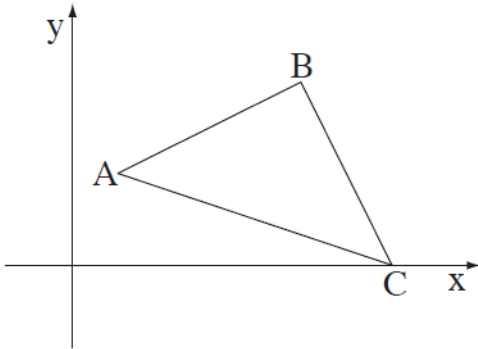


מבחן בגרות 35803 מועד א קיץ תשע"א 2011

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמהבחרתך.

שאלה מספר 1:



במשולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$)

נתון: $A(2,4)$ $B(10,8)$

הקדקוד C נמצא על ציר ה- x (ראה ציור)

(א). מצא את משוואת הצלע BC .

(ב). מצא את שיעורי הנקודה C .

(ג). מצא את משוואת המעגל שהקוטר שלו הוא AC .

(ד). האם הנקודה B נמצאת על המעגל שמצאת בסעיף ג? נמק.

פתרון:

(א) **מצא את משוואת הצלע BC .**

שיפוע AB

$A(2,4)$ $B(10,8)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{8 - 4}{10 - 2} = \frac{4}{8}$$

$$m_{AB} = \frac{1}{2}$$

שיפוע BC

$$m_{AB} = \frac{1}{2} \quad m_{BC} = -2$$

שיפוע הופכי נגדי

משוואת BC

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(10,8) \quad m = -2$$

$$y - 8 = -2(x - 10)$$

$$y = -2x + 20 + 8$$

$$y_{BC} = -2x + 28$$

תשובה: $y_{BC} = -2x + 28$

(ב) **מצא את שיעורי הנקודה C .**

נקודה C

$$y = -2x + 28$$

$$y = 0$$

$$0 = -2x + 28$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

$$C(14,0)$$

תשובה: $C(14,0)$

(ג) מצא את משוואת המעגל שהקוטר שלו הוא AC.

מרכז המעגל

$$\begin{array}{ccc} C & M & A \\ (14,0) & (x_M, y_M) & (2,4) \\ x_1, y_1 & & x_2, y_2 \\ x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} & \\ x_M = \frac{(14) + (2)}{2} & y_M = \frac{(0) + (4)}{2} & \\ x_M = 8 & y_M = 2 & \\ & M(8,2) & \end{array}$$

מציאת רדיוס המעגל R^2

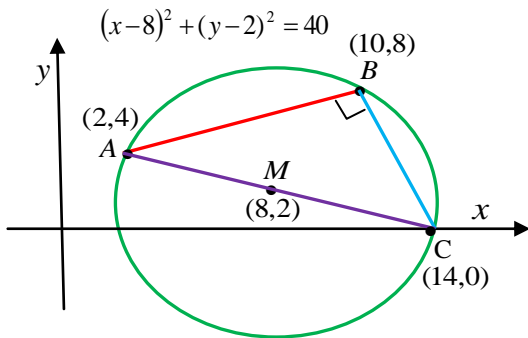
$$\begin{array}{ccc} A(2,4) & M(8,2) & \\ (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & \\ d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & & \\ d^2 = (8 - 2)^2 + (2 - 4)^2 & & \\ R^2 = d^2 = 40 & & \end{array}$$

משוואת המעגל

$$\begin{array}{ccc} M(4,1) & R^2 = 40 & \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 & & \\ (x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 40 & & \end{array}$$

תשובה: $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 40$

(ד) האם הנקודה B נמצאת על המעגל שמצאת בסעיף ג? נמק.



משוואת המעגל

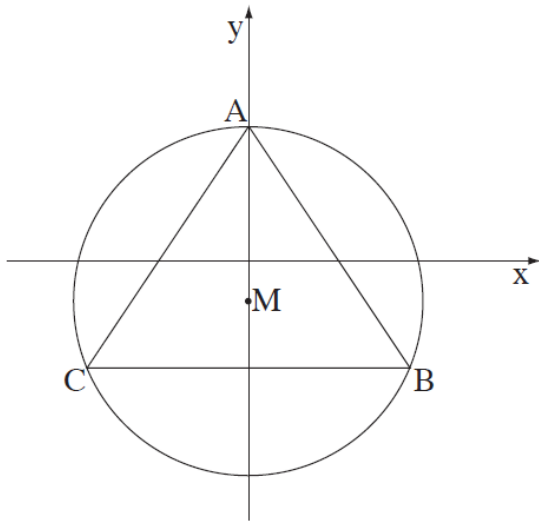
$$\begin{array}{l} (x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 40 \\ B(10,8) \\ (10 - 8)^2 + (8 - 2)^2 = 40 \\ 40 = 40 \end{array}$$

תשובה: כן, הנקודה נמצאת על המעגל

תשובה סופית:

(א) $y_{BC} = -2x + 28$. (ב) $C(14,0)$. (ג) $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 40$. (ד) כן

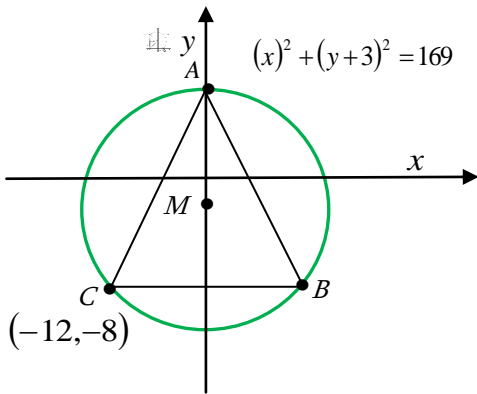
שאלה מספר 2



- המעגל $x^2 + (y+3)^2 = 169$ חותך את החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A .
 B ו- C הן נקודות על המעגל כך ש- BC מקביל לציר ה- x (ראה ציור).
 נתון כי $C(-12, -8)$
- מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .
 - חשב את אורך הקטע BC .
 - חשב את שטח המשולש ABC .
 - מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .



נקודה A

$$x^2 + (y+3)^2 = 169$$

$$x = 0$$

$$(0)^2 + (y+3)^2 = 169$$

$$(y+3)^2 = 169$$

$$y+3 = \pm\sqrt{169}$$

$$y_{1,2} = \pm 13 - 3$$

$$y_1 = -13 - 3 = -16$$

$$y_{1,2} = +13 - 3 = 10$$

$$A(10,0) \quad (-13,0)$$

נקודה B

$$x^2 + (y+3)^2 = 169$$

$$y = -8$$

$$x^2 + (-8+3)^2 = 169$$

$$x^2 = 169 - 25$$

$$x = \pm\sqrt{144}$$

$$x_{1,2} = \pm 12$$

$$x_1 = +12$$

$$x_2 = -12$$

$$B(12,-8) \quad C(-12,-8)$$

תשובה: $B(12,-8) \quad A(0,10)$

(ב) חשב את אורך הקטע BC .

מרחק BC

$$C(-12,-8) \quad B(12,-8)$$

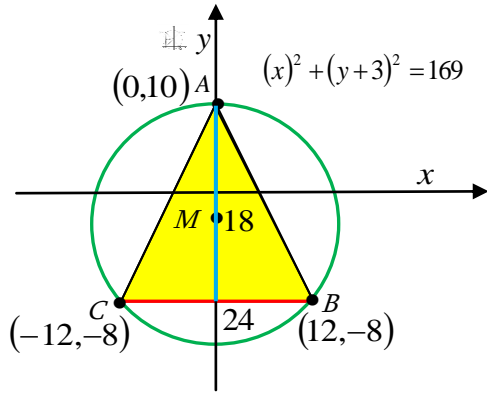
$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (12 + 12)^2 + (-8 + 8)^2$$

$$d_{BC} = 24$$

תשובה: $d_{BC} = 24$



(ג) חשב את שטח המשולש ABC.

שטח המשולש ABC

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{24 \cdot 18}{2} \quad S_{ABC} = 216$$

תשובה: $S_{ABC} = 216$

(ד) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

משיק לנקודה A משמעות השיפוע $m = 0$

משוואת משיק ל - A

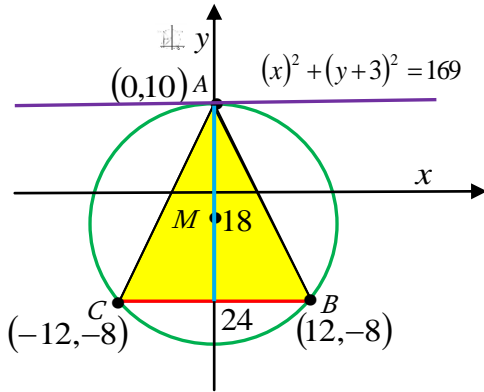
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(0,10) \quad m = 0$$

$$y - 10 = 0(x - 0)$$

$$y = 10$$

תשובה: $y = 10$



תשובה סופית:

(א) $A(0,10)$ (ב) $d_{BC} = 24$ (ג) $S_{ABC} = 216$ (ד) $y = 10$

שאלה מספר 3

בחנות מכולת מוכרים חפיסות שוקולד משני סוגים : שוקולד פשוט ושוקולד מיוחד. מחיר חפיסת שוקולד פשוט הוא x שקלים. יוסי ודני הלכו למכולת לקנות שוקולד. יוסי קנה שתי חפיסות של שוקולד מיוחד, ושילם בעבור כל אחת מהן 50% יותר ממחיר חפיסת שוקולד פשוט. (א) הבע באמצעות x את הסכום הכולל ששילם יוסי.

דני קנה במבצע שתי חפיסות שוקולד פשוט, ושילם בעבור כל אחת מהן 20% פחות מהמחיר הרגיל של חפיסת שוקולד פשוט.

(ב) הבע באמצעות x את הסכום הכולל ששילם דני.

ידוע כי יוסי ודני שילמו יחד **שלושה** שקלים יותר ממחיר ארבע חפיסות שוקולד פשוט (שאינו במבצע) (ג) מצא את המחיר הרגיל של חפיסת שוקולד פשוט.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

פחות -20%
 $1 - \frac{20}{100} = 0.8$

יותר ב 50%
 $1 + \frac{50}{100} = 1.5$

נתונים
 הגדרת המשתנים: x - מחיר שוקולד פשוט

משוואה	שוקולד מיוחד		פעולה	שוקולד פשוט		
	סה"כ	מחיר		כמות	מחיר	
	$4x$			4	x	
	$2 \cdot 1.5x = 3x$	2	$1.5x$		x	יוסי
	$2 \cdot 0.8x = 1.6x$			2	$0.8x$	דני
$(3x + 1.6x) - (4x) = 3$						

(א) הבע באמצעות x את הסכום הכולל ששילם יוסי.

תשובה: $2 \cdot 1.5x = 3x$

(ב) הבע באמצעות x את הסכום הכולל ששילם דני.

תשובה: $2 \cdot 0.8x = 1.6x$

ידוע כי יוסי ודני שילמו יחד שלושה שקלים יותר ממחיר 4 חפיסות שוקולד פשוט (שאינו במבצע) (ג) מצא את המחיר הרגיל של חפיסת שוקולד פשוט.

$(3x + 1.6x) - (4x) = 3$

$0.6x = 3$

$x = 5$

תשובה: 5 ₪.

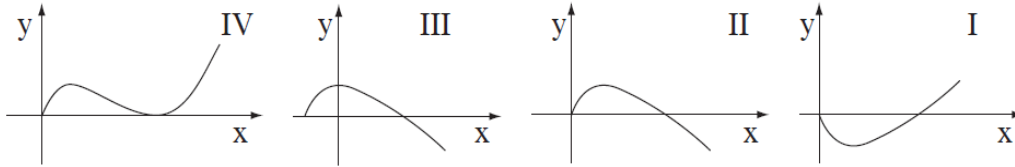
תשובה סופית :

(א) $2 \cdot 1.5x = 3x$ (ב) $2 \cdot 0.8x = 1.6x$ (ג) 5 ₪.

שאלה מספר 4

נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} - x$:

- (א) (1) מצא את תחום הגדרה של הפונקציה.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 (3) מצא נקודת קיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.
 (ב) לפיך ארבעה גרפים I, II, III, IV, איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



(ג) נתון הישר $y = k$ (k הוא פרמטר), מצא עבור אילו ערכים של k הישר חותך את הפונקציה הנתונה בשתי נקודות שונות.

פתרון:

(א) (1) **מצא את תחום הגדרה של הפונקציה.**

תשובה: תחום ההגדרה: לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד $x \geq 0$.

(א) (2) **מצא נקודת קיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.**

$f(x) = a\sqrt{bx}$
 $f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$

פונקציה
 $y = ?$
 $f(x) = 2\sqrt{x} - x$
 $x = 1$
 $f'(1) = 2\sqrt{(1)} - (1)$
 $y = 1$
 $(1,1)$

נגזרת ראשונה
 $m = 0$
 $f'(x) = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 1$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$
 $1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\sqrt{x} = 1/(\)^2$
 $(\sqrt{x})^2 = (1)^2$
 $x = 1$

נגזרת שנייה
 \max/\min
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1/\sqrt{x}$
 $f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)
 $f''(x) = -\frac{1 \cdot 1}{2\sqrt{x}}$
 $f''(1) = -\frac{1}{2\sqrt{(1)}} = -\frac{1}{2} \cap \max$

נקודות הקיצון:
 $(1,1) \cap \max$

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

חיתוך עם ציר x

$$y=0$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

$$0 = 2\sqrt{x} - x$$

$$x = 2\sqrt{x} / ()^2$$

$$(x)^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$x^2 = 4x$$

$$0 = 4x - x^2$$

$$0 = x \cdot (4 - x)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$(4,0) \quad (0,0)$$

חיתוך עם ציר y

$$x=0$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

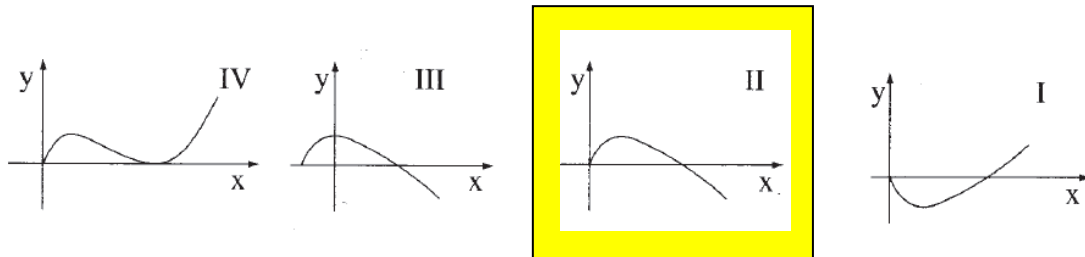
$$x = 0$$

$$y = 2\sqrt{(0)} - (0)$$

$$y = 0$$

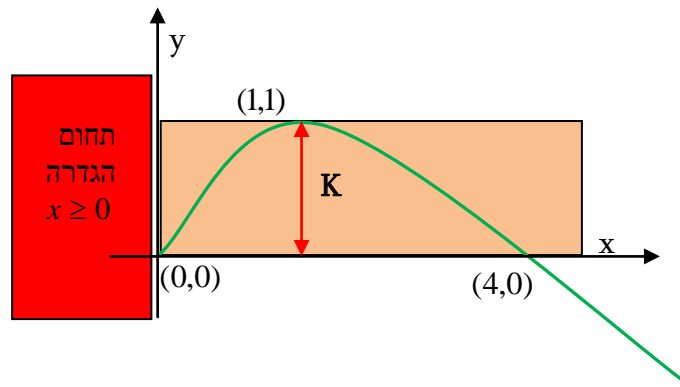
$$(0,0)$$

(ב.) לפניך ארבעה גרפים, איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



תשובה: גרף מספר 2 מתאים לנקודת קיצון $\max (1,1)$

לנקודות חיתוך עם הצירים $(0,0)$ ו $(4,0)$ לתחום ההגדרה: $x \geq 0$.



(ג.) נתון הישר $y = k$ (k הוא פרמטר), מצא עבור אילו ערכים של k הישר חותך את הפונקציה הנתונה בשתי נקודות שונות. בין $y = 0$ לבין $y = 1$

תשובה: הישר $y = k$ כאשר $(0 \leq K < 1)$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות

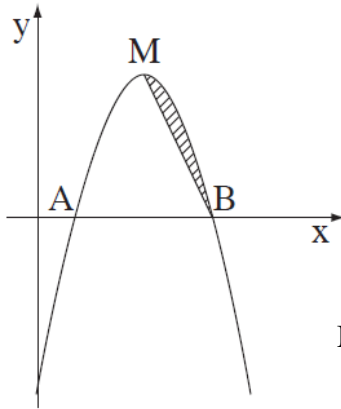
תשובה סופית:

(1א) $x \geq 0$ (2א) $(0,0)(4,0)$ (3א) $\max (1,1)$

(ב.) גרף מספר II מתאים לנקודת קיצון $\max (1,1)$ לנקודות חיתוך עם הצירים $(4,0)(0,0)$

ו לתחום ההגדרה: $x \geq 0$ (ג) $(0 \leq K < 1)$

שאלה מספר 5



גרף הפרבולה $y = -x^2 + 6x - 5$

חותך את ציר ה- x בנקודה A ו-B. (ראה ציור). הנקודה M היא נקודת המקסימום של הפרבולה.

- (א). מצא את שיעורי הנקודות M ו-B.
- (ב). מצא את משוואת הישר MB.
- (ג). חשב את השטח המוגבל על-ידי הפרבולה ועל-ידי הישר MB (השטח המקוקו בציור).

פתרון

(א). מצא את שיעורי הנקודות M ו-B.

נקודות BA

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$$x = 0$$

$$0 = -x^2 + 6x - 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

A(1,0) B(5,0)

נקודה M המקסימום

$$y = -x^2 + 6x - 5 \quad y' = -2x + 6$$

$$x = 3 \quad m = 0$$

$$y = -(3)^2 + 6(3) - 5 \quad 0 = -2x + 6$$

$$y = 4 \quad 2x = 6$$

$$(3,4) \quad x = 3$$

תשובה: M(3,4) B(5,0)

(ב). מצא את משוואת הישר MB.

משוואת הישר MB

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

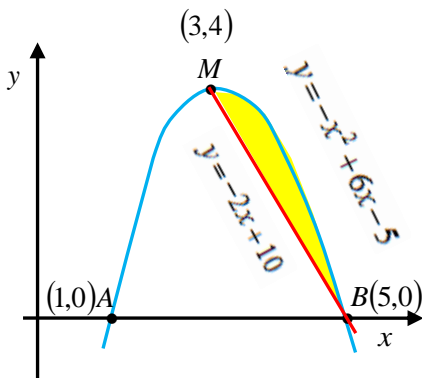
$$(3,4) \quad m = \frac{4 - 0}{3 - 5} = -2$$

$$y - 4 = -2(x - 3)$$

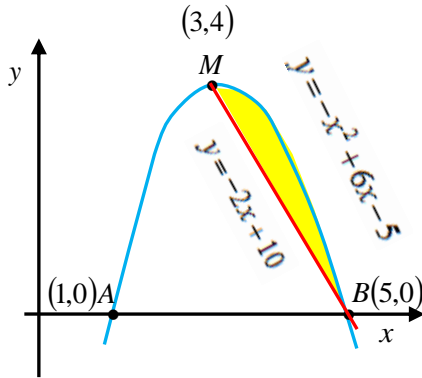
$$y = -2x + 6 + 4$$

$$y_{MB} = -2x + 10$$

תשובה: $y_{MB} = -2x + 10$



(ב). חשב את השטח המוגבל על-ידי הפרבולה ועל-ידי הישר MB (השטח המקווקו בצירור).



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = -x^2 + 6x - 5$	גדול/ימין
$x = 3$	פונקציה תחתונה	$x = 5$
	$y = -2x + 10$	

$$S_T = \int_{(x \text{ קטן})}^{(x \text{ גדול})} (\text{פונקציה עליונה}) - (\text{פונקציה תחתונה}) dx$$

$$S_T = \int_3^5 (-x^2 + 6x - 5) - (-2x + 10) dx$$

$$S_T = \int_3^5 (-x^2 + 6x - 5 + 2x - 10) dx$$

$$S_T = \int_3^5 (-x^2 + 8x - 15) dx$$

$$S_T = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 15x \right]_3^5$$

$$S_T = \left[-\frac{(5)^3}{3} + \frac{8(5)^2}{2} - 15(5) \right] - \left[-\frac{(3)^3}{3} + \frac{8(3)^2}{2} - 15(3) \right]$$

$$S_T = \left[-16\frac{2}{3} \right] - [-18]$$

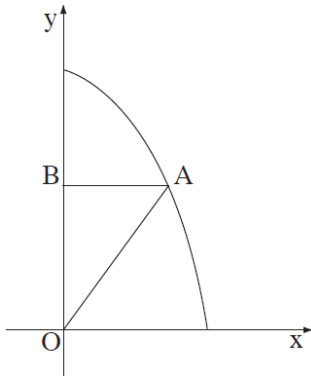
$$S_T = 1\frac{1}{3}$$

תשובה: $S = 1\frac{1}{3}$

תשובה סופית:

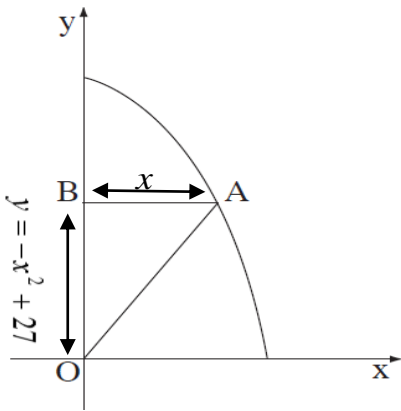
(א). $M(3,4)$ $B(5,0)$ (ב) $y_{MB} = -2x + 10$ (ג). $S = 1\frac{1}{3}$

שאלה מספר 6



נתון גרף הפונקציה $y = -x^2 + 27$ ברביע הראשון.
 ישר המקביל לציר ה- x חותך את גרף הפונקציה
 בנקודה A שנמצאת ברביע הראשון,
 ואת ציר ה- y בנקודה B.
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים O. (ראה ציור)
(א) מה צריך להיות אורך הקטע AB
 כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
(ב) מהו השטח המקסימלי של משולש AOB?

פתרון:



1. משפט המטרה: שטח המשולש AOB יהיה מקסימלי

2. נוסחת המטרה: $p = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow \max$

3. נוסחת עזר: $y = -x^2 + 27$

4. פונקציית המטרה $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow \max$

$$p = \frac{(x) \cdot (-x^2 + 27)}{2}$$

$$p = \frac{-1x^3 + 27x}{2}$$

$$P = \frac{-1x^3}{2} + \frac{27x}{2}$$

$$p = -0.5x^3 + 13.5x$$

הפונקציה

$$P = -0.5x^3 + 13.5x$$

$$x = 3$$

$$P = -0.5(3)^3 + 13.5(3)$$

$$P = 27$$

נגזרת ראשונה

$$P' = -1.5x^2 + 13.5$$

$$P' = 0$$

$$0 = -1.5x^2 + 13.5$$

$$1.5x^2 = 13.5$$

$$x^2 = 9 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = +3 \quad x_2 = -3$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$P''(x) = -3x$$

$$P''(3) = -3(3) = -9 \cap \max$$

$$P''(-3) = -3(-3) = +9 \cup \min$$

ריכוז התשובות

$$x = 3 \quad \max$$

$$y_A = 18$$

$$p = 27$$

$$x = 3$$

$$y_A = -x^2 + 27 = -(3)^2 + 27 = 18$$

$$A(3,18)$$

תשובה סופית:

(ב.) $S = 27 \max$

(א) $AB = 3 \max$