

**מבחן בגרות 35803 מועד הצב ברק תשע"ב 2012.**

**ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות)**

**שים לב ! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.**

**שאלה מספר 1**

- (א). סוחר קנה 20 ספות במכירת חיסול. מחיר הספות זהה. עבור 10 ספות הראשונות הוא שילם מחיר מלא. ועבור 10 הספות הנותרות הוא קיבל 50% הנחה. בסך הכל שילם הסוחר 15,000 שקלים. מה היה המחיר של ספה לפני ההנחה?
- (ב). לאחר מכן הסוחר מכר במחיר זהה את הספות שקנה. הוא מוכר כל ספה במחיר הגבוה ב – 50% מהמחיר המלא ששילם עבור ספה. הסוחר מוכר בחנותו גם שטיחים וכל השטיחים נמכרים במחיר זהה. (המחיר עבור שטיח שונה מהמחיר עבור ספה). הוא מוכר כל שטיח ברווח של 60% מהמחיר ששילם עבור שטיח. לקוח הגיע לחנות וקנה 2 שטיחים ו – 3 ספות במחיר כולל של 6900 שקלים.
- (1) כמה שילם הסוחר עבור כל שטיח?
- (2) מהו הרווח (בשקלים) של הסוחר ממכירת כל שטיח?

**פתרון:**

**הנחיות מפמ"ר למתמטיקה. לעקרונות בבדיקת בגריות 2016**  
 בבעיה מילולית יש להגדיר את המשתנים בצורה ברורה,  
 יש לרשום תשובה סופית מילולית ולציין יחידות (ס"מ, שקלים, ק"ג, %, וכו'....).

**הנחה -50%**

$$1 - \frac{50}{100} = 0.5$$

**נתונים**

הגדרת המשתנים: x - מחיר מלא של ספה

**סעיף א'**

משוואה	ספות			
	סה"כ	כמות	מחיר	
	10x	10	x	קניה במחיר מלא
	10 · 0.5x = 5x	10	0.5x	קניה לאחר הנחה
10x + 5x = 15,000				

$$10x + 5x = 15,000$$

$$15x = 15,000$$

$$x = 1000$$

**תשובה:**

1,000 ₪ מחיר ספה לפני ההנחה

**סעיף ב'**

**גבוה ב 60%**

$$1 + \frac{60}{100} = 1.6$$

**גבוה ב 50%**

$$1 + \frac{50}{100} = 1.5$$

משוואה	סה"כ	שטיחים		פעולה	ספות		מכירה
		כמות	מחיר		כמות	מחיר	
3 · 1.5 · 1000 + 2 · 1.6y = 6,900	6,900	2	1.6y	+	3	1000 · 1.5	

$$3 \cdot 1.5 \cdot 1000 + 2 \cdot 1.6y = 6,900$$

$$4500 + 3.2y = 6,900$$

$$3.2y = 2,400$$

$$y = 750$$

מחיר שטיח ללא תוספת הרווח הוא 750 ₪

מחיר השטיח כולל הרווח 60% 1.6 · 750 = 1,200

הרווח ממכירת שטיח

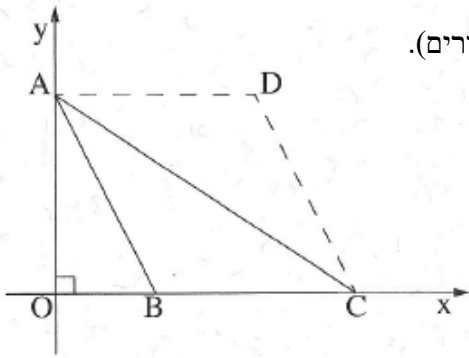
$$1200 - 750 = 450$$

**תשובה סופית:**

(א) 1,000 ₪ מחיר ספה לפני ההנחה (ב) 750 ₪ שילם הסוחר עבור שטיח

(ב) 450 ₪ רווח ממכירת שטיח.

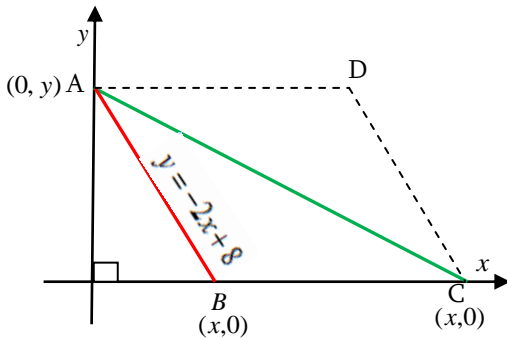
**שאלה מספר 2 :**



בציור שלפניך הנקודות A, B, C נמצאות על הצירים (O ראשית בצירים).  
 הצלע AB מונחת על הישר שמשוואתו  $y = -2x + 8$ .  
 שטח המשולש ABC גדול פי 2 משטח המשולש AOB.  
 (א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.  
 (ב) מצא את שיעורי הנקודה C.  
 (ג) נתון כי AC הוא אלכסון של המקבילית ABCD.  
 (1) מצא את שיעורי הנקודה D.  
 (2) האם המקבילית ABCD היא מעוין? נמק.

**פתרון:**

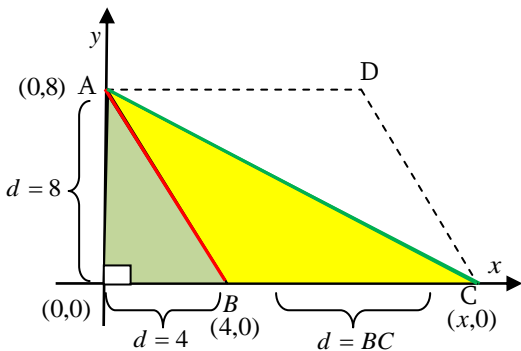
**(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.**



נקודה A	נקודה B
$y = -2x + 8$	$y = -2x + 8$
$x = 0$	$y = 0$
$y = -2(0) + 8$	$0 = -2x + 8$
$y = 8$	$2x = 8$
$A(0,8)$	$x = 4$
	$B(4,0)$

**תשובה:** A(0,8) B(4,0)

**(ב) מצא את שיעורי הנקודה C. שטח המשולש ABC גדול פי 2 משטח המשולש AOB.**



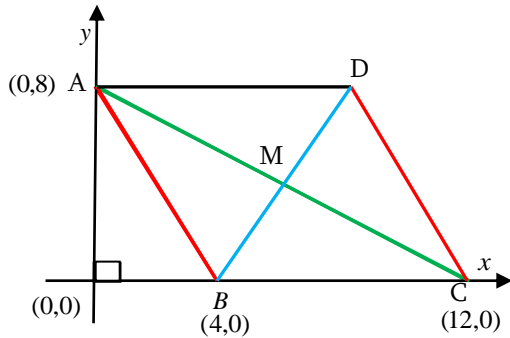
א.	ב.
שטח משולש AOB	שטח משולש ABC
$S_{AOB} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{OB \cdot OA}{2}$	$2 \cdot S_{AOB} = S_{ABC}$
$S_{AOB} = \frac{4 \cdot 8}{2}$	$2 \cdot 16 = S_{ABC}$
$S_{AOB} = 16$	$32 = S_{ABC}$

ג.	ד.
צלע BC משולש ABC	נקודה C
$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{BC \cdot OA}{2}$	$x_C = x_B + 8 = 4 + 8 = 12$
$32 = \frac{BC \cdot 8}{2}$	$C(12,0)$
$64 = BC \cdot 8$	
$8 = BC$	

**תשובה:** C(12,0)

**(1ג) נתון כי AC הוא אלכסון של המקבילית ABCD. מצא את שיעורי הנקודה D.**

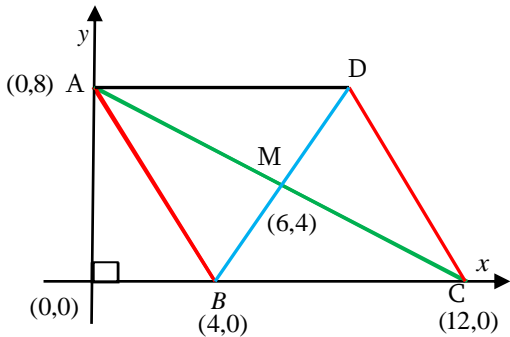
**משפט :** במקבילית האלכסונים הוצים זה את זה.  
**א. נמצא את מרכז האלכסונים M.**



$$\begin{array}{ccc}
 \text{A} & \text{M} & \text{C} \\
 (0,8) & (x_M, y_M) & (12,0) \\
 x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} & & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 x_M = \frac{(0) + (12)}{2} & & y_M = \frac{(8) + (0)}{2} \\
 x_M = 6 & M(6,4) & y_M = 4
 \end{array}$$

**תשובה:** M(6,4)

**ב. נמצא את נקודה D.**

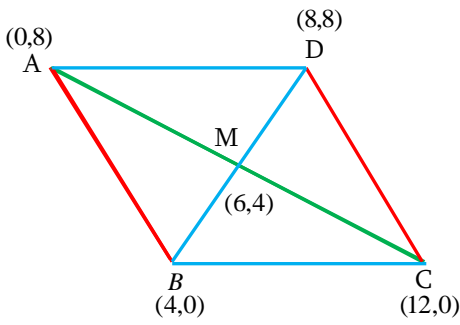


$$\begin{array}{ccc}
 \text{B} & \text{M} & \text{D} \\
 (4,0) & (6,4) & (x_2, y_2) \\
 x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} & & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\
 6 = \frac{(4) + x_2}{2} & & 4 = \frac{(0) + y_2}{2} \\
 12 = 4 + x_2 & & 8 = 0 + y_2 \\
 x_2 = 8 & D(8,8) & y_2 = 8
 \end{array}$$

**תשובה:** D(8,8)

**(2ג) האם המקבילית ABCD היא מעוין? נמק.**

**משפט 1 :** במעוין אורך כל הצלעות שווים זה לזה.  
**משפט 2 :** במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה



**אורך הצלע AB**

$$\begin{array}{l}
 A(0,8) \quad B(4,0) \\
 (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \\
 d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
 d^2 = (4 - 0)^2 + (0 - 8)^2 \\
 d = \sqrt{80} \\
 d_{AB} = 8.94
 \end{array}$$

**אורך הצלע BC**

$$\begin{array}{l}
 B(4,0) \quad C(12,0) \\
 (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \\
 d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
 d^2 = (12 - 4)^2 + (0 - 0)^2 \\
 d = \sqrt{64} \\
 d_{BC} = 8
 \end{array}$$

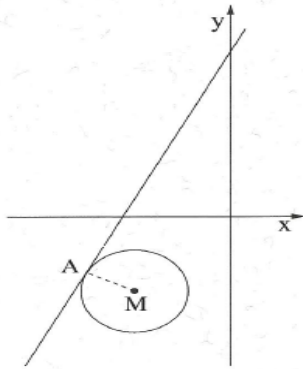
**תשובה:** אורך הצלע AB = 8.94 אורך הצלע BC = 8  
**המקבילית לא מעוין.**

**תשובה סופית:**

(א) A(0,8) B(4,0) (ב) C(12,0) (ג) D(8,8) (2ג) המקבילית לא מעוין

**שאלה מספר 3**

בציור שלפניך נתון מעגל שמרכזו  $M$ . דרך הנקודה  $A(-6,-3)$  שעל המעגל העבירו משיק למעגל, שמשוואתו  $y = 2x + 9$ .  
 (א) מצא את משוואת הישר  $AM$ .  
 (ב) נתון כי ערך ה- $x$  של הנקודה  $M$  שווה לערך ה- $y$  שלה. מצא את שיערי הנקודה  $M$ .  
 (ג) 1. מצא את רדיוס המעגל.  
 2. מצא את משוואת המעגל.



**פתרון**

**(א) מצא את משוואת הישר  $AM$ .**

**משוואת  $MA$**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$A(-6, -3) \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 6)$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 3 - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 6$$

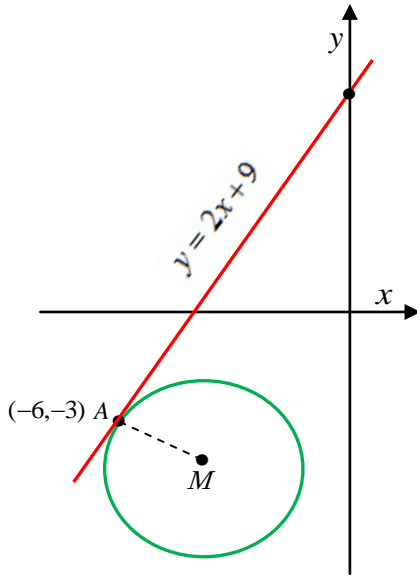
**שיפוע הרדיוס  $MA$**

$$m_{\text{משיק}} = 2 \quad m_{MA} = -\frac{1}{2}$$

שיפוע הופכי נגדי

**תשובה:**  $y_{AM} = -\frac{1}{2}x - 6$

**(ב) נתון כי ערך ה- $x$  של הנקודה  $M$  שווה לערך ה- $y$  שלה. מצא את שיערי הנקודה  $M$ .**



**נקודה  $M$**

$$y = -\frac{1}{2}x - 6$$

$$y = x$$

$$x = -\frac{1}{2}x - 6$$

$$1\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = -4$$

$$M(-4, -4)$$

**תשובה:**  $M(-4, -4)$

**(ג1). מצא את משוואת המעגל.**

**משוואת המעגל**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$M(-4, -4) \quad R^2 = 5$$

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 5$$

**תשובה:**  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 5$

**(ג2) מצא את רדיוס המעגל.**

**משוואת המעגל**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$M(-4, -4)$$

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = R^2$$

$$A(-6, -3)$$

$$(-6 + 4)^2 + (-3 + 4)^2 = R^2$$

$$R^2 = 5$$

$$R = \sqrt{5}$$

**תשובה:**  $R^2 = 5 \quad R = \sqrt{5}$

**תשובה סופית:**

**(א)**  $y_{AM} = -\frac{1}{2}x - 6$  **(ב)**  $M(-4, -4)$  **(ג1)**  $R^2 = 5$   $R = \sqrt{5}$

**(ג2)**  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 5$

**שאלה מספר 4:**

נתונה הפונקציה  $f(x) = x + \sqrt{x}$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) בדוק אם הנקודה (1,0) נמצאת על גרף הפונקציה.

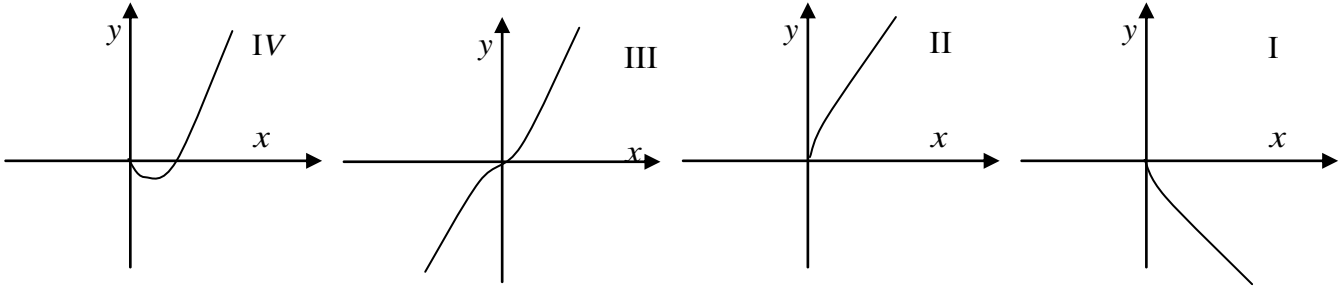
(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ג) (1) הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות.

(2) הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום  $0 < x$ .

(ד) לפניך ארבעה גרפים I, II, III, IV.

איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה? נמק.



**פתרון:**

(א). (1) **מצא את תחום הגדרה של הפונקציה.**

**תשובה:** תחום ההגדרה: לשורש ריבועי מוגדר למספרים חיוביים בלבד  $x \geq 0$ .

ב. (1) **בדוק אם הנקודה (1,0) נמצאת על גרף הפונקציה.**

**הנקודה (1,0)**

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$(1,0)$$

$$0 = (1) + \sqrt{1}$$

$$0 \neq 2$$

**תשובה:** לא, הנקודה (1,0) לא נמצאת על הגרף

(ב) **מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.**

**חיתוך עם ציר x**

$$y=0$$

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$0 = x + \sqrt{x}$$

$$-\sqrt{x} = x$$

לא קיים חיתוך עם ציר ה-x  
מלבד (0,0)

**חיתוך עם ציר y**

$$x=0$$

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$x=0$$

$$y = (0) + \sqrt{(0)}$$

$$y=0$$

$$(0,0)$$

**תשובה: (0,0)**

**(1ג) הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון פנימיות.**

$$f(x) = a\sqrt{bx}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

**פונקציה**  
x ; y

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**נגזרת ראשונה**  
x ; m

$$f'(x) = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-1 = 2\sqrt{x}$$

$$-0.5 = \sqrt{x}$$

**תשובה:** לא קיימת נקודת קיצון

**(2ג) הסבר מדוע הפונקציה עולה בתחום  $0 < x$ .**

$$f(x) = a\sqrt{bx}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot 1 \cdot b}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

**פונקציה**  
x ; y

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**נגזרת ראשונה**  
x ; m

$$f'(x) = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$x = 1$$

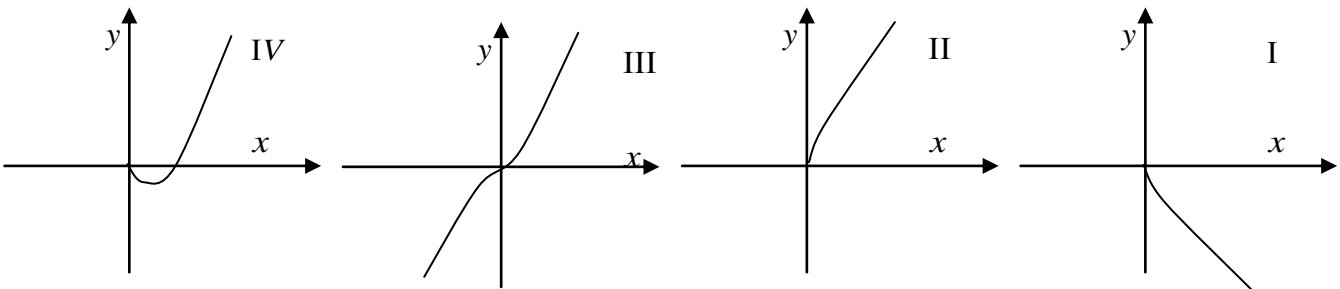
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}}$$

$$f'(x=1) = m = +2$$

**תשובה:** שיפוע חיובי הפונקציה עולה

**(ד) לפניך ארבעה גרפים I, II, III, IV**

**איזה מבין הגרפים מתאר את הפונקציה הנתונה ? נמק.**



**תשובה:** הגרף המתאים הוא גרף מספר 2. הגרף בעל שיפוע חיובי ולא חותך את ציר ה x ונקודת הקצה היא (0,0).

**תשובה סופית:**

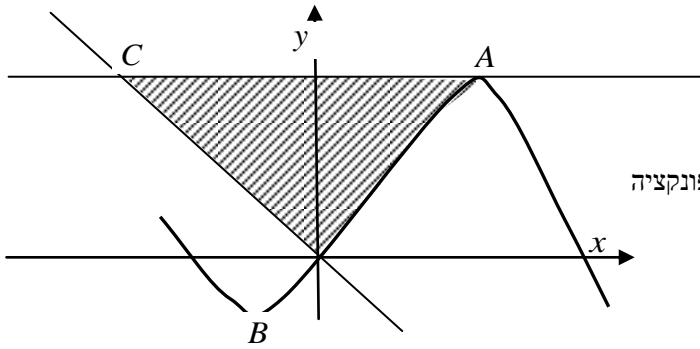
**(א)**  $x \geq 0$  : **(1ב)** לא, הנקודה (1, 0) לא נמצאת על הגרף **(2ב)** **(1ג)** **(0,0)**

**(2ג)** לא קיימת נקודת קיצון

**(ד)** הגרף המתאים הוא גרף מספר 2. הגרף בעל שיפוע חיובי ולא חותך את ציר ה x

ונקודת הקצה היא (0,0).

**שאלה מספר 5**



נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^3 + x^2 + x$

(א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה,

וקבע את סוגן (ענה בלי להסתמך על הגרף)

(ב) מנקודת המקסימום של הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה

(1) רשום את משוואת המשיק.

(2) מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק,

על ידי הישר  $y = -x$  ועל ידי גרף הפונקציה

(השטח המקווקו בציור)

**פתרון:**

(א) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן (ענה בלי להסתמך על הגרף)

**פונקציה**  
 $x; y$

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x$$

$$f(1) = -(1)^3 + (1)^2 + (1)$$

$$A(1,1)$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -(-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})$$

$$B(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{27})$$

**נגזרת ראשונה**  
 $x; m$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = -3x^2 - 2x + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(-3)(1)}}{2(-3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-6}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

**נגזרת שנייה**  
 $\min; \max$

$$f''(x) = -6x + 2$$

$$f''(1) = -6(-) + 2 = -4 \cap \max$$

$$f''(-\frac{1}{3}) = -6(-\frac{1}{3}) + 2 = +4 \cup \min$$

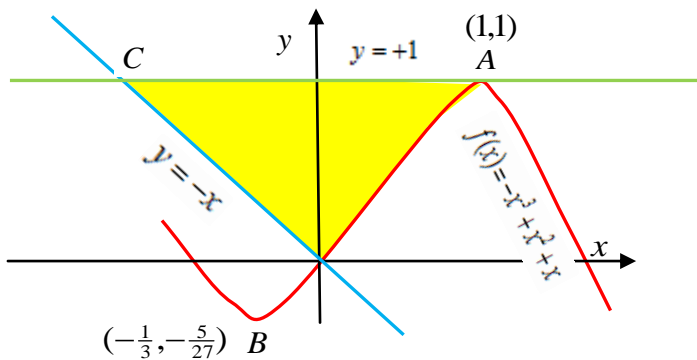
**תשובה:** נקודת הקיצון

$$(1,1) \cap \max$$

$$(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}) \cup \min$$

(ב) מנקודת המקסימום של הפונקציה העבירו משיק לגרף הפונקציה

(1) רשום את משוואת המשיק.



**משוואת המשיק**

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$(1,1) \quad m = 0$$

$$y - 1 = 0(x - 1)$$

$$y = +1$$

**נקודה C**

$$y = y$$

$$y = -x$$

$$y = 1$$

$$-x = 1$$

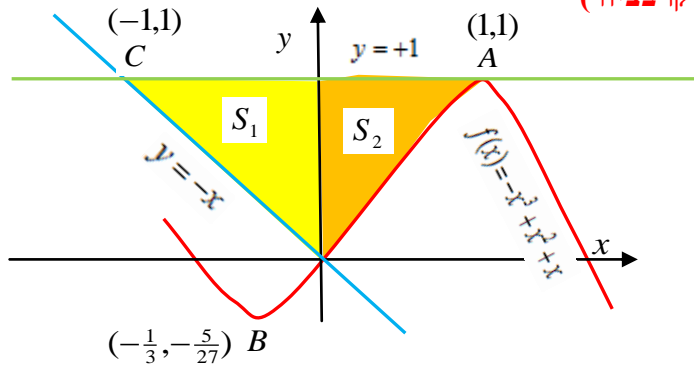
$$x = -1$$

$$C(-1,1)$$

**תשובה:** y = 1

**(2) מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי בישר  $y = -x$  ועל ידי גרף הפונקציה**

**(השטח המקוקו בציור)**



$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = 1$	גדול/ימין
$x = -1$	פונקציה תחתונה	$x = 0$
	$y = -x$	

$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$y = 1$	גדול/ימין
$x = 0$	פונקציה תחתונה	$x = 1$
	$y = -x^3 + x^2 + x$	

$$S_1 = \int_{-1}^0 (1) - (-x) dx$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (1+x) dx$$

$$S_1 = \left[ 1x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$S_1 = \left[ 1(0) + \frac{(0)^2}{2} \right] - \left[ 1(-1) + \frac{(-1)^2}{2} \right]$$

$$S_1 = \left[ 0 \right] - \left[ -\frac{1}{2} \right]$$

$$S_1 = \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$S_T = S_1 - S_2$$

$$S_T = \left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{5}{12} \right] = \frac{11}{12}$$

$$S_2 = \int_0^1 (1) - (-x^3 + x^2 + x) dx$$

$$S_2 = \int_0^1 (1+x^3 - x^2 - x) dx$$

$$S_2 = \left[ 1x + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$S_2 = \left[ 1(1) + \frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} \right] - \left[ 1(0) + \frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2} \right]$$

$$S_2 = \left[ \frac{5}{12} \right] + \left[ 0 \right]$$

$$S_2 = \left[ \frac{5}{12} \right]$$

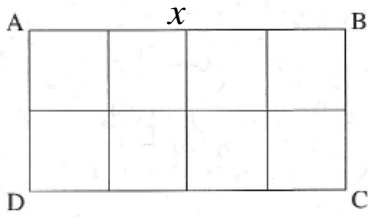
$$S_T = \left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{5}{12} \right] = \frac{11}{12} \text{ תשובה:}$$

**תשובה סופית:**

$$S_T = \left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{5}{12} \right] = \frac{11}{12} \text{ (2ב) } y = 1 \text{ (1ב) } \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right) \cup \min(1, 1) \cap \max(8)$$



**שאלה מספר 6.**



בית מלאכה מייצר סורגים ממוטות ברזל הסורג מורכב מ- 5 מוטות מאונכים שאורכם זהה, ומ- 3 מוטות אופקיים שאורכם זהה (ראה ציור) למסגרת החיצונית של הסורג יש צורת מלבן ABCD, ששטחו 15 מ"ר.

(א) סמן ב  $AB = x$  **הבע** באמצעות  $x$  את:

(1) אורך המוט BC.

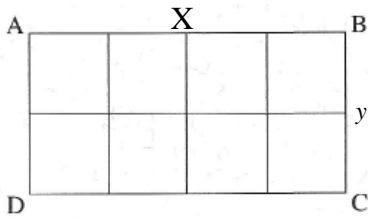
(2) סכום האורכים של כל מוטות הברזל הדרושים לייצור הסורג.

המוטות שמהם הרשת עשויה יהיה מינימלי

(ב) מצא מה צריך להיות הערך של  $x$  כדי שסכום האורכים של מוטות הברזל יהיה מינימלי

**פתרון:**

1. **משפט המטרה:** סכום אורכי מוטות העץ שמהם עשוי השלד יהיה מינימלי



2. **נוסחת המטרה:**  $p = 3x + 5y \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:**  $S = a \cdot b \Rightarrow x \cdot y = 15$

$$y = \frac{15}{x}$$

4. **פונקציית המטרה**  $p = 3x + 5y \Rightarrow \min$

$$p = 3x + 5 \cdot \left(\frac{15}{x}\right)$$

$$p = 3x + \frac{75}{x}$$

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

**הפונקציה**

$$P = 3x + \frac{75}{x}$$

$$x = 5$$

$$P = 3(5) + \frac{75}{(5)}$$

$$P = 30$$

**נגזרת ראשונה**

$$P' = 3 - \frac{75 \cdot 1}{x^2}$$

$$P' = 0$$

$$0 = 3 - \frac{75}{x^2}$$

$$\frac{75}{x^2} = 3$$

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 25$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{25}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -5$$

**נגזרת שנייה**

**Max/min**

$$p''(x) = +\frac{75 \cdot 2}{x^3}$$

$$p''(+5) = +\frac{150}{(5)^3} = +1.2 \cup \min$$

$$p''(-5) = +\frac{150}{(-5)^3} = -1.2 \cap \max$$

**צלעות הסורג**

מוט מאונך:  $x = 5$

$$y = \frac{15}{x}$$

מוט מאונך:  $y = \frac{15}{5}$

$$y = 3$$

**ריכוז התשובות**

$$x = 5 \quad \min$$

$$y = 3$$

$$p = 30$$

**תשובה סופית:**

$$x = 5 \Rightarrow \min \quad (ב)$$

$$p = 3x + \frac{75}{x} \Rightarrow \min \quad (2א)$$

$$AB = x \quad BC = \frac{15}{x} \quad (1א)$$