

מבחן בגרות 35803 מועד ב קיץ תשע"ב 2012.

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

שאלה מספר 1

סוחר הזמין כמות מסוימת של חולצות במחיר x שקלים לחולצה, ושילם בסך הכול 1200 שקלים. בהזמנה הבאה הגדיל הסוחר את כמות החולצות שרכש ב - 20 חולצות, ולכן זכה להנחה של 10% לכל חולצה. התשלום הכולל בהזמנה השנייה היה גבוה ב - 420 שקלים מהתשלום הכולל עבור ההזמנה הראשונה. (א) הבע באמצעות x את כמות החולצות שנקנו בהזמנה הראשונה. (ב) מה היה המחיר של חולצה לפני ההנחה ?

פתרון

הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגרויות 2016
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

נתונים

הגדרת המשתנים: x - מחיר חולצה y - כמות החולצות

הנחה ב - 10%

$$1 - \frac{10}{100} = 0.9$$

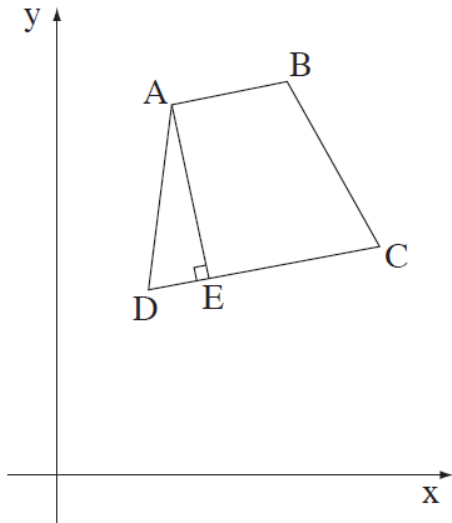
משוואה	חולצות			
	סה"כ	כמות	מחיר	
$x \cdot y = 1200$	1200	y	x	הזמנה 1
$0.9x \cdot (y + 20) = 1620$	$1200 + 420 = 1620$	$y + 20$	$0.9x$	הזמנה 2

$x \cdot y = 1200$	$0.9x \cdot (y + 20) = 1200 + 420$	$y = \frac{1200}{x}$
$y = \frac{1200}{x}$	$0.9 \cdot xy + 18x = 1620$	$x = 30$
	$0.9 \cdot 1200 + 18x = 1620$	$y = \frac{1200}{30}$
	$1080 + 18x = 1620$	$y = 40$
	$18x = 540$	
	$x = 30$	

תשובה סופית:

(א) $\frac{1200}{x}$ (ב) 30 שקלים

שאלה מספר 2:



בציור שלפניך מרובע ABCD שקודקודיו הם:

$(4,8)$ $(14,10)$ $(10,17)$ $(5,16)$

- (א) התאם כל קדקוד לאות המתאימה לו בציור.
- (ב) מצא את השיפועים של ארבע צלעות המרובע.
- (2) הסבר מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.
- (ג) נתון כי AE הוא גובה הטרפז מצא את:
 - (1) המשוואה של AE.
 - (2) שיעור הנקודה E.

פתרון:

(א) התאם כל קדקוד לאות המתאימה לו בציור.

תשובה: $A(5,16)$ $B(10,17)$ $C(14,10)$ $D(4,8)$

(ב) מצא את השיפועים של ארבע צלעות המרובע.

שיפוע AB

$A(5,16)$ $B(10,17)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{(17) - (16)}{(10) - (5)}$$

$$m_{AB} = \frac{1}{5}$$

שיפוע CD

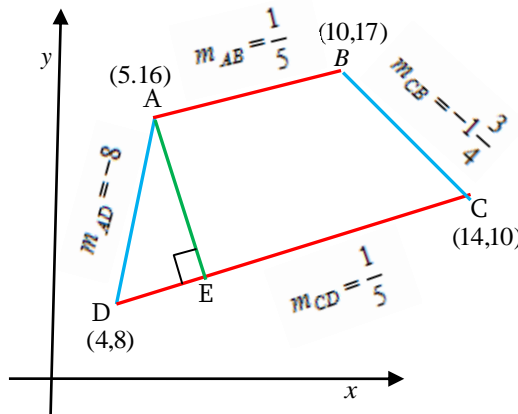
$C(14,10)$ $D(4,8)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{CD} = \frac{(8) - (10)}{(4) - (14)} = \frac{-2}{-10}$$

$$m_{CD} = \frac{1}{5}$$



שיפוע CB

$C(14,10)$ $B(10,17)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{CB} = \frac{(17) - (10)}{(10) - (14)} = \frac{7}{-4}$$

$$m_{CB} = -1\frac{3}{4}$$

שיפוע AD

$A(5,16)$ $D(4,8)$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AD} = \frac{(8) - (16)}{(4) - (5)} = \frac{-8}{-1}$$

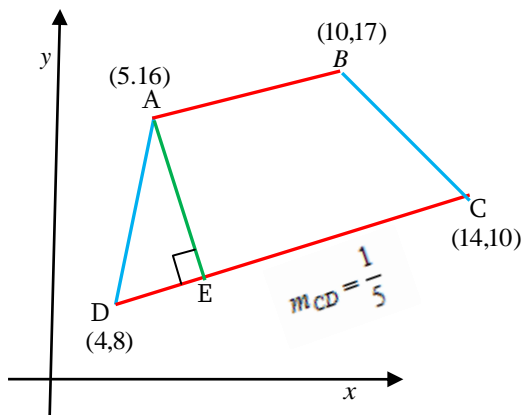
$$m_{AD} = -8$$

(2) הסבר מדוע המרובע ABCD הוא טרפז.

תשובה: השיפועים AB ו CD זהים לכן הקווים מקבילים השיפועים AD ו BC לא זהים .

מרובע בעל זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות נקרא טרפז לכן המרובע שבשאלה טרפז.

(1ג) נתון כי AE הוא גובה הטרפז מצא את המשוואה של AE.

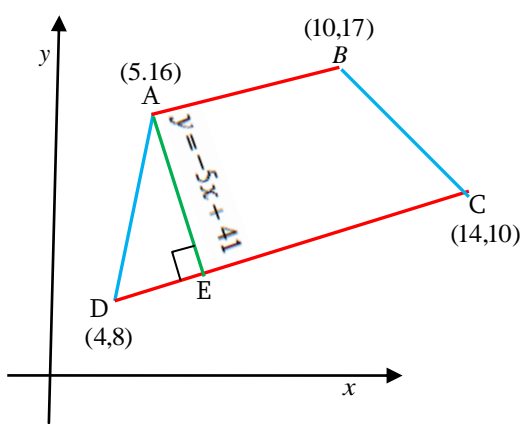


שיפוע AE
 $m_{DC} = \frac{1}{5} \quad m_{AE} = -5$
שיפוע הופכי נגדי

משוואת AE
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $(5,16) \quad m = -5$
 $y - 16 = -5(x - 5)$
 $y = -5x + 25 + 16$
 $y = -5x + 41$

תשובה: $y_{AE} = -5x + 41$

(2ג) מצא את שיעור הנקודה E.

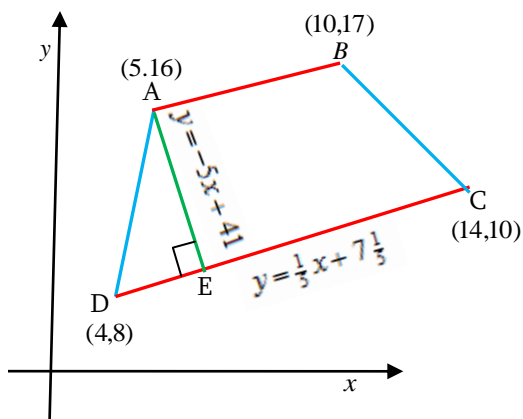


1
משוואת DC
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $(4,8) \quad m_{DC} = \frac{1}{5}$
 $y - 8 = \frac{1}{5}(x - 4)$
 $y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} + 8$
 $y = \frac{1}{5}x + 7\frac{1}{5}$

2
נקודה E

$y_{CD} = y_{AE}$
 $\frac{1}{5}x + 7\frac{1}{5} = -5x + 41 \quad y = -5x + 41$
 $5x + \frac{1}{5}x = 41 - 7\frac{1}{5} \quad y = -5(6.5) + 41$
 $5\frac{1}{5}x = 33\frac{4}{5} \quad y = 8.5$
 $x = 6.5 \quad E(6.5, 8.5)$

תשובה: $E(6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2})$



תשובה סופית:

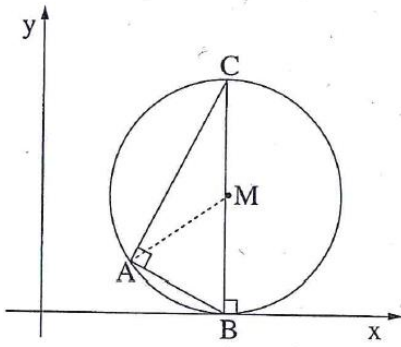
(א) $D(4,8) \quad C(14,10) \quad B(10,17) \quad A(5,16)$

(ב) $m_{AD} = 8, m_{CD} = \frac{1}{5}, m_{BC} = -1\frac{3}{4}, m_{AB} = \frac{1}{5}$

(ג) השיפועים AB ו CD זהים קווים מקבילים השיפועים AD ו BC לא זהים לכן המרובע הוא טרפז.

(1ג) $y_{AE} = -5x + 41$ (2ג) $E(6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2})$

שאלה מספר 3



בציר שלפניך מעגל שמרכזו M (ברביע הראשון) המעגל המשיק לציר ה-x בנקודה B. AB ו-AC הם שני מיתרים במעגל המאונכים זה לזה, BC הוא קוטר המעגל

(א). נתון כי משוואת הישר, שעליו מונח המיתר AB היא $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ונתון גם כי $BC = 10$.

- (1) מצא את שיעורי הנקודה B.
- (2) מצא את שיעורי הנקודה C.
- (3) מצא את משוואת המעגל.

(ב) (1) מצא את משוואת הישר שעליו מונח המיתר AC. (2) מצא את שיעורי הנקודה A.

פתרון:

(1א) מצא את שיעורי הנקודה B

נקודה B
 $y = -\frac{1}{2}x + 4$
 $y = 0$
 $0 = -\frac{1}{2}x + 4$
 $\frac{1}{2}x = 4$
 $x = 8$
תשובה: B(8,0)

(2א) מצא את שיעורי הנקודה C

- 1. המעגל משיק לציר ה-x בנקודה B המשיק מאונך לציר ה-x לכן לאורך כל הישר BC יש $x = 8$
- 2. אורך $BC = 10$ לכן שיעור ה-y של נקודה C הוא 10.

נקודה C

$y = 10$
 $x = 8$
תשובה: C(8,10)

תשובה: C(8,10)

(3א) מצא את משוואת המעגל.

נקודה M

$y = 5$
 $x = 8$
תשובה: M(8,5)

משוואת המעגל

$M(8,5) \quad R^2 = 5^2 = 25$
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
 $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$

תשובה: $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$

(1ב) מצא את משוואת הישר שעליו מונח המיתר AC.

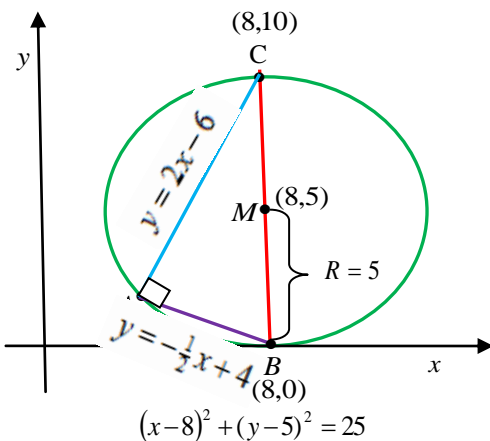
שיפוע AC

$m_{AB} = -\frac{1}{2} \quad m_{AC} = 2$
 שיפוע הופכי נגדי

משוואת AC

$y - y_1 = m(x - x_1)$
 $(8,10) \quad m = 2$
 $y - 10 = 2(x - 8)$
 $y = 2x - 16 + 10$
 $y = 2x - 6$

תשובה: $y_{AC} = 2x - 6$



(2) מצא את שיעורי הנקודה A.

נקודה A

$$y_{AB} = y_{AC}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 4 &= 2x - 6 & y &= 2x - 6 \\ 4 + 6 &= 2x + \frac{1}{2}x & x &= 4 \\ 10 &= 2\frac{1}{2}x & y &= 2(4) - 6 \\ x &= 4 & y &= 2 \\ & & A &= (4, 2) \end{aligned}$$

תשובה: A(4,2)

תשובה סופית:

$$\begin{aligned} (x-8)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad \mathbf{(3א)} & \quad C(8,0) \quad \mathbf{(2א)} & \quad B(8,0) \quad \mathbf{(1א)} \\ & \quad A(4,2) \quad \mathbf{(2ב)} & \quad y_{AC} = 2x - 6 \quad \mathbf{(1ב)} \end{aligned}$$

שאלה מספר 4

- נתונה הפונקציה $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$.
- נתון כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה $(9, 0)$.
- (א) (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- (2) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.
- (ב) מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.
- (ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ד) קבע עבור אילו ערכי x הפונקציה חיובית.

פתרון:

(א) (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

תשובה: תחום ההגדרה: לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד $x \geq 0$.

(2) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.

חיתוך עם ציר y

$x=0$

$f(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$

$x = 0$

$y = (0) - 2\sqrt{0} - 3$

$y = -3$

$(0, -3)$

תשובה: $(0, -3)$

(ב) מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.

$f(x) = a\sqrt{bx}$
 $f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$

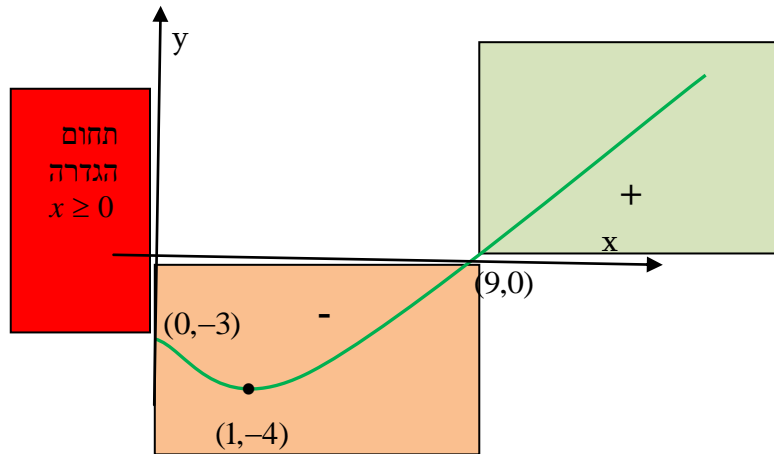
פונקציה
 $x; y$
 $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 3$
 $x = 1$
 $y = (1) - 2\sqrt{(1)} - 3$
 $y = -4$
 $(1, -4)$

נגזרת ראשונה
 $x; m$
 $f'(x) = 1 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
 $f'(x) = m = 0$
 $0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$
 $\sqrt{x} = 1$
 $\sqrt{x} = 1 / ()^2$
 $(\sqrt{x})^2 = (1)^2$
 $x = 1$

נגזרת שנייה
 $\min; \max$
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} / \sqrt{x}$
 $f''(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$
(מספיק לגזור את המונה כדי לקבוע את סוג הקיצון)
 $f''(x) = \frac{1 \cdot 1}{2\sqrt{x}}$
 $f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{(1)}} = +\frac{1}{2} \cup \min$

תשובה: **נקודת הקיצון:**
 $(1, -4) \cap \max$

(ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



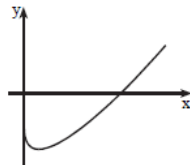
x	תחום הגדרה	x	שלילי	x	חיובי	x
$-\infty$		0	$\leq x <$	9	$< x <$	$+\infty$

(ד) קבע עבור אילו ערכי x הפונקציה חיובית.

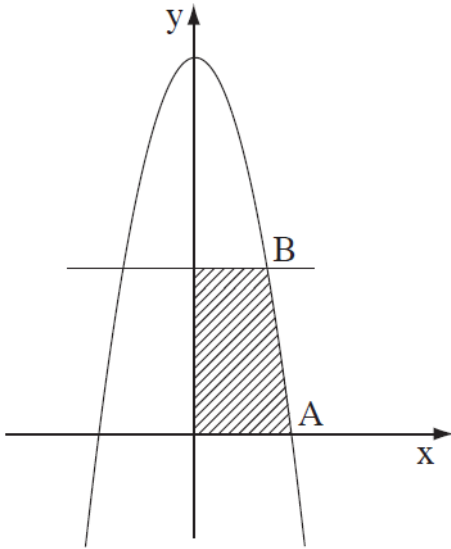
תשובה: התחום החיובי הוא $9 < x < +\infty$ (התחום בו הפונקציה מעל לציר ה-x)

תשובה סופית:

- (א) $x \geq 0$ (ב) $(0, -3)$ (ג) $\min (1, -4)$ (ד) הפונקציה חיובית. $9 < x < +\infty$



שאלה מספר 5

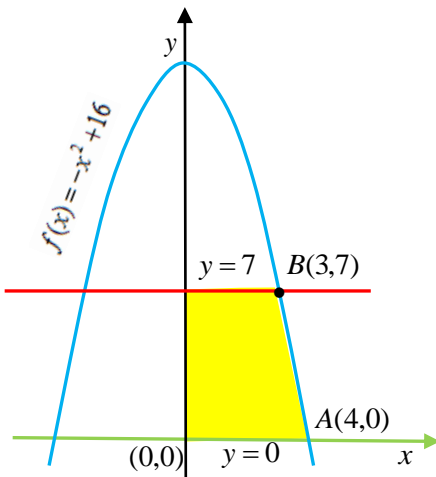


בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 16$.
 A היא אחת הנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.
 B היא אחת מנקודות החיתוך של הישר $y = 7$ עם גרף הפונקציה
 (ראה ציור)

- (א) מצא את שיעורי הנקודות A ו B .
 (ב) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה
 על ידי הישר $y = 7$, על ידי ציר ה-x
 ועל ידי ציר ה-y (השטח המקווקו בציור).

פתרון:

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו B .



נקודה A

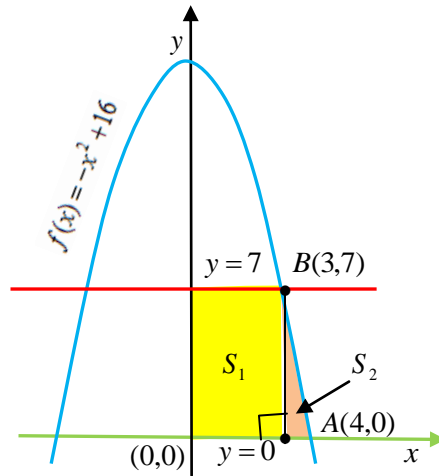
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 16 \\ y &= 0 \\ 0 &= -x^2 + 16 \\ x^2 &= 16 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{16} \\ x_A &= +4 \quad x_2 = -4 \\ A &= (4,0) \end{aligned}$$

נקודה B

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 16 \\ y &= 7 \\ 7 &= -x^2 + 16 \\ x^2 &= 9 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{9} \\ x_B &= +3 \quad x_2 = -3 \\ B &= (3,7) \end{aligned}$$

תשובה: $A(4,0)$ $B(3,7)$

(ב) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה על ידי הישר $y = 7$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y (השטח המקוקו בצירור).



x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = 7$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 0$	$y = 0$	$x = 3$

x	פונקציה עליונה	x
קטן/שמאל	$y = -x^2 + 16$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 3$	$y = 0$	$x = 4$

$$S_1 = \int_0^3 (7) - (0) dx$$

$$S_1 = \int_0^3 (7-0) dx$$

$$S_1 = \int_0^3 (7) dx$$

$$S_1 = \left[7x \right]_0^3$$

$$S_1 = [7(3)] - [7(0)]$$

$$S_1 = [21] - [0]$$

$$S_1 = [21]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = [21] + \left[3 \frac{2}{3} \right] = 24 \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_3^4 (-x^2 + 16) - (0) dx$$

$$S_2 = \int_3^4 (-x^2 + 16 - 0) dx$$

$$S_2 = \int_3^4 (-x^2 + 16) dx$$

$$S_2 = \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_3^4$$

$$S_2 = \left[-\frac{(4)^3}{3} + 16(4) \right] - \left[-\frac{(3)^3}{3} + 16(3) \right]$$

$$S_2 = \left[42 \frac{2}{3} \right] - [39]$$

$$S_2 = \left[3 \frac{2}{3} \right]$$

$$S_T = [21] + \left[3 \frac{2}{3} \right] = 24 \frac{2}{3} \text{ :תשובה}$$

תשובה סופית:

$$S_T = [21] + \left[3 \frac{2}{3} \right] = 24 \frac{2}{3} \quad (\text{ב}) \quad A(4,0) \quad B(3,7) \quad (\text{א})$$

שאלה מספר 6.

הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 18.

המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.

- (א) סמן ב- x את המספר הראשון, והבע באמצעותו את המספר השלישי.
- (ב) מצא את הערך של x שעבורו **מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.**
- (ג) מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

פתרון:

1. משפט המטרה: **מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.**

נסמן מספר אחד - x ומספר שני - $2x$ מספר שלישי - y

2. נוסחת המטרה: $p = (x) \cdot (2x) \cdot (y) \Rightarrow \max$

3. נוסחת עזר: $(x) + (2x) + y = 18$

$y = 18 - x - 2x$

$y = 18 - 3x$

4. פונקציית המטרה

$p = (x) \cdot (2x) \cdot (y) \Rightarrow \max$

$p = (x) \cdot (2x) \cdot (18 - 3x)$

$p = 2x^2 \cdot (18 - 3x)$

$p = 36x^2 - 6x^3$

הפונקציה

$p = 36x^2 - 6x^3$

$x = 4$

$p = 36(4)^2 - 6(4)^3$

$p = 192$

נגזרת ראשונה

$P' = 72x - 18x^2$

$P' = 0$

$0 = 72x - 18x^2$

$0 = x \cdot (72 - 18x)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

נגזרת שנייה

Max/min

$P''(x) = 72 - 36x$

$P''(4) = 72 - 36(4) = -72 \cap \max$

$P''(0) = 72 - 36(0) = +72 \cup \min$

ריכוז התשובות

$x_1 = 4 \quad \max$

$x_2 = 8$

$x_3 = 6$

$p = 192$

המספר הראשון: $x_1 = 4$

המספר השני: $x_2 = 2 \cdot 4 = 8$

המספר השלישי: $x_3 = 18 - 3 \cdot (4) = 6$

תשובה סופית:

(א) $18 - 3x$ (ב) $x = 4$ (ג) $4, 8, 6$