מבחן בגרות 35003 מועד חצב ברק תשס"ט

ענה על שלוש מהשאלות 1-5 (לכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב ! אם תענה על יותר משלוש שאלות , ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1:

רונן קנה בקיוסק בקבוקי מים מינרלים, ושילם עבורם 42 שקלים.
המחיר של אותו בקבוק מים מינרלים בסופרמרקט נמוך ב– 1.5 שקלים ממחירו בקיוסק.
אילו קנה רונן בסופרמרקט אותו מספר בקבוקי מים מינרלים שקנה בקיוסק ,
והיה מוסיף באותה קנייה עוד 4 בקבוקי מים מינרלים, היה חוסך 10% מהסכום ששילם בקיוסק.

א. חשב כמה בקבוקי מים מינרלים קנה רונן בקיוסק.

ב. מה המחיר של כל בקבוק מים מינרלים בקיוסק ?

פתרון

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ , מ"ר, שקלים, ק"ג , %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - כמות הבקבוקים, y - מחיר לבקבוק

חוסך - 10%

$$1-\frac{10}{100}=0.9$$

	מים מינרלים			
	מחיר לבקבוק	**כמות**	**סה"כ**	**משוואה**
בקיוסק	y	x	42	$x\cdot y=42$
בסופרמרקט	$y-1.5$	$x+4$	$42\cdot 0.9=37.8$	$(y-15)(x+4)=37.8$

א. חשב כמה בקבוקי מים מינרלים קנה רונן בקיוסק.

$$x\cdot y=42 \qquad y=\frac{42}{x}$$

$$(x+4)\cdot(y-1.5)=37.8$$
$$xy-1.5x+4y-6=37.8$$
$$42-1.5x+4(\frac{42}{x})=37.8+6$$
$$42-1.5x+\frac{168}{x}=43.8$$
$$-1.5x+\frac{168}{x}=1.8/x$$
$$-1.5x^2+168=1.8x$$
$$-1.5x^2-1.8x+168=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-1.8)\pm\sqrt{3.24-4(-1.5)(168)}}{2(-1.5)}$$
$$x_{1,2}=\frac{1.8\pm 31.8}{-3}$$
$$x_1=-11.2 \quad x_2=10$$

תשובה: רונן קנה בקיוסק 10 בקבוקים

ב. מה המחיר של כל בקבוק מים מינרלים בקיוסק ?

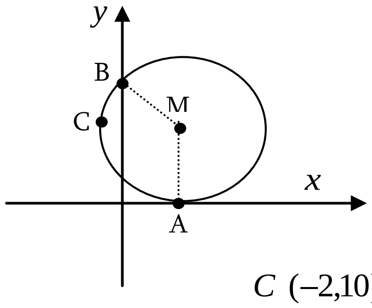
$$x=10 \qquad y=\frac{42}{x}$$
$$y=\frac{42}{10}=4.2$$

תשובה: במחיר של 4.2 שקלים לכול בקבוק

תשובה סופית:

(א). רונן קנה בקיוסק 10 בקבוקים **(ב).** במחיר של 4.2 שקלים

<u>שאלה מספר 2:</u>



מעגל שמרכזו בנקודה M
משיק לציר ה– x בנקודה $A\ (8,0)$,
וחותך את ציר ה– y בנקודה $B\ (0,16)$
(ראה ציור).
א. (1) מצא את שיעור ה– x של הנקודה M .
(2) מצא את שיעור ה– y של הנקודה M.
ב. מצא את משוואת המעגל .
ג. המעגל שאת משוואתו מצאת בסעיף ב, עובר דרך הנקודה $C\ (-2,10)$
חשב את שטח המשולש AMC.

<u>פתרון:</u>

א. (1) מצא את שיעור ה - x של הנקודה M .

המעגל משיק לציר ה – x משמעות הישר AM מאונך לציר ה – x
לכן שיעור ה x של נקודה A זהה לשיעור ה – x של נקודה M והוא $M(8,y)$

<u>תשובה:</u> $x=8$

(2) מצא את שיעור ה – y של הנקודה M.

משוואת המעגל

$(x-a)^2+(y-b)=R^2$

$M(8,b)$

$(x-8)^2+(y-b)=R^2$

נציב את נקודה A

$(x-8)^2+(y-b)=R^2$

$A(8,0)$

$(8-8)^2+(0-b)^2=R^2$

$b^2=R^2$

נציב את נקודה B

$(x-8)^2+(y-b)=R^2$

$B(0,16)$

$(0-8)^2+(16-b)^2=R^2$

$64+(16-b)(16-b)=R^2$

$64+256-16b-16b+b^2=R^2$

$320-32b+b^2=R^2$

$R^2=R^2$

$b^2=320-32b+b^2$

$32b=320\ /:32$

$b=10$

$M(8,10)$

<u>תשובה:</u> $y=10$

(ב). מצא את משוואת המעגל .

משוואת המעגל

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$M(8,6)$

$(x-8)^2+(y-10)^2=R^2$

$A(8,0)$

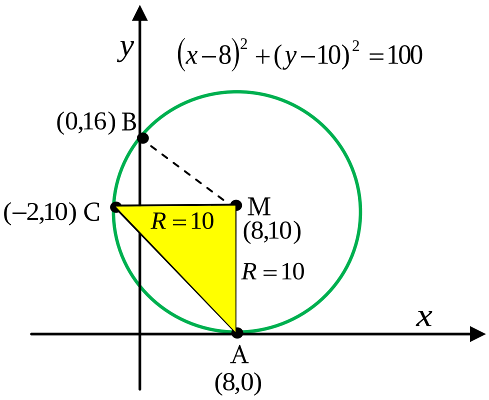
$(8-8)^2+(0-10)^2=R^2$

$R^2=100$

$(x-8)^2+(y-10)^2=100$

תשובה: $(x-8)^2+(y-10)^2=100$

(ג). המעגל שאת משוואתו מצאת בסעיף ב' עובר דרך הנקודה C (- 2 , 10)
חשב את שטח המשולש AMC.



$S=\frac{a\cdot h_a}{2}$ $\quad S_{AMC}=\frac{AM\cdot AC}{2}$

$S_{AMC}=\frac{10\cdot 10}{2}=50$

תשובה: $S_{AMC}=50$

תשובה סופית:

(1א) $x=8$ **(2א)** $y=10$ **(ב).** $(x-8)^2+(y-10)^2=100$ **(ג).** $S_{AMC}=50$

שאלה מספר 3:

לפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2-60x+144}$ יש נקודת מינימום ב – $x=3$.

א. מצא את a.
הצב את הערך של $a=10$ וענה על הסעיפים ב– ד.

ב. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=6$

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה– y.

ד. הראה כי לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה– x.

פתרון:

א. מצא את a.

$f'(x)=\frac{1\cdot 2ax-60}{2\sqrt{ax^2-60x+144}}$

$f'(x)=m=0$

$x=3$

$0=2ax-60$

$0=2a(3)-60$

$60=6a$

$a=10$

$f(x)=\sqrt{ax^2-60x+144}$

$a=10$

$f(x)=\sqrt{10x^2-60x+144}$

פתרון: $a=10$

ב. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=6$

$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$

$(6,12)\qquad m=2.5$

$y-12=2.5\cdot(x-6)$

$y=2.5x-15+12$

$y=2.5x-3$

$f'(x)=\frac{1\cdot 20x-60}{2\sqrt{20x^2-60x+144}}$

$f'(x)=m=?$

$x=6$

$m=\frac{20(6)-60}{2\sqrt{20(6)^2-60(6)+144}}=\frac{60}{24}$

$m=2.5$

$f(x)=\sqrt{10x^2-60x+144}$

$x=6$

$f(x)=\sqrt{10(6)^2-60(6)+144}$

$y=12$

פתרון: $y=2.5x-3$

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה– y.

$f(x)=\sqrt{10x^2-60x+144}$

$x=0$

$y=\sqrt{10(0)^2-60(0)+144}$

$y=12$

פתרון: $(0,12)$

ד. הראה כי לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם ציר ה– x.

$x=\frac{-(-60)\pm\sqrt{60^2-4(10)(144)}}{2(10)}$

$x=\frac{60\pm\sqrt{-2160}}{20}$

$f(x)=\sqrt{10x^2-60x+144}$

$y=0$

$0=\sqrt{10x^2-60x+144}$

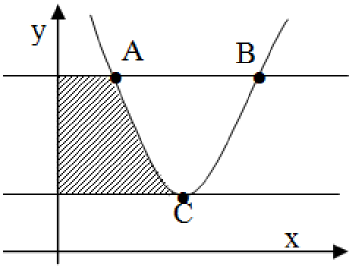
$y=10x^2-60x+144$

פתרון: שורש שלילי

תשובה סופית:

א. $a=10$ **ב.** $y=2.5x-3$ **ג.** $(0,12)$ **ד. שורש במינוס**

שאלה מספר 4:



הישר $y=8$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)=x^2-6x+13$ בנקודות A , B.

C היא נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

דרך הנקודה C מעבירים ישר המקביל לציר ה – x (ראה ציור).

(א) מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו- B.

(ב). מצא את שיעורי הנקודה C.

(ג). חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $y=8$ על ידי הישר המקביל לציר ה – x. ועובר דרך נקודה C . (השטח המקווקו בציור)

פתרון:

(א) מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו- B.

נקודה החיתוך בין הישר לפונקציה

$$f(x)=x^2-6x+13$$
$$y=8$$
$$8=x^2-6x+13$$
$$0=x^2-6x+5$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{36-4(1)(5)}}{2(1)}$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}$$
$$x_1=+5 \quad x_2=1$$
$$A\ (1,8) \quad B\ (5,8)$$

(ב). מצא את שיעורי הנקודה C.

נקודה C נקודת קיצון

$$f\,'(x)=2x-6$$
$$f\,'(x)=m=0$$
$$0=2x-6$$
$$2x=6$$
$$x=3$$

$$f(x)=x^2-6x+13$$
$$x=3$$
$$y=(3)^2-6(3)+13$$
$$y=4$$
$$(3,4)\cup\min$$

$$y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$
$$(3,4) \qquad m=0$$
$$y-4=0\cdot(x-3)$$
$$y=4$$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y=x^2-6x+13$ פונקציה תחתונה $y=4$	x גדול/ימין
$x=1$		$x=3$

x קטן/שמאל	פונקציה עליונה $y=8$ פונקציה תחתונה $y=4$	x גדול/ימין
$x=0$		$x=1$

$$S_2=\int_1^3 (\ x^2-6x+13\ )-(\ 4\ )dx$$
$$S_2=\int_1^3 (\ x^2-6x+13-4\ )dx$$
$$S_2=\int_1^3 (\ x^2-6x+9\ )dx$$
$$S_2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_1^3$$
$$S_2=\left[\frac{(3)^3}{3}-\frac{6(3)^2}{2}+9(3)\right]-\left[\frac{(1)^3}{3}-\frac{6(1)^2}{2}+9(1)\right]$$
$$S_2=\left[\ 9\ \right]-\left[\ 6\frac{1}{3}\ \right]$$
$$S_2=\left[\ 2\frac{2}{3}\ \right]$$

$$S_1=\int_0^1 (\ 8\ )-(\ 4\ )dx$$
$$S_1=\int_0^1 (\ 3-4\ )dx$$
$$S_1=\int_0^1 (\ 4\ )dx$$
$$S_1=\left[\ 4x\ \right]_0^1$$
$$S_1=\left[\ 4\cdot(1)\ \right]-\left[\ 4(0)\ \right]$$
$$S_1=\left[\ 4\ \right]-\left[\ 0\ \right]$$
$$S_1=\left[\ 4\ \right]$$

$$S_T=S_1+S_2$$
$$S_T=\left[\ 4\ \right]+\left[\ 2\frac{2}{3}\ \right]=6\frac{2}{3}$$

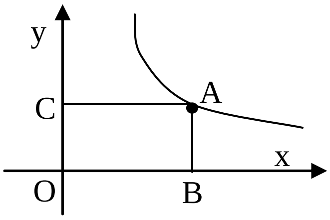
<u>תשובה סופית:</u>

א. $A(1,8)\ \ B(5,8)$ **ב.** $C(3,4)$ **ג.** $S_T=\left[\ 4\ \right]+\left[\ 2\frac{2}{3}\ \right]=6\frac{2}{3}$

שאלה מספר 5:

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{16}{x-2}$.

מנקודה A, שנמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון ,
הורידו אנך לציר ה- x ואנך לציר ה– y
כך שנוצר מלבן ABOC (ראה ציור)
(O ראשית הצירים).

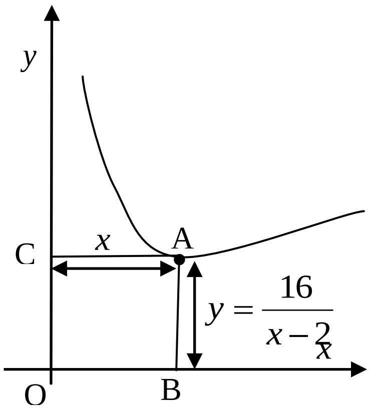


א. סמן ב– x את שיעור ה- x של הנקודה A ,
ובטא באמצעות x את אורכי הצלעות AB ו AC.

ב. מה צריך להיות שיעור ה – x של הנקודה A
כדי שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי ?

ג. חשב את ההיקף המינימלי של המלבן.

פתרון:



1. משפט המטרה: היקף המינימלי של המלבן

2. נוסחת המטרה: $p=2a+2b=2x+2y\Rightarrow \min$

3. נוסחת עזר: $y=\frac{16}{x-2}$

4. פונקציית המטרה

$p=2a+2b=2x+2y\Rightarrow \min$

$P=2(x)+2(\frac{16}{x-2})$

$$\boxed{p=2x+\frac{32}{x-2}}$$

הפונקציה

$p=2x+\frac{32}{x-2}$

$x=6$

$p=2(6)+\frac{32}{(6-2)}$

$p=20$

נגזרת ראשונה

$p\,'=2-\frac{32}{(x-2)^2}$

$p\,'=\frac{2(x-2)^2-32}{(x-2)^2}$

$p\,'=0$

$0=\frac{2(x-2)^2-32}{(x-2)^2}$

$0=2(x-2)^2-32$

$0=2(x^2-4x+4)-32$

$0=2x^2-8x+8-32$

$0=2x^2-8x-24$

$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{64-4(2)(-24)}}{2(2)}$

$x=\frac{8\pm16}{4}$

$x_1=+6 \quad x_2=-2$

נגזרת שנייה

Max/min

(מספיק לגזור את המונה
כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$p\,'(x)=+4x-8$

$p\,'(+6)=+4(+6)-8=+16 \cup \min$

$p\,'(-2)=+4(-2)-8=-16 \cap \max$

ריכוז התשובות

$x=6 \quad \min$

$p=20$

תשובה סופית :

(א) $AC=x \quad AB=\frac{16}{x-2}$

(ב) $x_A=6 \quad \min$

(ג) $p=20 \quad \min$

שאלה 6: **מיועדת רק לתלמידים שאושר להם מבחן מותאם (מדבקה סגולה)**

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a}$ (a הוא פרמטר $0<a$)

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון ב– $x=2$

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

הצב את הערך של a $a=2$ וענה על הסעיפים ב – ד .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את שיעור ה– y של נקודת הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון:

א. מצא את הערך של הפרמטר a.

נגזרת ראשונה

$f'(x)=-\frac{2a}{x^3}+\frac{1}{a}$

$f'(x)=m=0$

$x=2$

$0=-\frac{2a}{(2)^3}+\frac{1}{a}$

$0=-\frac{2a}{8}+\frac{1}{a}$

$\frac{2a}{8}=\frac{1}{a}$

$2a^2=8$

$a^2=4$

$a=+2 \qquad a>2$

הפונקציה

$p=\frac{a}{x^2}+\frac{x}{a}$

$a=2$

$f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{x}{2}$

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: $x\neq 0$

ג. מצא את שיעור ה– y של נקודת הקיצון של הפונקציה , וקבע את סוגה.

נגזרת שניה

$f'(x)=+\frac{12}{x^4}$

$f'(2)=+\frac{12}{x^4}=+\frac{12}{(2)^2}=+0.75\cup\min$

נגזרת ראשונה

$f'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2}$

$f'(x)=m=0$

$0=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2}$

$\frac{4}{x^3}=\frac{1}{2}$

$x^3=8$

$x=2$

הפונקציה

$f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{x}{2}$

$y==\frac{2}{(2)^2}+\frac{(2)}{2}=1\frac{1}{2}$

$(2,1.5)$

תשובה: $(2,1.5)\cup\min$

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

x	עלייה	x	ירידה	x	עלייה	x
$-\infty$	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x<$	$+\infty$

תשובה:

תחום עלייה: $2<x<+\infty$ ואו $-\infty<x<0$

תחום ירידה: $0<x<2$

נגזרת ראשונה

$f\,'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2}$

$f\,'(x)=m=?$

$x=-1$

$m=-\frac{4}{(-1)^3}+\frac{1}{2}$

$m=+4.5\Uparrow$

עלייה

תשובה סופית:

א. $a=2$ **ב.** $x\neq 0$ **ג.** $(2,1.5)\cup\min$

ד. **תחום עלייה:** $2<x<+\infty$ ואו $-\infty<x<0$ **תחום ירידה:** $0<x<2$