מבחן בגרות 35803 מועד א' קיץ תשע"ב 2012.

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות)
שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות , ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

סוחר הזמין 20 בקבוקי שמן , ושילם x שקלים לבקבוק.
בהזמנה הבאה הגדיל הסוחר את כמות בקבוקי השמן ב – 10 בקבוקים , ולכן זכה להנחה של 20% לכל בקבוק , התשלום הכולל בהזמנה זו היה גבוה ב – 100 שקלים מהתשלום הכולל עבור ההזמנה הראשונה.

(א) הבע אמצעות x את :
(1) התשלום עבור 20 בקבוקי השמן בהזמנה הראשונה.
(2) המחיר של בקבוק שמן אחד לאחר ההנחה.

(ב) מצא את המחיר של בקבוק שמן בהזמנה הראשונה.

פתרון:

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ , שקלים, ק"ג , %, וכו'....).

נתונים
הגדרת המשתנים: x מחיר בקבוק שמן

הנחה ב - 20%
$$1-\frac{20}{100}=0.8$$

	בקבוקי שמן			
	מחיר	**כמות**	**סה"כ**	**משוואה**
קניה 1	x	20	$20x$	
קניה 2	$0.8x$	$20+10=30$	$30\cdot 0.8x=24x$	
				$24x-20x=100$

$$24x-20x=100$$
$$4x=100$$
$$x=25$$

(א) הבע אמצעות x את :

(1) התשלום עבור 20 בקבוקי השמן בהזמנה הראשונה.

תשובה: $20x$

(2) המחיר של בקבוק שמן אחד לאחר ההנחה.

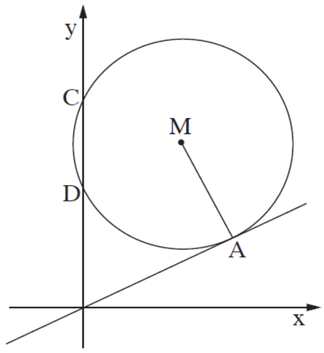
תשובה: $0.8x$

(ב) מצא את המחיר של בקבוק שמן בהזמנה הראשונה.

תשובה: $x=25$ שקלים

תשובה סופית:
(א1) $20x$ **(א2)** $0.8x$ **(ב) 25 שקלים**

שאלה מספר 2:



בציור שלפניך מעגל שמרכזו בנקודה M.
C ו – D הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה – y.
נתון כי בנקודה $A\ (6,3)$ המעגל משיק לישר $y=\frac{1}{2}x$

(א) מצא את משוואת הישר שעליו מונח הרדיוס AM.
(ב) נתון כי מרכז המעגל M נמצא על הישר y = 7
מצא את משוואת המעגל.
(ג) **(1)** מצא את אורך הקטע DC
(2) מצא את שטח המשולש CDM

פתרון:

(א) מצא את משוואת הישר שעליו מונח הרדיוס AM.

משוואת AC

$y-y_1=m(x-x_1)$

$(6,3) \qquad m=-2$

$y-3=-2(x-6)$

$y=-2x+12+3$

$y=-2x+15$

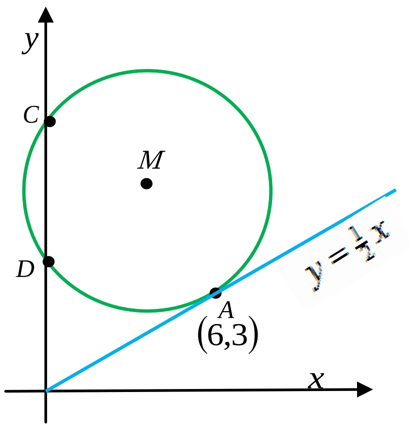
שיפוע AM

$m_{משיק}=\frac{1}{2} \quad m_{AM}=-2$

שיפוע הופכי נגדי

תשובה: $y_{AC}=-2x+15$

(ב) נתון כי מרכז המעגל M נמצא על הישר y = 7 מצא את משוואת המעגל.



משוואת המעגל

$M(4,7) \qquad R^2=20$

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$M(4,7)$

$(x-4)^2+(y-7)^2=R^2$

$A(6,3)$

$(6-4)^2+(3-7)^2=R^2$

$R^2=20$

$(x-4)^2+(y-7)^2=20$

נקודה M

$y=-2x+15$

$y=7$

$7=-2x+15$

$2x=8$

$x=4$

$M(4,7)$

תשובה: $(x-4)^2+(y-7)^2=20$

ג1) מצא את אורך הקטע DC

אורך הקטע CD

$C(9,0) \quad D(5,0)$

$d_{DC} = 4$

נקודות CD

$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

$x = 0$

$(0-4)^2 + (x-7)^2 = 20$

$(x-7)^2 = 20 - 16$

$x - 7 = \pm\sqrt{4}$

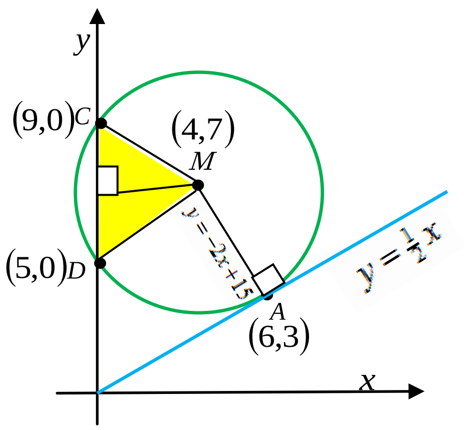
$x_{1,2} = \pm 2 + 7$

$x_1 = +2 + 7 = 9$

$x_2 = -2 + 7 = 5$

$C(9,0) \quad D(5,0)$

<u>**תשובה:**</u> $d_{DC} = 4$



ג2) מצא את שטח המשולש CDM

$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

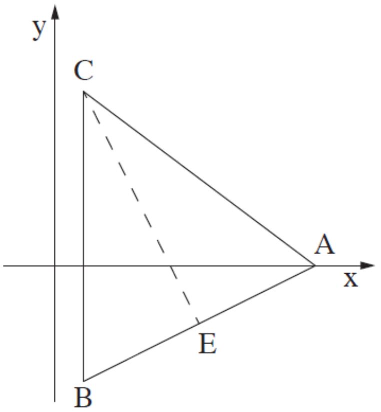
$S_{CDM} = \frac{4 \cdot 4}{2} \qquad S_{CDM} = 8$

<u>**תשובה:**</u> $S_{CDM} = 8$

<u>**תשובה סופית:**</u>

(א) $y_{AC} = -2x + 15$ (ב) $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

(ג1) $d_{DC} = 4$ **(ג2)** $S_{CDM} = 8$



שאלה מספר 3:

קודקודי משולש הם : $A(9,0)$ $B(1,-4)$, $C(1,6)$

הנקודה E היא אמצע הצלע AB.

(א) מצא את משוואת התיכון לצלע AB .

(ב) מצא את משוואת הגובה לצלע AB .

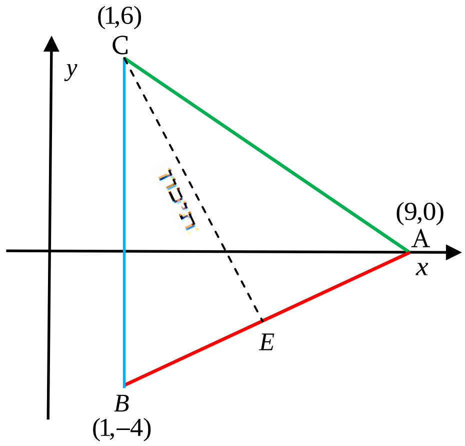
(ג) הראה שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (BC = AC)
אפשר להסתמך על התוצאות בסעיפים הקודמים)

(ד) מצא את שטח המשולש ABC .

פתרון:

(א) מצא את משוואת התיכון לצלע AB .

משמעות יש למצוא את משוואת הצלע CE.



1. מציאת נקודה E

B — E — A

$(1,-4)$ (x_M, y_M) $(9,0)$

x_1, y_1 x_2, y_2

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_M = \frac{(1)+(9)}{2} \qquad y_M = \frac{(-4)+(0)}{2}$$

$$x_M = 5 \qquad y_M = -2$$

$$E(5.-2)$$

משוואת התיכון CE

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(1,6)$ $m = -2$

$y - 6 = -2(x-1)$

$y = -2x + 2 + 6$

$y = -2x + 8$

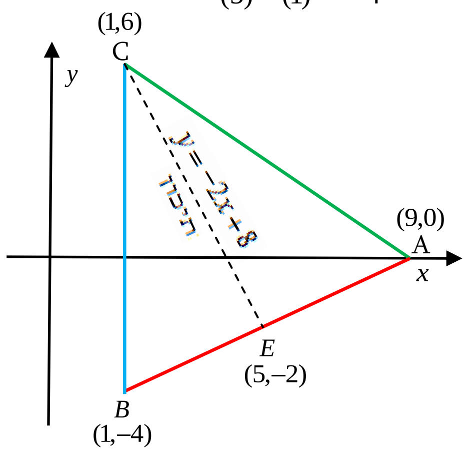
שיפוע התיכון CE

$E(5,-2)$ $C(1,6)$

(x_2, y_2) (x_1, y_1)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{CE} = \frac{(-2)-(6)}{(5)-(1)} = \frac{-8}{4} = -2$$



תשובה: $y = -2x + 8$

(ב) מצא את משוואת הגובה לצלע AB .

משמעות : יש למצוא את משוואת הצלע היורד מנקודה C לצלע AB ויוצר 90^0

משוואת הגובה

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$(1,6) \qquad m = -2$

$y - 6 = -2(x - 1)$

$y = -2x + 2 + 6$

$y = -2x + 8$

שיפוע הגובה

$m_{AB} = \frac{1}{2} \qquad m_{גובה} = -2$

שיפועים הופכי נגדי

שיפוע AB

$A(9,0) \qquad B(1,-4)$

$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_{AB} = \frac{(-4)-(0)}{(1)-(9)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

תשובה: $y = -2x + 8$

(ג) הראה שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (BC = AC)

אפשר להסתמך על התוצאות בסעיפים הקודמים)

אפשרות א' : לפי נוסחה - למצוא את אורך הצלע AC וצלע BC.

משולש שווה שוקיים

$d_{BC} = d_{AC} = 10$

אורך הקטע AC

$A(9,0) \qquad C(1,6)$

$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d^2 = (6-0)^2 + (1-9)^2$

$d_{AC} = \sqrt{100} = 10$

$d_{AC} = 10$

אורך הקטע BC

$B(1,-4) \qquad C(1,6)$

$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d^2 = (6+4)^2 + (1-1)^2$

$d_{BC} = \sqrt{100}$

$d_{BC} = 10$

תשובה: אורך הצלעות : 10 ס"מ

אפשרות ב' : לפי המשפט- אם התיכון והגובה מתלכדים המשולש הוא שווה שוקיים

(ד) מצא את שטח המשולש ABC .

אורך הגובה EC

$E(5,-2) \qquad C(1,6)$

$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d^2 = (1-5)^2 + (6+2)^2$

$d = \sqrt{80}$

$d_{EC} = 8.94$

אורך הבסיס AB

$B(1,-4) \qquad A(9,0)$

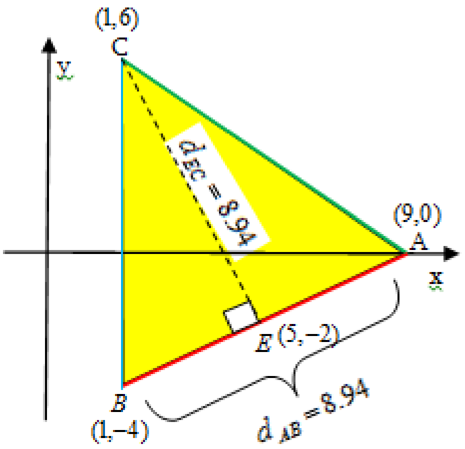
$(x_1, y_1) \qquad (x_2, y_2)$

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d^2 = (9-1)^2 + (0+4)^2$

$d_{AB} = \sqrt{80}$

$d_{AB} = 8.94$



שטח המשולש ABC

$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{AB \cdot CE}{2}$

$S_{ABC} = \frac{8.94 \cdot 8.94}{2}$

$S_{ABC} = 40$

תשובה: $S_{ABC} = 40$

תשובה סופית:

(א) $y_{CE} = -2x + 8$ (ב) $y_{CE} = -2x + 8$ (ג) $d_{BC} = d_{AC} = 10$

(אפשר גם לפי המשפט: אם התיכון והגובה מתלכדים המשולש הוא שווה שוקיים) (ד) $S_{ABC} = 40$

שאלה מספר 4

נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{x}$

(א). מצא את תחום הגדרה של הפונקציה.

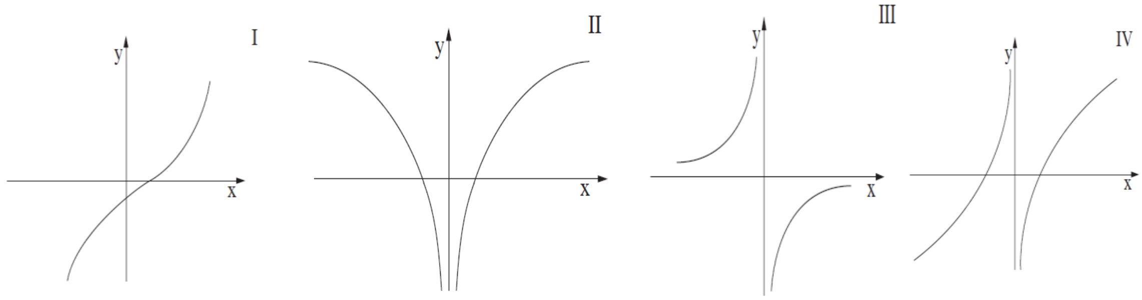
(ב). מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

(ג). (1) הראה שלפונקציה אין נקודת קיצון.

(2) הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום $0<x$ וגם בתחום $x<0$.

(ד). לפניך ארבעה גרפים I II III IV

איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה ? נמק



פתרון:

(א). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

תשובה: תחום הגדרה $x\neq 0$, האסימפטוטה $x=0$

(ב). מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

חיתוך עם ציר x

y=0

$$f(x)=x-\frac{1}{x}$$

$$0=x-\frac{1}{x}\ /x$$

$$0=x^2-1$$

$$x^2=1$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{1}$$

$$x_1=1 \quad x_2=-1$$

$$\boxed{(1,0) \qquad (-1,0)}$$

תשובה: $(1,0)$ $(-1,0)$

(ג). (1) הראה שלפונקציה אין נקודת קיצון.

$f(x)=\frac{a}{b\cdot x^n}$

$f'(x)=-\frac{a\cdot n}{b\cdot x^{n+1}}$

פונקציה

$x\ ;\ y$

$f(x)=x-\frac{1}{x}$

נגזרת ראשונה

$x\ ;\ m$

$$f'(x)=1+\frac{1\cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x)=m=0$$

$$0=1+\frac{1}{x^2}$$

$$-1=\frac{1}{x^2}$$

$$x^2=-1$$

$$x=\pm\sqrt{-1}$$

תשובה: **השורש במינוס לא קיימת נקודת קיצון**

(2) הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום $0 < x$ וגם בתחום $x < 0$.

נגזרת ראשונה	**פונקציה**
m=?	**y=?**
$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$	$f(x)=x-\frac{1}{x}$

x	עלייה	x $x\neq 0$	עלייה	x
$-\infty$	$<x<$	0	$<x<$	$+\infty$

נגזרת ראשונה
$x\ ;\ m$

$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$

$x=1$

$f(x=1)=1+\frac{1}{(1)^2}$

$m=+2\ \Uparrow$

נגזרת ראשונה
$x\ ;\ m$

$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$

$x=-1$

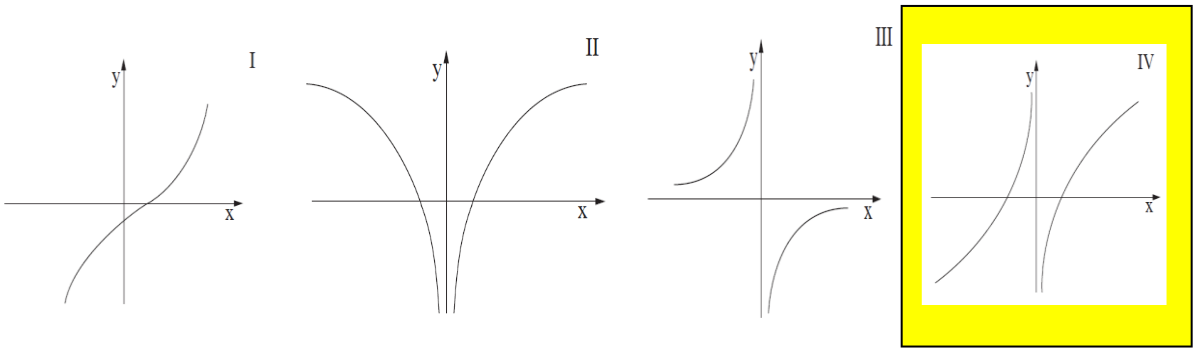
$f(x=-1)=1+\frac{1}{(-1)^2}$

$m=+2\ \Uparrow$

תשובה:
השיפוע חיובי משני צדדי האסימפטוטה לכן הפונקציה עולה בתחום $0 < x$ וגם בתחום $x < 0$.

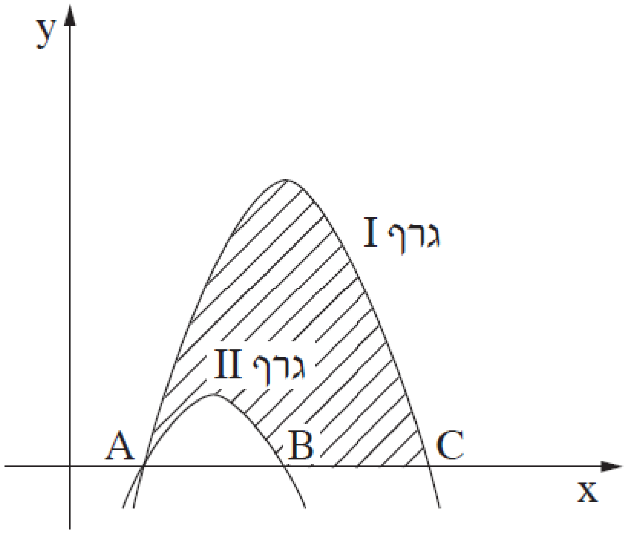
(ד). לפניך ארבעה גרפים I II III IV

איזה מבין הגרפים מתאים את הפונקציה הנתונה ? נמק



תשובה: הגרף המתאים הוא גרף **מספר 4**
הגרף חותך את ציר ה x בשני מקומות וקיימת עלייה משני צדדי האסימפטוטה של $x=0$

תשובה סופית:
(א). $x\neq 0$ (ב). $(1,0)$ $(-1,0)$ (ג1) הוכחה(שורש במינוס)
(ג2) הנגזרת חיובית עבור כל x בתחום ההגדרה (ד) הגרף המתאים הוא גרף **מספר 4**
הגרף חותך את ציר ה x בשני מקומות וקיימת עלייה משני צדדי האסימפטוטה של $x=0$



<u>שאלה מספר 5</u>

בציור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$
$$g(x) = -x^2 + 6x - 5$$

שני הגרפים חותכים את ציר ה- x בנקודה A.

גרף I חותך את ציר ה- x גם בנקודה C.

גרף II חותך את ציר ה - x גם בנקודה B.

(א). מצא את שיעורי הנקודות A, B, ו- C.

(ב). קבע איזו מבין הפונקציות מתאר גרף I ואיזו מביניהן מתאר גרף II . נמק.

(ג). מצא את השטח המוגבל על ידי גרף I , על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

<u>פתרון:</u>

(א). מצא את שיעורי הנקודות A, B, ו- C.

<u>f(x) חיתוך עם ציר ה-x</u>

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

$y = 0$

$0 = -x^2 + 4x - 3$

$$x_{1,2} = \frac{-(4) \pm \sqrt{16 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

$A(1,0) \quad B(3,0)$

<u>g(x) חיתוך עם ציר ה-x</u>

$g(x) = -x^2 + 6x - 5$

$y = 0$

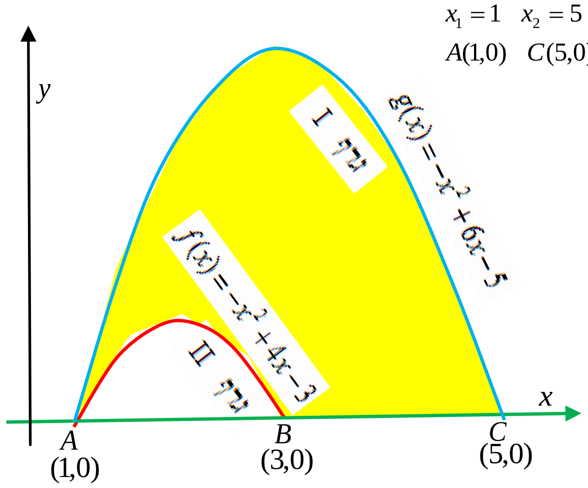
$0 = -x^2 + 6x - 5$

$$x_{1,2} = \frac{-(6) \pm \sqrt{36 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$

$A(1,0) \quad C(5,0)$

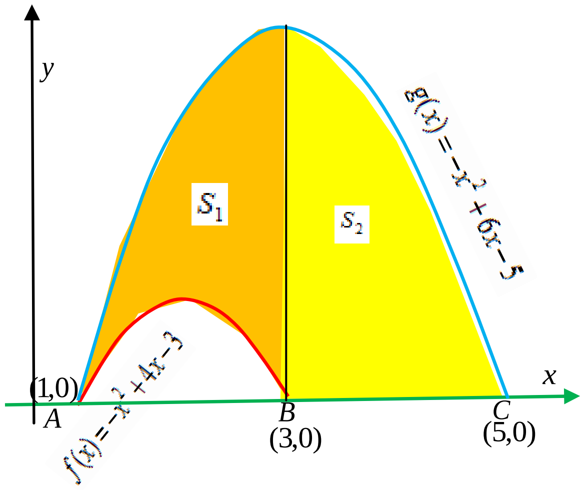


(ב). קבע איזו מבין הפונקציות מתאר גרף I ואיזו מביניהן מתאר גרף II . נמק.

<u>גרף I</u> מתאים לפונקציה $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ מתאים לנקודות $A(1,0)$ $B(3,0)$

<u>גרף II</u> מתאים לפונקציה $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ מתאים לנקודות $A(1,0)$ $C(5,0)$

(ג). מצא את השטח המוגבל על ידי גרף I , על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).



x גדול/ימין	פונקציה עליונה $g(x)=-x^2+6x-5$ / פונקציה תחתונה $f(x)=-x^2+4x-3$	x קטן/שמאל
$x=3$		$x=1$

x גדול/ימין	פונקציה עליונה $g(x)=-x^2+6x-5$ / פונקציה תחתונה $y=0$	x קטן/שמאל
$x=5$		$x=3$

$$S_1=\int_1^3 (\ -x^2+6x-5\ )-(\ -x^2+4x-3\ )dx$$
$$S_1=\int_1^3 (\ -x^2+6x-5+x^2-4x+3\ )dx$$
$$S_1=\int_1^3 (\ 2x-2\ )dx$$
$$S_1=\left[\frac{2x^2}{2}-2x\right]_1^3$$
$$S_1=\left[\frac{2(3)^2}{2}-2(3)\right]-\left[\frac{2(1)^2}{2}-2(1)\right]$$
$$S_1=[\ 3\ ]-[\ -1\ ]$$
$$S_1=[\ 4\ ]$$

$$S_2=\int_3^5 (\ -x^2+6x-5\ )-(\ 0\ )dx$$
$$S_2=\int_3^5 (\ -x^2+6x-5\ )dx$$
$$S_2=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-5x\right]_3^5$$
$$S_2=\left[-\frac{(5)^3}{3}+\frac{6(5)^2}{2}-5(5)\right]-\left[-\frac{(3)^3}{3}+\frac{6(3)^2}{2}-5(3)\right]$$
$$S_2=\left[\ 8\frac{1}{3}\ \right]-[\ 3\ ]$$
$$S_2=\left[\ 5\frac{1}{3}\ \right]$$

$$S_T=S_1+S_2$$
$$S_T[\ 4\ ]+\left[\ 5\frac{1}{3}\ \right]=9\frac{1}{3}$$

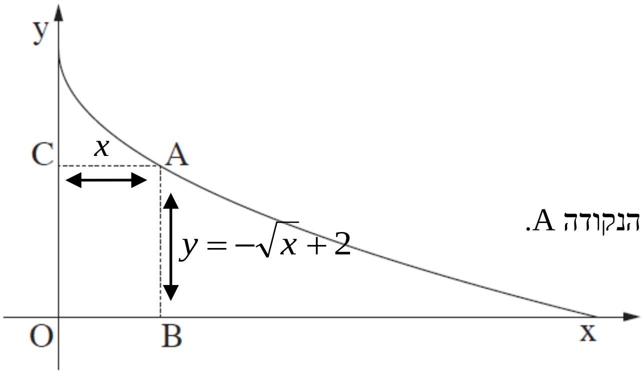
תשובה: $S_T[\ 4\ ]+\left[\ 5\frac{1}{3}\ \right]=9\frac{1}{3}$

תשובה סופית:

(א). $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(5,0)$ **(ב).** גרף I $= g(x)$, גרף II $= f(x)$.

(ג). $S_T[\ 4\ ]+\left[\ 5\frac{1}{3}\ \right]=9\frac{1}{3}$

שאלה מספר 6:



בציור שלפניך נתון גרף הפונקציה

$f(x)=-\sqrt{x}+2$ ברביע הראשון

מנקודה A שעל גרף הפוקציה

מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC

(א). הבע את היקף המלבן באמצעות שיעור ה – x של הנקודה A.

(ב). (1) מה צריך להיות הערך של x

כדי שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי ?

(2) מצא את ההיקף המינימלי של המלבן.

פתרון:

1. **משפט המטרה:** היקף המלבן ABOC יהיה מינימלי

2. **נוסחת המטרה:** $p=2a+2b=2x+2y\Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:** $y=-\sqrt{x}+2$

4. **פונקציית המטרה**

$p=2a+2b=2x+2y\Rightarrow \min$

$P=2(x)+2(-\sqrt{x}+2)$

$$\boxed{p=2x-2\sqrt{x}+4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}f(x)&=a\sqrt{bx}\\ f'(x)&=\frac{a\cdot 1\cdot b}{2\cdot\sqrt{x}}\end{aligned}}$$

נגזרת שנייה

Max/min

$p\ '=2-\frac{1}{\sqrt{x}}/\sqrt{x}$

$$\boxed{p\ '=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}}$$

(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)

$p\ ''(x)=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{x}}$

$p\ ''(+0.25)=\frac{2}{2\sqrt{0.25}}=+1\cup\min$

נגזרת ראשונה

$p\ '=2-\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{x}}$

$p\ '=0$

$0=2-\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{1}{\sqrt{x}}=2$

$1=2\sqrt{x}\quad /:2$

$0.5=\sqrt{x}\ (\ )^2$

$(0.5)^2=(\sqrt{x})^2$

$x=0.25$

הפונקציה

$p=2x-2\sqrt{x}+4$

$x=0.25$

$p=2(0.25)-2\sqrt{0.25}+4$

$p=3.5$

נקודה A

$x=0.25$

$y=-\sqrt{x}+2=-\sqrt{0.25}+2=1.5$

$A(0.25,1.5)$

ריכוז התשובות

$x=0.25$ min

$y_A=1.5$

$p=3.5$

תשובה סופית:

(א). $2x-2\sqrt{x}+4$ **(ב1)** $x=\frac{1}{4}$ **(ב2)** $3\frac{1}{2}$