

מבחן בגרות 35803 מועד חורף תשע"ב 2012

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

סוחר קנה שולחנות במחיר x שקלים לשולחן. בסך הכול שילם הסוחר עבור השולחנות 2400 שקלים. לאחר מכן מכר הסוחר את כל השולחנות שקנה. 5 שולחנות הוא מחר בהפסד של 10% לשולחן, ואת שאר השולחנות הוא מכר ברווח של 20% לשולחן. הסכום הכולל שקיבל הסוחר ממכירת השולחנות היה 2700 שקלים.
 (א) מצא את המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן.
 (ב) מצא את מספר השולחנות שקנה הסוחר.

פתרון

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה, יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר שולחן y - כמות שולחנות
 רווח של 20% $1 + \frac{20}{100} = 1.2$
 הפסד ב- 10% $1 - \frac{10}{100} = 0.9$

משוואה	שולחנות			
	סה"כ	כמות	מחיר	
$x \cdot y = 2400$	2400	y	x	קניה
	$5 \cdot 0.9x = 4.5x$	5	$0.9x$	מכירה 1
	$1.2x(y - 5) = 1.2xy - 6x$	$y - 5$	$1.2x$	מכירה 2
$4.5x + 1.2xy - 6x = 2700$				

$$\begin{array}{l}
 x \cdot y = 2400 \\
 y = \frac{2400}{x} \\
 4.5x + 1.2xy - 6x = 2700 \\
 1.2 \cdot 2400 - 1.5x = 2700 \\
 2880 - 1.5x = 2700 \\
 180 = 1.5x \\
 x = 120 \\
 y = \frac{2400}{120} \\
 y = 20
 \end{array}$$

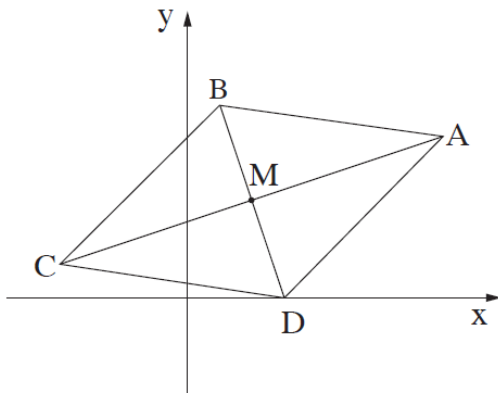
(א) מצא את המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן. **תשובה:** $x = 120$ הסוחר שילם 120 שקלים עבור כל שולחן

(ב) מצא את מספר השולחנות שקנה הסוחר. **תשובה:** $y = 20$ הסוחר קנה 20 שולחנות.

תשובה סופית:

(א) הסוחר שילם 120 שקלים עבור כל שולחן (ב) הסוחר קנה 20 שולחנות.

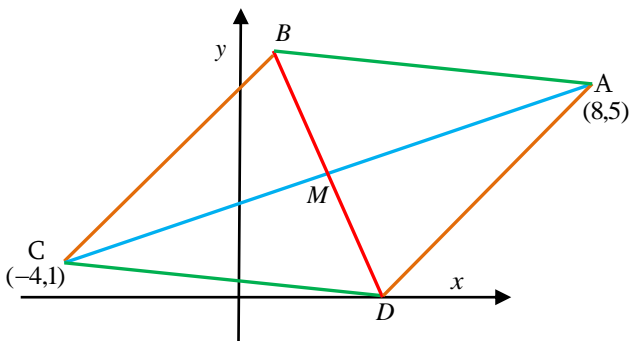
שאלה מספר 2:



- לפניך מעוין ABCD אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M (ראה ציור) נתון: $C(-4,1)$ $A(8,5)$
- מצא את שיעורי הנקודה M.
 - מצא את משוואת האלכסון BD.
 - נתון שהנקודה D נמצאת על ציר ה-x, מצא את שיעורי הנקודות D ו-B.
 - מצא את שטח המעוין.

פתרון:

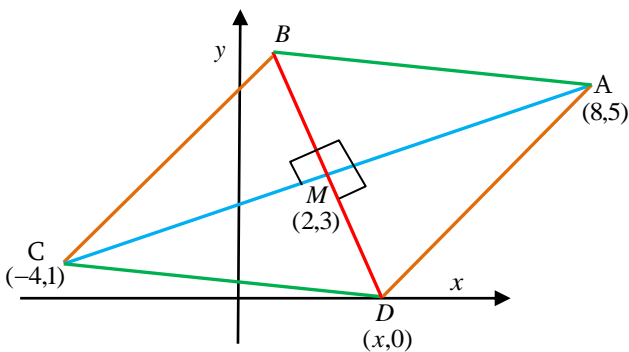
(א) מצא את שיעורי הנקודה M.



C	M	A
$(-4,1)$	(x_M, y_M)	$(8,5)$
x_1, y_1		x_2, y_2
$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$		$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$
$x_M = \frac{(-4) + (8)}{2}$		$y_M = \frac{(1) + (5)}{2}$
$x_M = 2$	$M(2,3)$	$y_M = 3$

תשובה: $M(2,3)$

(ב) מצא את משוואת האלכסון BD.



<u>שיפוע AC</u>	<u>שיפוע BD</u>
$A(8,5)$ $C(-4,1)$	$m_{AC} = \frac{1}{3}$ $m_{BD} = -3$
(x_1, y_1) (x_2, y_2)	שיפוע הופכי נגדי
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
$m_{AC} = \frac{(1) - (5)}{(-4) - (8)} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$	

משוואת BD

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(2,3) \quad m = -3$$

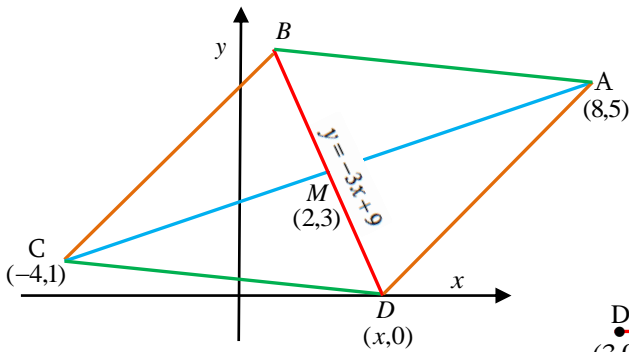
$$y - 3 = -3(x - 2)$$

$$y = -3x + 6 + 3$$

$$y = -3x + 9$$

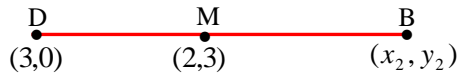
תשובה: $y_{BD} = -3x + 9$

(ג). נתון שהנקודה D נמצאת על ציר ה-x, מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.



נקודה D

$$\begin{aligned} y &= -3x + 9 \\ y &= 0 \\ 0 &= -3x + 9 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \\ D &= (3, 0) \end{aligned}$$

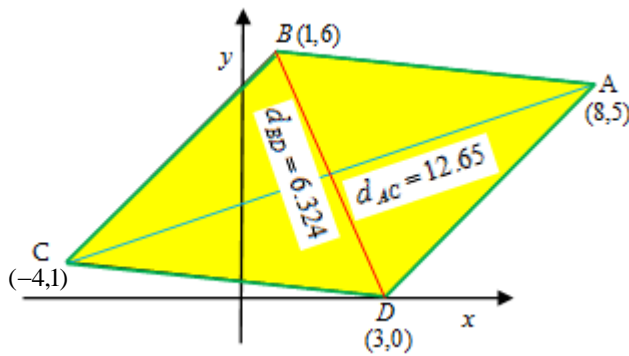


$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ 2 &= \frac{(-4) + x_2}{2} & 3 &= \frac{1 + y_2}{2} \\ 4 &= -4 + x_2 & 6 &= 1 + y_2 \\ x_2 &= 8 & y_2 &= 5 \end{aligned}$$

תשובה: D(3,0) B(8,5)

(ד). מצא את שטח המעוין.

נחשב שטח המעוין לפי הנוסחה מכפלת האלכסונים חלקי 2



אורך האלכסון AC

$$\begin{aligned} A(8,5) \quad C(-4,1) \\ d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ d^2 &= (-4 - 8)^2 + (1 - 5)^2 \\ d &= \sqrt{160} \\ d_{AC} &= 12.65 \end{aligned}$$

אורך האלכסון BD

$$\begin{aligned} B(1,6) \quad D(3,0) \\ d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ d^2 &= (3 - 1)^2 + (0 - 6)^2 \\ d &= \sqrt{40} \\ d_{BD} &= 6.324 \end{aligned}$$

שטח המעוין

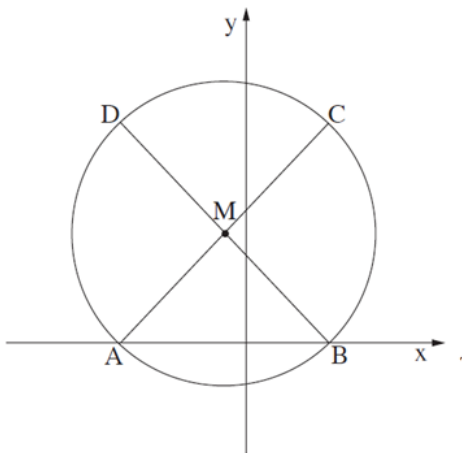
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{d_{BD} \cdot d_{AC}}{2} \\ S_{ABCD} &= \frac{6.324 \cdot 12.65}{2} \\ S_{ABCD} &= 40 \end{aligned}$$

תשובה: $S_{ABCD} = 40$

תשובה סופית :

(א) M(2,3) (ב) $y_{BD} = -3x + 9$ (ג) B(1,6) D(3,0) (ד) $S_{ABCD} = 40$

שאלה מספר 3:



- נתון מעגל שמשוואתו $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 50$ ומרכזו בנקודה M.
 A, B הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x (ראה ציור).
 א. (1) מצא את שיעורי הנקודות A, B, M.
 (2) כל אחד מהקטעים AC ו-BD הוא קוטר במעגל.
 מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
 ב. (1) מצא את משוואת התיכון לצלע AC במשולש ADC.
 (2) סמן ב-E את נקודת החיתוך של המשך התיכון DM עם ציר ה-y. מצא את שטח המשולש AEB.

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A, B, M.

משוואת המעגל

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 50$$

$$M(-1,5) \quad R = \sqrt{50}$$

נקודות AB

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 50$$

$$y = 0$$

$$(x+1)^2 + (0-5)^2 = 50$$

$$(x+1)^2 = 50 - 25$$

$$x+1 = \pm\sqrt{25}$$

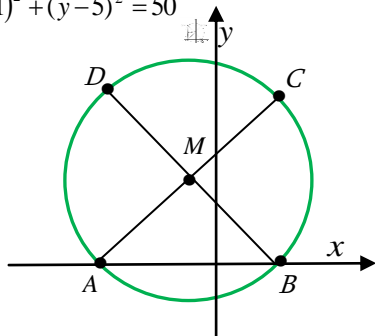
$$x = \pm 5 - 1$$

$$x_1 = -5 - 1 = -6$$

$$x_2 = 5 - 1 = 4$$

$$A(-6,0) \quad B(4,0)$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 50$$



תשובה: $M(-1,5) \quad A(-6,0) \quad B(4,0)$

(א2) כל אחד מהקטעים AC ו-BD הוא קוטר המעגל מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

נקודה C

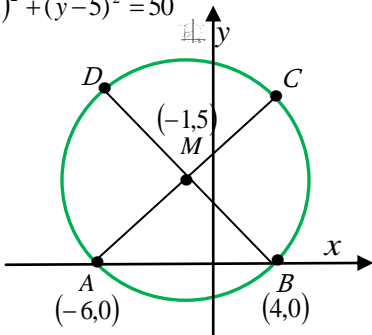
A	M	C
(-6,0)	(-1,5)	(x_2, y_2)
x_1, y_1	x_M, y_M	
$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$	
$-1 = \frac{-6 + x_2}{2}$	$5 = \frac{0 + y_2}{2}$	
$-2 = -6 + x_2$	$10 = 0 + y_2$	
$x_2 = 4$	$y_2 = 10$	
C(4,10)		

נקודה D

B	M	D
(4,0)	(-1,5)	(x_2, y_2)
x_1, y_1	x_M, y_M	
$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$	
$-1 = \frac{4 + x_2}{2}$	$5 = \frac{0 + y_2}{2}$	
$-2 = 4 + x_2$	$10 = 0 + y_2$	
$x_2 = -6$	$y_2 = 10$	
D(-6,10)		

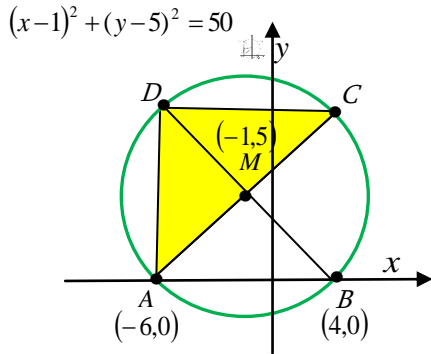
תשובה: $C(4,10) \quad D(-6,10)$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 50$$



(1) מצא את משוואת התיכון לצלע AC במשולש ADC.

התיכון לצלע AC הוא הישר DM



שיפוע התיכון

$D(-6,10) \quad M(-1,5)$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{DM} = \frac{5 - 10}{-1 + 6} = \frac{-5}{5} =$$

$m_{DM} = -1$

משוואת DM

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(-1,5) \quad m = -1$

$y - 5 = -1(x + 1)$

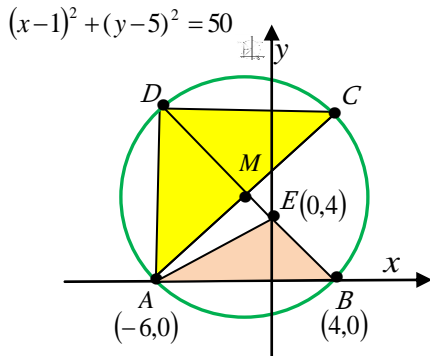
$y = -1x - 1 + 5$

$y = -1x + 4$

תשובה: $y_{DM} = -1x + 4$

(2) סמן ב-E את נקודת החיתוך של המשך התיכון DM עם ציר ה-y.

מצא את שטח המשולש AEB.



נקודה E

$y = -1x + 4$

$x = 0$

$y = -1(0) + 4 = 4$

$E(0,4)$

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$S_{AEB} = \frac{10 \cdot 4}{2}$$

$S_{AEB} = 20$

תשובה: $S_{AEB} = 20$

תשובה סופית :

$C(4,10) \quad D(-6,10) \quad (2א) \quad M(-1,5) \quad A(-6,0) \quad B(4,0) \quad (1א)$

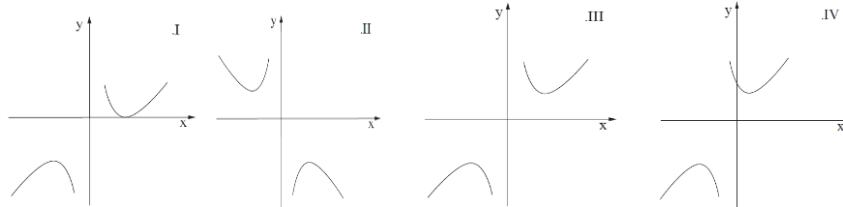
$S_{AEB} = 20 \quad (2ב)$

$y_{DM} = -1x + 4 \quad (1ב)$

שאלה מספר 3: מבחן בגרות 35803 מועד חורף 2012

נתונה הפונקציה $y = \frac{16}{x} + x - 2$

- (א) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- (ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- (ד) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- (ה) לפניך ארבעה גרפים I II III IV. איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק



פתרון

(א) רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: תחום הגדרה $x \neq 0$ האסימפטוטה $x = 0$

(ב) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x

חיתוך עם ציר ה-x

$y=0$
 $f(x) = \frac{16}{x} + x - 2$
 $y = 0$
 $0 = \frac{16}{x} + x - 2 / x$
 $0 = 16 + x^2 - 2x$

$0 = x^2 - 2x + 16$
 $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(16)}}{2(1)}$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-60}}{2}$

שורש שלילי לכן אין חיתוך עם ציר ה-x

תשובה:

(ג) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$
 $f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$

פונקציה
 $x ; y$

$f(x) = \frac{16}{x} + x - 2$
 $y = \frac{16}{(4)} + (4) - 2$
 $y = 6$
 $(4,6)$
 $y = \frac{16}{(-4)} + (-4) - 2$
 $y = -10$
 $(-4,-10)$

נגזרת ראשונה
 $x ; m$

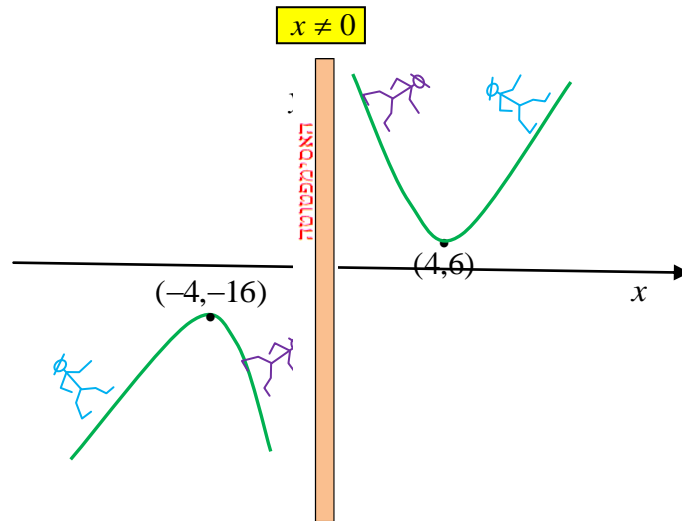
$f'(x) = -\frac{16 \cdot 1}{x^2} + 1$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = -\frac{16}{x^2} + 1$
 $\frac{16}{x^2} = 1$
 $1x^2 = 16$
 $x = \pm\sqrt{16}$
 $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$

נגזרת שנייה
 $\min ; \max$

$f''(x) = +\frac{16 \cdot 2}{x^3} = \frac{32}{x^3}$
 $f''(-4) = \frac{32}{(-4)^3} = -\frac{1}{2} \cap \max$
 $f''(4) = \frac{32}{(4)^3} = \frac{1}{2} \cup \min$

נקודות הקיצון:
 $(-4,-10) \cap \max$
 $(4,6) \cup \min$

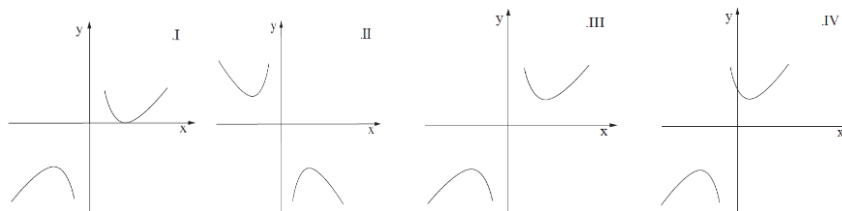
(ד). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.



x	עלייה	x	ירידה	x	ירידה	x	עלייה	x
$-\infty$	$< x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x <$	$+\infty$
תחום עלייה וירידה (קדקודים)								

תשובה: תחומי עלייה: $4 < x < +\infty$, $-\infty < x < -4$ תחומי ירידה: $0 < x < 4$ -1 $-4 < x < 0$

(ה). לפניך ארבעה גרפים איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה. נמק



תשובה: גרף מספר III מתאים לפונקציה לפי נקודות הקיצון

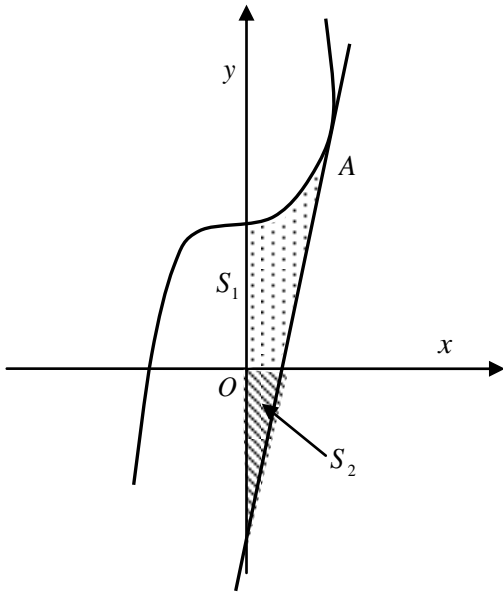
תשובות סופית :

(א) $x \neq 0$ (ב) לא קיימים נקודות חיתוך עם הצירים (ג) $\max (-4, -10) \cap (4, 6)$

(ד) תחום עלייה $4 < x < +\infty$ ואו $-\infty < x < -4$ תחום ירידה $0 < x < 4$ ואו $-4 < x < 0$

(ה) גרף מספר III

שאלה מספר 5



בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 4$
 בנקודה A שבה $x = 2$ העבירו משיק לגרף הפונקציה.
(א). מצא את משוואת המשיק.
(2) מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
(ב). נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק (שאת משוואתו מצאת בסעיף א) ציר ה- x וציר ה- y .
 נסמן ב- S_2 את השטח המוגבל על ידי המשיק, ציר ה- x וציר ה- y (השטח המקווקו בציור)
 הראה כי $S_1 = S_2$.

פתרון:

(א) מצא את משוואת המשיק.
(2) מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

נקודה A

$$y = x^3 + 4$$

$$x = 2$$

$$y = (2)^3 + 4 = 12$$

$$A(2,12)$$

משיק לנקודה A

$$f'(x) = m = 3x^2$$

$$m = 3(2)^2 = 12$$

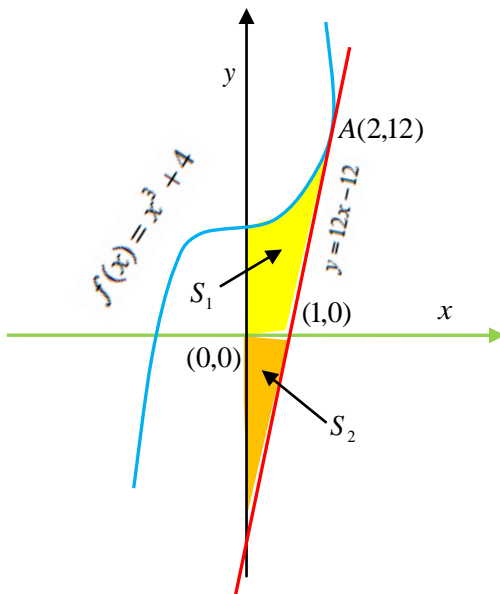
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$(2,12) \quad m = 12$$

$$y - 12 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 24 + 12$$

$$y_A = 12x - 12$$



חיתוך המשיק עם צי ה- x

$$y = 12x - 12$$

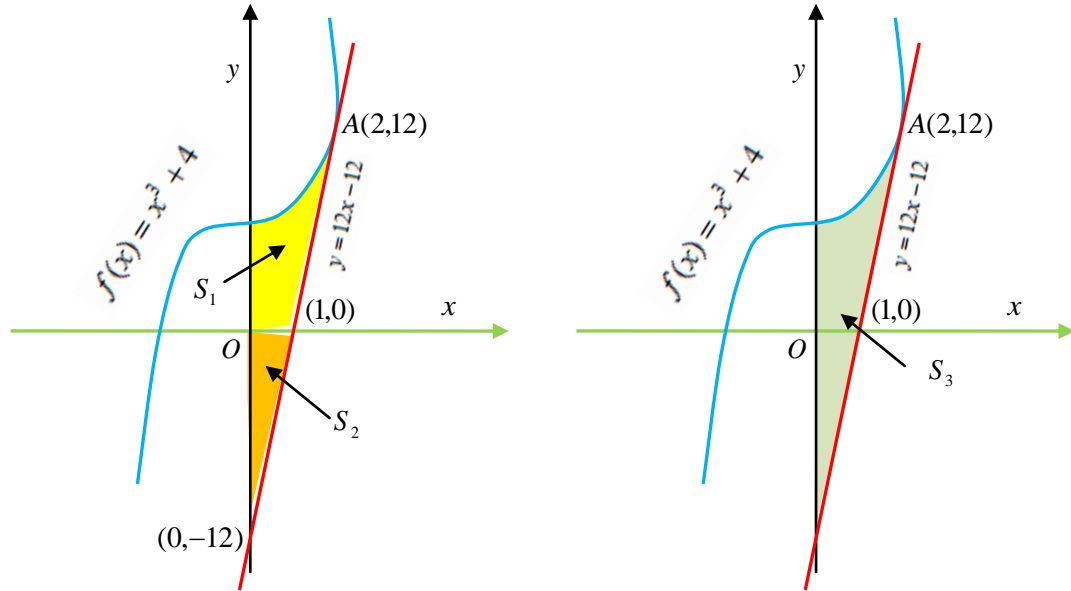
$$y = 0$$

$$0 = 12x - 12$$

$$12x = 12 \quad x = 1$$

$$(1,0)$$

- ב. נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק (שאת משוואתו מצאת בסעיף א) ציר ה- x וציר ה- y .
 נסמן ב- S_2 את השטח המוגבל על ידי המשיק, ציר ה- x וציר ה- y (השטח המקווקו בצירור).
 הראה כי $S_1 = S_2$.



נגדיר ב- S_3 את כל השטח המוגבל על ידי הפונקציה המשיק וציר ה- y והוא כולל את שני השטחים $S_3 = S_1 + S_2$

x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = x^3 + 4$	גדול/ימין
$x = 0$	פונקציה תחתונה	$x = 2$
	$f(x) = 12x - 12$	

מצאת שטח S_2
 $S_2 = \frac{1 \cdot 12}{2} = 6$

מצאת שטח S_1
 $S_1 = S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$

$$S_3 = \int_0^2 (x^3 + 4) - (12x - 12) dx$$

$$S_3 = \int_0^2 (x^3 + 4 - 12x + 12) dx$$

$$S_3 = \int_0^2 (x^3 - 12x + 16) dx$$

$$S_3 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{12x^2}{2} + 16x \right]_0^2$$

$$S_3 = \left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{12(2)^2}{2} + 16(2) \right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{12(0)^2}{2} + 16(0) \right]$$

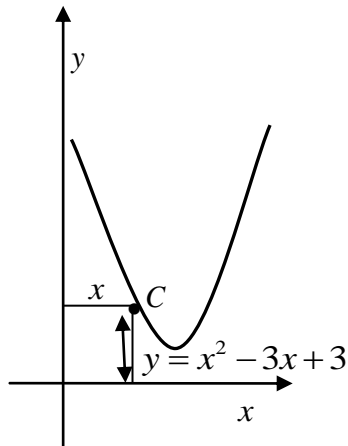
$$S_3 = [12] - [0] = 12$$

$$S_3 = 12$$

תשובה סופית :

$S_1 = S_2 = 6$ (ב) $(1, 0)$ (1א) $y_A = 12x - 12$ (1א)

שאלה מספר 6:



בציור שלפניך נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x + 3$

(א) C היא נקודה על גרף הפונקציה

מצא את שיעורי ה- x של הנקודה C .

שעברו סכום השיעורים של C הוא מינימלי.

(ב) מצא את הסכום המינימלי של שיעורי נקודה C .

(ג) דרך הנקודה C שמצאת בסעיף א העבירו אנך לציר ה- x

ואנך לציר ה- y . האנכים יוצרים מרובע עם הצירים.

מצא את שטח המרובע.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** סכום השיעורים של C הוא מינימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p = x_c + y_c \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:** $y = x^2 - 3x + 3$

4. **פונקציית המטרה** $p = x_c + y_c \Rightarrow \min$

$$P = x + x^2 - 3x + 3$$

$$p = x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

הפונקציה

$$p = x^2 - 2x + 3$$

$$x = 1$$

$$p = (1)^2 - 2(1) + 3$$

$$p = 2$$

נגזרת ראשונה

$$p' = 2x - 2$$

$$p' = 0$$

$$0 = 2x - 2$$

$$2 = 2x$$

$$x = 1$$

נגזרת שנייה

Max/min

$$p''(x) = +2 \cup \min$$

נקודה c

$$y = x^2 - 3x + 3$$

$$y = (1)^2 - 3(1) + 3 = 1$$

$$C(1,1)$$

ריכוז התשובות

$$x = 1 \quad \min$$

$$y_c = 1$$

$$p = 2$$

ב. דרך הנקודה C שמצאת בסעיף א העבירו אנך לציר ה- x ואנך לציר ה- y . האנכים יוצרים מרובע עם הצירים. מצא את שטח המרובע.

שטח המרובע

$$S = 1 \cdot 1 = 1$$

תשובה סופית:

(א) $C(1,1) \min$ (ב) $p = 2$ (ג) $S = 1 \cdot 1 = 1$