

מבחן בגרות 35803 מועד חצב/ ברק תשע"א 2011

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1:

חברת תיקשורת מסוימת מוכרת מכשירי טלפון ניידים משני דגמים: דגם א' שמחירו x שקלים ודגם ב' שמחירו y שקלים. יוסי קנה מהחברה 5 מכשירים מדגם א' ו- 7 מכשירים מדגם ב'. (א) הבע באמצעות x ו- y את הסכום הכולל ששילם יוסי. לאחר כמה ימים ערכה החברה מבצע והוזילה את מחיר המכשיר מדגם א ב- 400 שקלים ואת מחיר המכשיר מדגם ב' ב- 20%. (ב) הבע באמצעות x ו- y (או אחד מהם) את: (1) מחירו של כל דגם בזמן המבצע. (2) הסכום הכולל שהיה יוסי משלם עבור קנייתו אילו היה רוכש את המכשירים בזמן המבצע. (ג) ידוע כי יוסי שילם עבור המכשירים שרכש (לפני המבצע) 40,400 שקלים, אך אילו היה רוכש את המכשירים בזמן המבצע היה משלם עבורם 33,920 שקלים. מצא את המחיר המקורי של כל אחד מהדגמים (לפני המבצע).

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

הוזלה -20%

$$1 - \frac{20}{100} = 0.8$$

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר דגם א', y - מחיר דגם ב'

משוואה	סה"כ	מכשיר דגם ב'		פעולה	מכשיר דגם א'		
		מחיר	כמות		מחיר	כמות	
$5x + 7y = 40,400$	40,400	y	7	+	x	5	לפני ההנחה
$5 \cdot (x - 400) + 7 \cdot 0.8y = 33,290$	33,920	0.8y	7	+	x - 400	5	לאחר הנחה

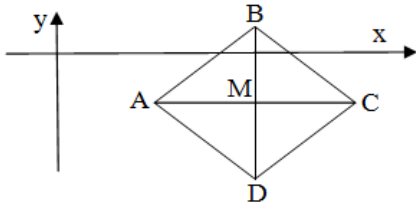
$5x + 7y = 40,400$ $5 \cdot (x - 400) + 7 \cdot 0.8y = 33,920$ $5x - 2000 + 5.6y = 33,920$ $5x + 5.6y = 35,920$	$\begin{cases} 5x + 7y = 40,400 \\ 5x + 5.6y = 35,920 \quad /-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 7y = 40,400 \\ -5x - 5.6y = -35,920 \end{cases}$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $1.4y = 4480$ $y = 3200$	$5x + 7y = 40,400$ $y = 3200$ $5x + 7(3200) = 40,400$ $5x + 22,400 = 40,400$ $5x = 18,000$ $x = 3,600$
---	--	--

תשובה סופית:

(א) $5x + 7y$ (ב) $(0.8y, x - 400)$ (ג) נש 3,600 דגם א', נש 3,200 דגם ב'

שאלה מספר 2

בציור שלפניך מעוין $ABCD$. האלכסון AC מקביל לציר ה- x .
 M - נקודת המפגש של האלכסונים.

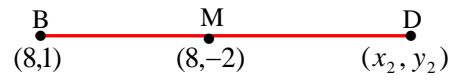
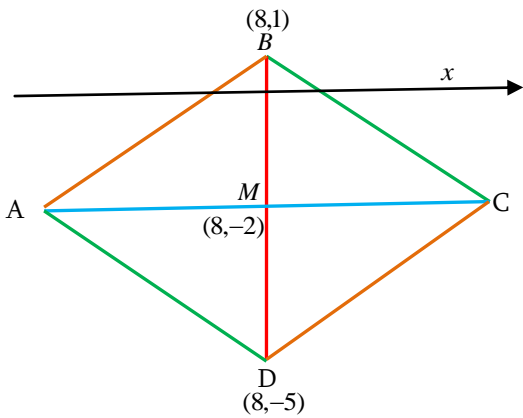


נתון כי: $B(8, 1)$, $M(8, -2)$

- (א) מצא את שיעורי הקודקוד D .
- (ב) מצא את משוואת האלכסון AC .
- (ג) נתון כי משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB היא: $y = \frac{3}{4}x - 5$ מצא את שיעורי הנקודה A .
- (ד) מצא את שטח המעוין $ABCD$.

פתרון:

(א) **מצא את שיעורי הקודקוד D .**



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$8 = \frac{(8) + x_2}{2} \qquad -2 = \frac{(1) + y_2}{2}$$

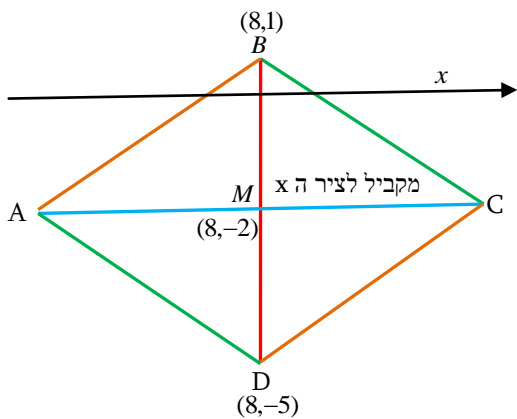
$$16 = 8 + x_2 \qquad -4 = 1 + y_2$$

$$x_2 = 8 \qquad y_2 = -5$$

$D(8, -5)$

תשובה: $D(8, -5)$

(ב) **מצא את משוואת האלכסון AC .**



שיפוע AC

$$m_{AC} = 0$$

מקביל לציר x

משוואת AC

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

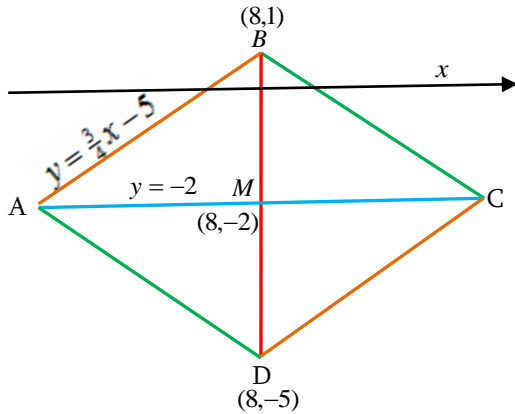
$$m_{AB} = 0 \quad M(8, -2)$$

$$y + 2 = 0(x - 8)$$

$$y = -2$$

תשובה: $y_{AC} = -2$

(ג) נתון כי משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AB היא : $y = \frac{3}{4}x - 5$ מצא את שיעורי הנקודה A



נקודה A

$$y_{AB} = y_{AC}$$

$$\frac{3}{4}x - 5 = -2$$

$$\frac{3}{4}x = 5 - 2$$

$$\frac{3}{4}x = 3$$

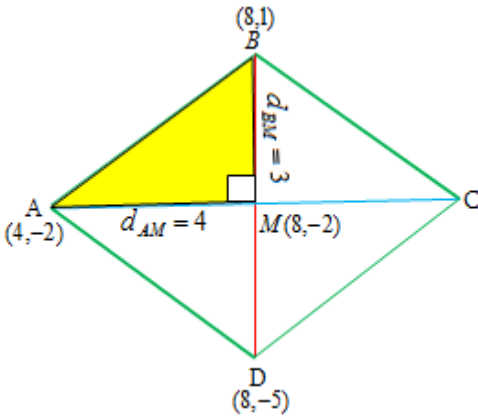
$$x = 4$$

$$A(4, -2)$$

תשובה: $A(4, -2)$

(ד) מצא את שטח המעוין ABCD.

נחשב שטח המעוין ע"י חישוב שטח המשולש AMB ונכפיל אותו פי 4.



אורך הקטע BM

$$B(8,1) \quad M(8,-2)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (8 - 8)^2 + (-2 - 1)^2$$

$$d = \sqrt{9}$$

$$d_{BM} = 3$$

אורך הקטע AM

$$A(4, -2) \quad M(8, -2)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (8 - 4)^2 + (-2 + 2)^2$$

$$d = \sqrt{16}$$

$$d_{AM} = 4$$

שטח המשולש AMB

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{AMB} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$S_{AMB} = 6$$

שטח המעוין ABCD

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{AMB}$$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot 6$$

$$S_{ABCD} = 24$$

תשובה: $S_{ABCD} = 24$

תשובה סופית:

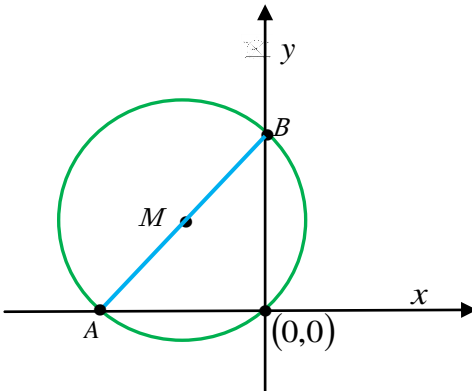
$S_{ABCD} = 24$ (ד) $A(4, -2)$ (ג) $y_{AC} = -2$ (ב) $D(8, -5)$ (א)

שאלה מספר 3:

- הישר $y = \frac{4}{3}x + 8$ חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. הקטע AB הוא קוטר המעגל.
- (א). (1) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B ואת שיעורי הנקודה של מרכז המעגל.
 (2) מצא את משוואת המעגל.
- (ב). הראה שהמעגל עובר דרך ראשית הצירים.
- (ג). מצא את משוואת הישר המשיק למעגל בראשית הצירים.

פתרון:

(1א) מצא את שיעורי מרכז המעגל



נקודה A	נקודה B
$y = \frac{4}{3}x + 8$	$y = \frac{4}{3}x + 8$
$y = 0$	$x = 0$
$0 = \frac{4}{3}x + 8$	$y = \frac{4}{3}(0) + 8$
$\frac{4}{3}x = -8$	$y = 8$
$A(-6,0)$	$B(0,8)$

נקודה M		
A	M	C
$(-6,0)$	(x_M, y_M)	$(0,8)$
$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$	
$x_M = \frac{-6 + 0}{2}$	$y_M = \frac{0 + 8}{2}$	
$x_M = -3$	$y_M = 4$	
$M(-3,4)$		

תשובה: $M(-3,4)$ $A(0,8)$ $B(-6,0)$

משוואת המעגל

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$M(-3,4)$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = R^2$$

$$B(0,8)$$

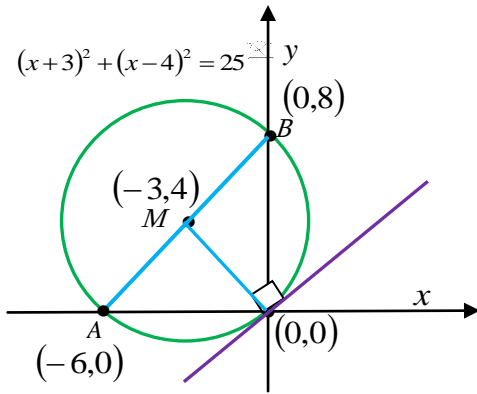
$$(0 + 3)^2 + (8 - 4)^2 = R^2$$

$$25 = R^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

(2א) מצא את משוואת המעגל.

תשובה: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$



(ב) הראה שהמעגל עובר דרך ראשית הצירים.

משוואת המעגל

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$(0,0)$$

$$(0+3)^2 + (0-4)^2 = 25$$

$$25 = 25$$

תשובה: הוכחה $25 = 25$

(ג) מצא את משוואת הישר המשיק למעגל בראשית הצירים.

שיפוע MO

$$M(-3,4) \quad O(0,0)$$

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{MA} = \frac{(0) - (4)}{(0) - (-3)} = \frac{-4}{3}$$

$$m_{MA} = -\frac{4}{3}$$

שיפוע משיק

$$m_{MA} = -\frac{4}{3} \quad m_{\text{משיק}} = \frac{3}{4}$$

שיפוע הופכי נגדי

משוואת משיק

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(0,0) \quad m = \frac{3}{4}$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

תשובה: $y = \frac{3}{4}x$

תשובות:

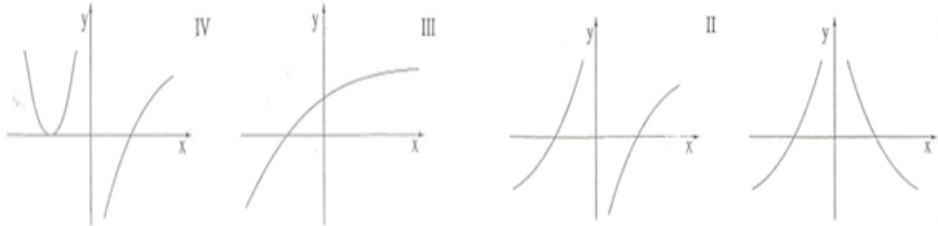
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (2א) \quad M(-3,4) \quad A(0,8) \quad B(-6,0) \quad (1א)$$

$$y = \frac{3}{4}x \quad (ג) \quad 25 = 25 \quad (ב) \quad \text{הוכחה}$$

שאלה מספר 4: מבחן בגרות 35803 מועד חצב/ ברק תשע"א.

נתונה פונקציה $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$.

- (א) . רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) . מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- (ג) . הראה כי לפונקציה אין נקודת קיצון.
- (ד) . נמק מדוע הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה.
- (ה) . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה . נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 2.
- (ו) . לפניך ארבעה גרפים I , II , III , IV איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה ? נמק.



פתרון:

(א) . **רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

תשובה: תחום הגדרה = $x \neq 0$ האסימפטוטה $x = 0$

(ב) . **מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .**

חיתוך עם ציר x

$y=0$
 $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$
 $0 = \frac{x}{2} - \frac{8}{x} / 2x$
 $0 = x^2 - 16$

$x^2 = 16$
 $x_{1,2} = \pm\sqrt{16}$
 $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$
(4,0) (-4,0)

(ג) . **הראה כי לפונקציה אין נקודת קיצון.**

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$
 $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

פונקציה
 $x ; y$
 $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$

נגזרת ראשונה
 $x ; m$
 $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$
 $-\frac{1}{2} = \frac{8}{x^2}$
 $x^2 = -16$
 $x = \pm\sqrt{-16}$

השורש במינוס לא קיימת נקודת קיצון

(ד) נמק מדוע הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה.

פונקציה $x; y$		נגזרת ראשונה $x; m$	
$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$		$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$	
x	עלייה	x $x \neq 0$	עלייה
$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$
			$+\infty$

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$$

$$x = -1$$

$$f'(x = -1) = \frac{1}{2} + \frac{8}{(-1)^2}$$

$$m = +8\frac{1}{2} \uparrow$$

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$$

$$x = 1$$

$$f'(x = 1) = \frac{1}{2} + \frac{8}{(1)^2}$$

$$m = +8\frac{1}{2} \uparrow$$

תשובה: השיפוע חיובי משני צדדי האסימפטוטה לכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה.

(ה) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה. נתון כי שיעור ה-x של הנקודה A הוא 2. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

פונקציה
 $x; y$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$$

$$f(2) = \frac{(2)}{2} - \frac{8}{(2)} = -3$$

(2,-3)

נגזרת ראשונה
 $x; m$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{8}{(2)^2} =$$

$$m = 2.5$$

משוואת משיק (ישר)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

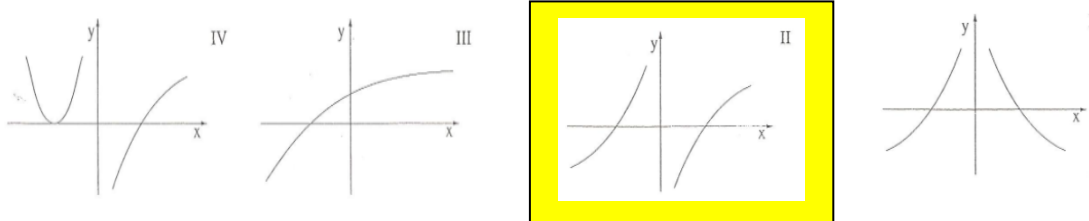
$$(2,3) \quad m = 2.5$$

$$(y + 3) = 2.5(x - 2)$$

$$y = 2.5x - 5 + 3$$

$$y = 2.5x - 8$$

(ו) לפניך ארבעה גרפים I, II, III, IV איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



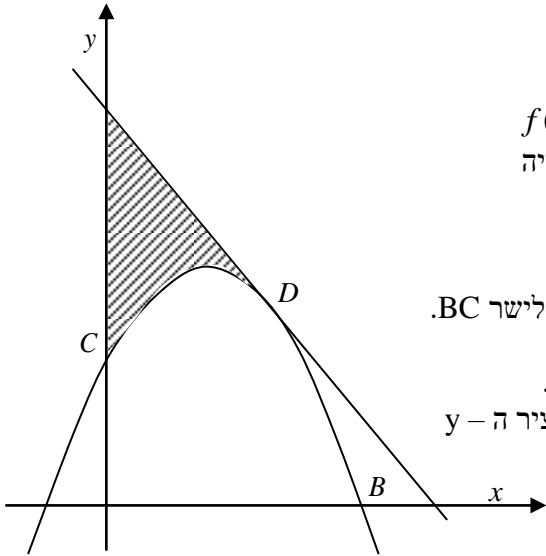
תשובה: הגרף המתאים הוא גרף מספר 2

הגרף חותך את ציר ה-x בשני מקומות וקיימת עלייה משני צדדי האסימפטוטה של $x = 0$

תשובה סופית:

- (א) $x \neq 0$ (ב) $(-4,0)$ $(4,0)$ (ג) $x \neq \sqrt{-16}$ (ד) כל מס' שנציב ב נגזרת הראשונה נקבל תוצאה חיובית. (ה) $y = 2.5x - 8$ (ו) הגרף המתאים הוא גרף מספר II הגרף חותך את ציר ה-x בשני מקומות וקיימת עלייה משני צדדי האסימפטוטה של $x = 0$

שאלה מספר 5



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ הנקודות B ו-C הן שתיים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים. (כמתואר בציור).

- (א) מצא את שיעור הנקודות B ו-C.
 (2) מצא את שיפועו של הישר BC.
 (ב) נתון כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה D מקביל לישר BC.
 (1) מצא את שיעורי נקודת ההשקה D.
 (2) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה D.
 (ג) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-y (השטח המקוקו בציור).

פתרון:

(1א) מצא את שיעור הנקודות B ו-C.

נקודה B

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$$

$$y = 0$$

$$0 = -2x^2 + 3x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2)(2)}}{2(-2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$x_B = 2 \quad x_2 = -0.5$$

$$B(2,0)$$

נקודה C

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$$

$$x = 0$$

$$y = -2(0)^2 + 3(0) + 2$$

$$y = 2$$

$$C(0,2)$$

תשובה: C(0,2) B(2,0)

(2א) מצא את שיפועו של הישר BC.

שיפוע BC

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

(ב) נתון כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה D מקביל לישר BC.

(1) מצא את שיעורי נקודת ההשקה D.

(2) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה D.

"קווים מקבילים שיפועים זהים"

$$m_{BC} = m_{\text{משיק}}$$

נקודה D

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$$

$$x_D = 1$$

$$y = -2(1)^2 + 3(1) + 2$$

$$y_D = 3$$

$$D(1,3)$$

נגזרת/שיפוע

$$f'(x) = -4x + 3$$

$$f'(x) = m = -1$$

$$-1 = -4x + 3$$

$$4x = 4$$

$$x_D = 1$$

משוואת משיק D

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

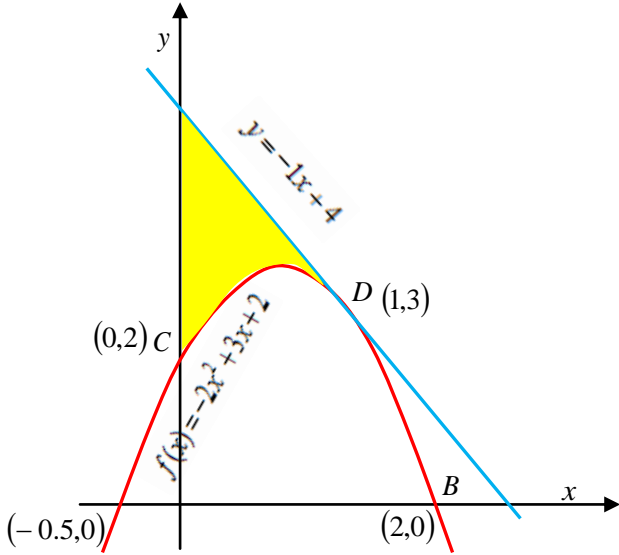
$$(1,3) \quad m = -1$$

$$y - 3 = -1(x - 1)$$

$$y = -1x + 1 + 3$$

$$y_{\text{משיק}} = -1x + 4$$

(ג) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- y (השטח המקווקו בצירור).



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = -1x + 4$	גדול/ימין
$x = 0$	פונקציה תחתונה	$x = 1$
	$y = -2x^2 + 3x + 2$	

$$S_T = \int_{\text{קטן } x}^{\text{גדול } x} (\text{פונקציה עליונה}) - (\text{פונקציה תחתונה}) dx$$

$$S_T = \int_0^1 (-1x + 4) - (-2x^2 + 3x + 2) dx$$

$$S_T = \int_0^1 (-1x + 4 + 2x^2 - 3x - 2) dx$$

$$S_T = \int_0^1 (2x^2 - 4x + 2) dx$$

$$S_T = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$S_T = \left[\frac{2(1)^3}{3} - \frac{4(1)^2}{2} + 2(1) \right] - \left[\frac{2(0)^3}{3} - \frac{4(0)^2}{2} + 2(0) \right]$$

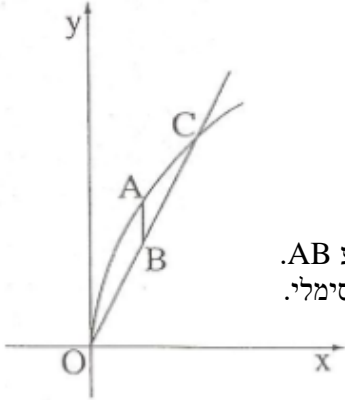
$$S_T = \left[\frac{2}{3} \right] - [0]$$

$$S_T = \frac{2}{3}$$

תשובה סופית:

$S = \frac{2}{3}$ (ג) $y_D = -1x + 4$ (ב2) $D(1,3)$ (ב1) $M_{BC} = -1$ (א2) $C(0,2)$ $B(2,0)$ (א1)

שאלה מספר 6 :



בציור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x}$ והישר $y = 2x$.
 גרף הפונקציה והישר נחתכים בנקודות O ו-C (ראשית הצירים).
 ישר המקביל לציר ה-y חותך את גרף הפונקציה ואת הישר
 (בין הנקודות O ו-C), כך ש-A היא נקודת החיתוך עם $f(x)$
 ו-B היא נקודת החיתוך עם הישר (ראה ציור).
(א) סמן ב-x את שיעור ה-x של הנקודה B. ובטא באמצעותו את אורך הקטע AB.
(ב) מצא את שיעור ה-x של הנקודה B. שעבורה אורך הקטע AB הוא מקסימלי.
(2) מהו האורך המקסימלי של הקטע AB.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** האורך המקסימלי של הקטע AB.

2. **נוסחת המטרה:** $p = y_A - y_B \Rightarrow \max$

3. **נוסחת עזר:** $y_A = 2\sqrt{x}$ $y_B = 2x$

4. **פונקציית המטרה**
 $p_{AB} = y_A - y_B \Rightarrow \max$
 $p_{AB} = [2\sqrt{x}] - [2x]$

$p_{AB} = 2\sqrt{x} - 2x$

$f(x) = a\sqrt{bx}$
 $f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$

הפונקציה

$x ; y$
 $p = 2\sqrt{x} - 2x$
 $x = 0.25$
 $p = 2\sqrt{(0.25)} - 2(0.25)$
 $p = 0.5$

נגזרת ראשונה

$x ; m$
 $p' = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2\sqrt{x}} - 2$
 $p' = 0$
 $0 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2$
 $2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $2\sqrt{x} = 1 / : 2$
 $\sqrt{x} = 0.5 / ()^2$
 $(\sqrt{x})^2 = (0.5)^2$
 $x = 0.25$

נגזרת שנייה

$\min ; \max$
 $p' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 / \sqrt{x}$
 $p' = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)
 $p''(x) = -\frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$
 $p''(0.25) = -\frac{1}{\sqrt{0.25}} = -2 \cap \max$

$x = 0.25$
 $y_A = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{0.25} = 1$
 $y_B = 2x = 2(0.25) = 0.5$

ריכוז התשובות

$x = 0.25$ \max
 $y_A = 1$
 $y_B = 0.5$
 $p = 0.5$

תשובה סופית:

(א) $p_{AB} = 2\sqrt{x} - 2x$ **(ב)** $x_B = 0.25 \Rightarrow \max$ **(ג)** $p = 0.5 \Rightarrow \max$