מבחן בגרות 35003 מועד חצב ברק תשס"ז 2007

ענה על שלוש מהשאלות 1-5 (לכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב ! אם תענה על יותר משלוש שאלות , ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

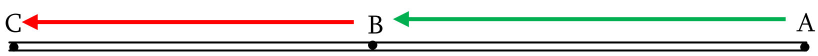
שאלה מספר 1

רוכב אופניים עבר דרך של 15 קילומטר. את 5 הקילומטרים הראשונים הוא עבר במהירות הגדולה ב – 25% מהמהירות שבה עבר את שאר הדרך.
מצא את מהירות הרוכב בשאר הדרך אם נתון כי כל 15 הקילומטר הוא עבר ב – 2 שעות .

פתרון:

גדול ב 25%

$$\frac{100+25}{100}=1.25$$



החלק הראשון		
מהירות v	**זמן** $t=\frac{S}{V}$	**דרך** $S=t\cdot v$
$1.25v$	$t_1=\frac{5}{1.25v}$	5

החלק השני		
מהירות v	**זמן** $t=\frac{S}{V}$	**דרך** $S=t\cdot v$
v	$t_2=\frac{10}{v}$	$15-5=10$

$$t_1+t_2=2$$

$$\frac{5}{1.25v}+\frac{10}{v}=2 \qquad /1.25\cdot v$$

$$5+10\cdot 1.25=2\cdot 1.25v$$

$$17.5=2.5v$$

$$v=7$$

המהירות היא 7 קמ"ש

תשובה סופית:

מהירות הרוכב בשאר הדרך הייתה 7 קמ"ש

שאלה מספר 2

קצות הקטע AB הם : $A(9,0)$ $B(1,-4)$

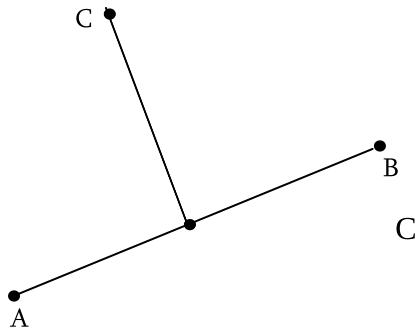
דרך אמצע הקטע AB העבירו אנך לקטע .

א. **(1)** מצא את אמצע הקטע AB.

(2) מצא את משוואת האנך.

ב. מצא את משוואת המעגל שקוטרו AB.

ג. הישר $y=4$ חותך בנקודה C את האנך ,
שאת משוואתו מצאת בתת סעיף א (2) קבע אם נקודה C
נמצאת על המעגל שקוטרו AB נמק על ידי חישוב



פתרון:

(א) (1) מצא את אמצע הקטע AB.

$(1,-4)$ (x_M, y_M) $(9,0)$

x_1, y_1 x_2, y_2

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_M = \frac{(9)+(1)}{2} \qquad y_M = \frac{(-4)+(0)}{2}$$

$$x_M = 5 \qquad y_M = -2$$

$$M(5.-2)$$

תשובה: $M(5,-2)$

(2) מצא את משוואת האנך.

שיפוע AB.

$A(9,0)$ $B(1,-4)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{-4-0}{1-9} = \frac{-4}{-8}$$

$$m_{AB} = \frac{1}{2}$$

שיפוע האנך

$m_{AB} = \frac{1}{2}$ $m_{BC} = -2$

שיפוע הופכי נגדי

משוואת האנך

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$(5,-2)$ $m = -2$

$$y + 2 = -2(x-5)$$

$$y = -2x + 10 - 2$$

$$y = -2x + 8$$

תשובה: $y_{\text{האנך}} = -2x + 8$

(ב) מצא את משוואת המעגל שקוטרו AB.

משוואת המעגל

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$M(5,-2)$

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = R^2$$

$A\ (9,0)$

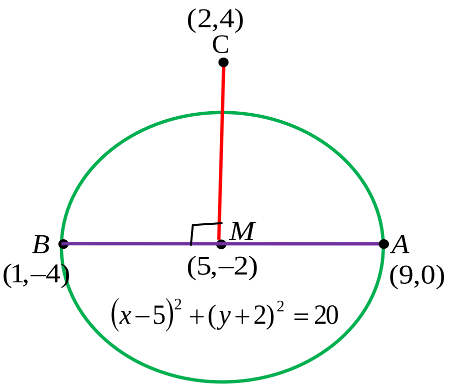
$$(9-5)^2 + (0+2)^2 = R^2$$

$$R^2 = 20$$

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$$

תשובה: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$

(ג) הישר $y=4$ חותך בנקודה C את האנך , שאת משוואתו מצאת בתת סעיף א (2)
קבע אם נקודה C נמצאת על המעגל שקוטרו AB נמק על ידי חישוב



<u>נקודה C</u>

$y=-2x+8$

$y=4$

$4=-2x+8$

$2x=4$

$x=2$

$C(2,4)$

<u>משוואת המעגל</u>

$B(10,8)$

$(x-5)^2+(y+2)^2=20$

$(2-5)^2+(4+2)^2=20$

$45\neq 20$

לא

<u>תשובה</u>: לא. $45\neq 20$

<u>תשובה סופית</u>:

(א1) $M(5,-2)$ **(א2)** $y_{\text{האנך}}=-2x+8$

(ב) $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ **(ג) לא.** $45\neq 20$

שאלה מספר 3

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+4x^2+ax$ ונתון כי $f(-1)=f'(-1)$

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי ה – x של נקודות הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגן.

פתרון:

(א) מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

נגזרת ראשונה

$f'(x)=3x^2+8x+a$

פונקציה

$f(x)=x^3+4x^2+ax$

$$f(-1)=f'(-1)$$
$$(-1)^3+4(-1)^2+a(-1)=3(-1)^2+8(-1)+a$$
$$-1+4-a=3-8+a$$
$$2a=8$$
$$a=4$$

תשובה $a=4$

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

פונקציה

$$f(x)=x^3+4x^2+4x$$
$$y=0$$
$$0=x(x^2+4x+4)$$
$$x_1=0$$
$$x_2=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot(1)(4)}}{2(1)}$$
$$x_2=\frac{-4\pm0}{2}$$
$$x_2=-2$$
$$(0,0)\qquad(-2,0)$$

תשובה: $(0,0)$ $(-2,0)$

נגזרת שנייה

max/min

$$f''(x)=+6x+8$$
$$f''(x)=+6(-2)+8=-4\cap\max$$
$$f''(x)=+6(-\tfrac{2}{3})+8=+4\cup\min$$

נגזרת ראשונה

m=0

$$f'(x)=3x^2+8x+4$$
$$f'(x)=m=0$$
$$0=3x^2+8x+4$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4(3)(4)}}{2(3)}$$
$$x=\frac{-8\pm4}{6}$$
$$x_1=-2$$
$$x_2=-\tfrac{2}{3}$$

פונקציה

y=?

$$f(x)=x^3+4x^2+4x$$
$$y=(-2)^3+4(-2)^2+4(-2)=0$$
$$(-2,0)$$
$$y=(-\tfrac{2}{3})^3+4(-\tfrac{2}{3})^2+4(-\tfrac{2}{3})$$
$$(-\tfrac{2}{3},-1\tfrac{5}{27})$$

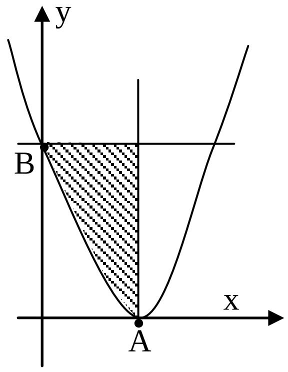
תשובה $x=-2\max$ $\quad x=-\frac{2}{3}\min$

תשובה סופית:

(א) $a=4$ **(ב)** $(0,0)$ $(-2,0)$ **(ג)** $x=-2\max$ $\quad x=-\frac{2}{3}\min$

שאלה מספר 4

גרף הפונקציה $f(x)=(2x-2)^4$
חותך את ציר ה – x בנקודה A (1 , 0) ,
ואת ציר ה y בנקודה B
(ראה ציור)



א. דרך נקודה B העבירו ישר המקביל לציר ה – x
מצא את משוואת הישר.

ב. מנקודה A העלו אנך לציר ה – x
מצא את השטח המוגבל על ידי הישר
שאת משוואתו מצאת בסעיף א
על ידי האנך ועל ידי גף הפונקציה $f(x)$,
השטח המקווקו בציור.

פתרון:

דרך נקודה B העבירו ישר המקביל לציר ה – x מצא את משוואת הישר.

משוואת משיק

$y-y_1=m(x-x_1)$

$(0,16)\quad m=0$

$y-16=0(x-0)$

$y=16$

נקודה B

$f(x)=(2x-2)^4$

$x=0$

$y=(2\cdot 0-2)^4$

$y=16$

$B\ (0,16)$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה	x קטן/שמאל
	$y=16$	
	פונקציה תחתונה	
$x=1$	$y=(2x-2)^4$	$x=0$

$$S_T=\int_0^1 (16\ )-1\cdot(2x-2\ )^4dx$$

$$S_T=\int_0^1 16-(2x-2)^4dx$$

$$S_T=\left[16x-\frac{(2x-2)^5}{5\cdot 2}\right]_0^1$$

$$S_T=\left[16(1)-\frac{(2\cdot 1-2)^5}{10}\right]-\left[16(0)-\frac{(2\cdot 0-2)^5}{10}\right]$$

$$S_T=[16]-\left[-3\frac{1}{5}\right]$$

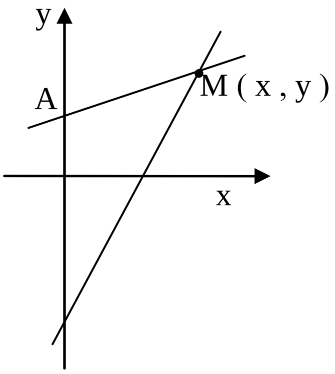
$$S_T=12\frac{4}{5}$$

תשובה סופית:

(א) $y=16$ **(ב)** $S_T=12\frac{4}{5}$

שאלה מספר 5

נתון הישר $y = 3x - 4$ ונתונה הנקודה A (0 , 1)
נקודה M (x , y) נמצאת על הישר הנתון (ראה ציור)



א. בטא את ריבוע המרחק AM (כלומר AM^2)
באמצעות שיעור ה – x של הנקודה M.

ב. מה צריך להיות שיעור ה – x של הנקודה M
כדי שריבוע המרחק AM יהיה מינימלי ?

פתרון:

1. **משפט המטרה:** ריבוע המרחק AM יהיה מינימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

3. **נוסחת עזר:** $M\ (x, 3x-4) \qquad A\ (0,1)$

4. **פונקציית המטרה**

$p = (x-0)^2 + (3x-4-1)^2$

$p = (x-0)^2 + (3x-5)^2$

$p = x^2 + 9x^2 - 30x + 25$

$$\boxed{p = 10x^2 - 30x + 25}$$

נגזרת שנייה
Max/min

$p\ '(x) = +20 \cup \text{min}$

נגזרת ראשונה

$p\ ' = 20x - 30$

$p\ ' = 0$

$0 = 20x - 30$

$20x = 30$

$x = 1.5$

הפונקציה

$p = 10x^2 - 30x + 25$

$x = 1.5$

$p = 10(1.5)^2 - 30(1.5) + 25$

$p = 2.5$

נקודה M

$x = 1.5$

$y = 3x - 4$

$y = 3(1.5) - 4 = 0.5$

$M(1.5, 0.5)$

ריכוז התשובות

$x = 1.5 \qquad \text{min}$

$y_M = 0.5$

$p = 2.5$

תשובה סופית:

(א) $AM^2 = 10x^2 - 30x + 25$ **(ב)** $M(1.5, 0.5)$

שאלה 6 : **מיועדת רק לתלמידים שאושר להם מבחן מותאם (מדבקה סגולה)**

נתונה הפונקציה $f(x)=2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$ בתחום $\{x \mid x\neq 0\}$.

א. מצא את נקודות הקיצון של f (x), וקבע את סוגה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f (x) עם ציר ה- x .

ג. ציין את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה f (x).

פתרון:

(א). מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

נגזרת שנייה

max/min

$$f''(x)=+\frac{3\cdot 2}{x^3}-\frac{4\cdot 3}{x^4}$$

$$f''(x)=+\frac{6}{(1\frac{1}{3})^3}-\frac{12}{(1\frac{1}{3})^4}$$

$$f''(x)=+\frac{6}{(1\frac{1}{3})^3}-\frac{1}{(1\frac{1}{3})^4}$$

$$f''(x)=-1\frac{17}{64}\cap \max$$

נגזרת ראשונה

m=0

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{2\cdot 2}{x^3}$$

$$f'(x)=m=0$$

$$0=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}$$

$$-\frac{3}{x^2}=\frac{4}{x^3}$$

$$-\frac{x^3}{x^2}=\frac{4}{3}$$

$$x=1\tfrac{1}{3}$$

פונקציה

y=?

$$f(x)=2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$f(1\tfrac{1}{3})=2+\frac{3}{(1\frac{1}{3})}-\frac{2}{(1\frac{1}{3})^2}$$

$$(1\frac{1}{3},3\frac{1}{8})$$

נקודות הקיצון:

$(1\frac{1}{3},3\frac{1}{8})\cap \max$

(ב). מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f (x) עם ציר ה- x .

חיתוך עם ציר x

y=0

$$f(x)=2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$$

$$0=2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\quad / x^2$$

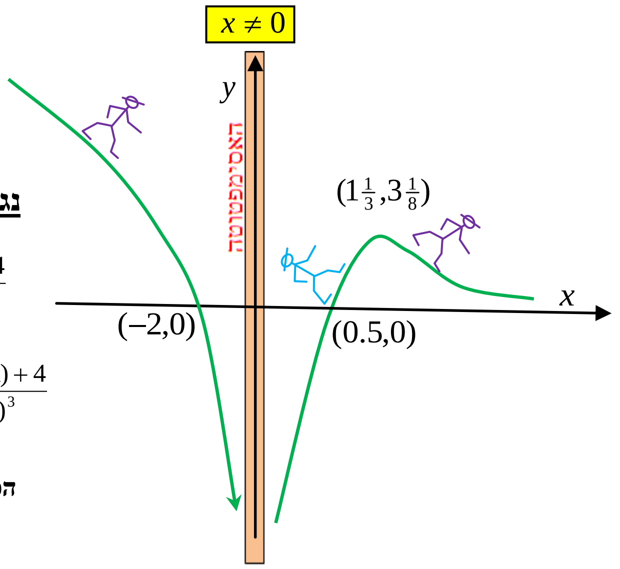
$$0=2x^2+3x-2$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{4}\qquad x_1=-2\quad x_2=0.5$$

$(-2,0)\quad(0.5,0)$

תשובה: $(\frac{1}{2},0)$, $(-2,0)$



<u>נגזרת ראשונה</u>
m=?

$f\,'(x) = \frac{-3x+4}{x^3}$

$x = -1$

$f\,'(-1) = \frac{-3(-1)+4}{(-1)^3}$

$m = -7 \quad \Downarrow$

הפונקציה יורדת

(ג). **ציין את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.**

x	ירידה	x	עלייה	x	ירידה	x
$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x <$	$+\infty$

<u>נגזרת ראשונה</u>
m=?

$f\,'(x) = \frac{-3x+4}{x^3}$

$x = -1$

$f\,'(-1) = \frac{-3(-1)+4}{(-1)^3}$

$m = -7 \quad \Downarrow$

הפונקציה יורדת

<u>תשובה:</u> **תחומי העלייה:** $0 < x < 1\frac{1}{3}$

תחומי הירידה: $1\frac{1}{3} < x < +\infty$ **או** $-\infty < x < 0$

<u>תשובה סופית:</u>

(א) $(1\frac{1}{3},3\frac{1}{8}) \cap \max$ **(ב)** $(\frac{1}{2},0)$, $(-2,0)$

(ג) תחום עלייה: $0 < x < 1\frac{1}{3}$, תחום ירידה: $1\frac{1}{3} < x < +\infty$ ואו $-\infty < x < 0$