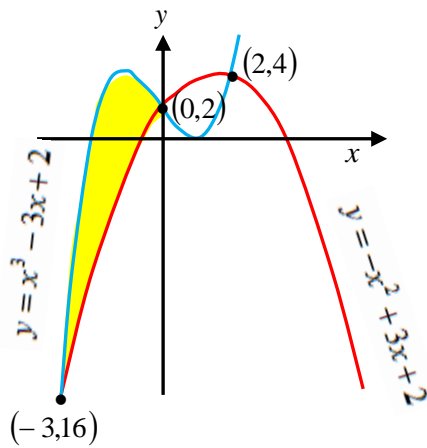
(א) מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(ב) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

פתרון

(א) מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

נקודות החיתוך בין הגרפים



$$y = y$$

$$-x^2 + 3x + 2 = x^3 - 3x + 2$$

$$x^3 - 3x + 2 + x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x \cdot (x^2 + x - 6) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (x^2 + x - 6) = 0$$

$$x_{3,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$x_{3,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 2$$

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

$$(x=0) y = -(0)^2 + 3(0) + 2 = 2$$

$$(0,2)$$

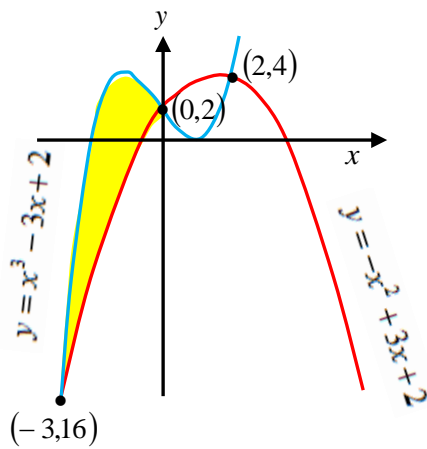
$$(x=-3) y = -(-3)^2 + 3(-3) + 2 = -16$$

$$(-3,-16)$$

$$(x=2) y = -(2)^2 + 3(2) + 2 = 4$$

$$(2,4)$$

(ב). מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות, השטח המקוקו בציר.



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = x^3 - 3x + 2$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = -3$	$f(x) = 12x - 12$	$x = 0$

$$S_T = \int_{(x \text{ שמאל})}^{(x \text{ ימין})} (פונקציה עליונה) - 1 \cdot (פונקציה תחתונה) dx$$

$$S_T = \int_{-3}^0 (x^3 - 3x + 2) - 1 \cdot (-x^2 + 3x + 2) dx$$

$$S_T = \int_{-3}^0 (x^3 - 3x + 2 + x^2 - 3x - 2) dx$$

$$S_T = \int_{-3}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx$$

$$S_T = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right]_{-3}^0$$

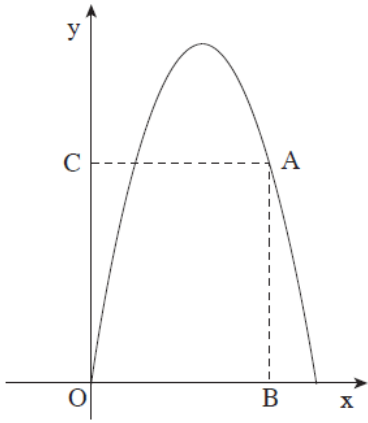
$$S_T = \left[\frac{(0)^4}{4} + \frac{(0)^3}{3} - \frac{6(0)^2}{2} \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - \frac{6(-3)^2}{2} \right]$$

$$S_T = [0] - \left[-15 \frac{3}{4} \right]$$

$$S_T = 15 \frac{3}{4}$$

תשובה סופית:

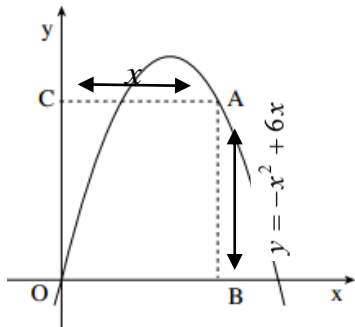
$$S = 15 \frac{3}{4} \quad (\text{ב}) \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2 \quad (\text{א})$$



שאלה מספר 5

מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 6x$, ברביע הראשון, מורידים מהנקודה אנכים לצירים, ונוצר מלבן ABOC. (ראה ציור)
 א. מה צריך להיות שיעור ה-x של הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?
 ב. חשב את היקף המקסימלי של המלבן.

פתרון:



1. **משפט המטרה:** היקף המלבן יהיה מקסימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = 2a + 2b = 2x + 2y \Rightarrow \max$

3. **נוסחת עזר:** $y = -x^2 + 6x$

4. **פונקציית המטרה:** $p = 2a + 2b = 2x + 2y \Rightarrow \max$

$P = 2(x) + 2(-x^2 + 6x)$

$p = 2x - 2x^2 + 12x$

$p = -2x^2 + 14x$

הפונקציה

$p = -2x^2 + 14x$
 $x = 3.5$
 $p = -2(3.5)^2 + 14(3.5)$
 $p = 24.5$

נגזרת ראשונה

$p' = -4x + 14$
 $p' = 0$
 $0 = -4x + 14$
 $4x = 14$
 $x = 3.5$

נגזרת שנייה

Max/min
 $p''(x) = -4 \cap \max$

ריכוז התשובות

$x = 3.5 \quad \max$
 $y_A = 8.75$
 $p = 24.5$

מציאת y

$x = 3.5$
 $y_A = -x^2 + 6x = -(3.5)^2 + 6(3.5) = 8.75$
 $A(3.5, 8.75)$

תשובה סופית:

(ב.) $P = 24.5 \quad \max$

(א) $x_A = 3.5 \quad \max$

שאלה 6: מיועדת רק לתלמידים שאושר להם מבחן מותאם (מדבקה סגולה)

נתונה הפונקציה $y = Ax + \frac{2}{x}$ בתחום $0 < x$

לפונקציה יש ערך קיצון בנקודה שבה $x = 1$.
א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות
מה הם השיעורים של נקודות החיתוך בין הישר לפונקציה?

פתרון:

א. **מצא את ערך הפרמטר A.**

פונקציה

$y = ?$

$$y = Ax + \frac{2}{x}$$

נגזרת ראשונה

$$f'(x) = A - \frac{2 \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$x = 1$$

$$0 = A - \frac{4}{(1)^2}$$

$$0 = A - 2$$

$$A = 2$$

תשובה: $A = 2$

חיתוך עם הישר $y = 5$

$$y = 5$$

$$y = 2x + \frac{2}{x}$$

$$y = 5$$

$$5 = 2x + \frac{2}{x}$$

$$5x = 2x^2 + 2$$

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0.5$$

$$(2,5) \quad (0.5,5)$$

ב. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות
מה הם השיעורים של נקודות החיתוך בין הישר לפונקציה?

תשובה: $(0.5,5)$ $(2,5)$

תשובה סופית:

(א) $A = 2$ (ב) $(\frac{1}{2}, 5)$ $(2, 5)$