

**מבחן בגרות 35803 מועד א' קיץ תש"ע 2010.**

ענה על ארבע מהשאלות 1-6 (לכל שאלה - 25 נקודות) שים לב! אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמהכרתך.

**שאלה מספר 1:**

הנקודה  $M(4, 3)$  היא אמצע הקטע  $AB$  (ראה ציור)

שיעור ה- $x$  של הנקודה  $B$  הוא 6.

(א.) מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$ .

(2) הנקודה  $A$  נמצאת על הישר שמשוואתו  $y = 2x$

מצא את שיעור ה- $y$  של  $A$ .

(3) מצא את שיעור ה- $y$  של  $B$ .

ב. דרך הנקודות  $A$  ו- $B$  שמצאת את שיעוריהן, עובר מעגל.

הקטע  $AB$  הוא קוטר במעגל זה (ראה ציור).

מצא את משוואת המעגל.

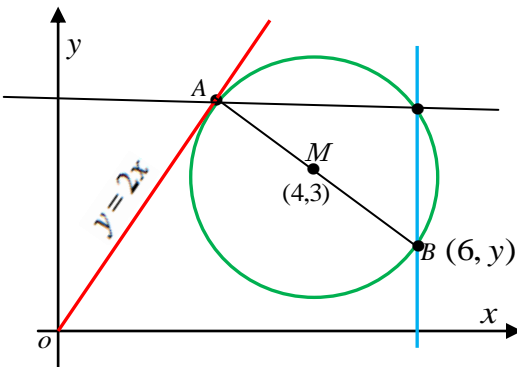
ג. הראה כי הישר שמשוואתו  $y = 2x$  חותך את המעגל רק

בנקודה אחת (כלומר הישר משיק למעגל)

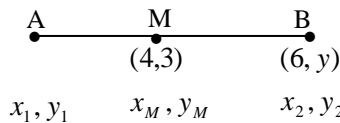
ד. הישר  $x = 6$  חותך את המעגל בנקודה  $B$  ובנקודה נוספת  $C$  מצא את משוואת הישר  $AC$ .

**פתרון:**

הנקודה  $M(4, 3)$  היא אמצע הקטע  $AB$  (ראה ציור) שיעור ה- $x$  של הנקודה  $B$  הוא 6. (1א) מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$ .



**נקודה A**



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$4 = \frac{x_1 + 6}{2}$$

$$8 = x_1 + 6$$

$$x_1 = 2 \quad A(2, y)$$

**תשובה:**  $A(2, y)$

(2א) הנקודה  $A$  נמצאת על הישר שמשוואתו  $y = 2x$  מצא את שיעור ה- $y$  של  $A$ .

**נקודה A**

$$y = 2x$$

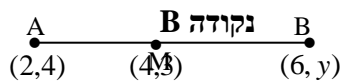
$$x = 2$$

$$y = 2(2) = 4$$

$$A(2, 4)$$

**תשובה:**  $A(2, 4)$

(3) מצא את שיעור ה- $y$  של  $B$ .



$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$3 = \frac{4 + y_2}{2}$$

$$6 = 4 + y_2$$

$$y_2 = 2$$

$$B(6, 2)$$

**תשובה:**  $B(6, 2)$

ב. דרך הנקודות A ו-B שמצאת את שיעוריהן עובר מעגל. הקטע AB הוא קוטר במעגל זה (ראה ציור). מצא את משוואת המעגל.

משוואת המעגל

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$M(4,3) \quad R^2 = 5$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = R^2$$

$$B(2,4)$$

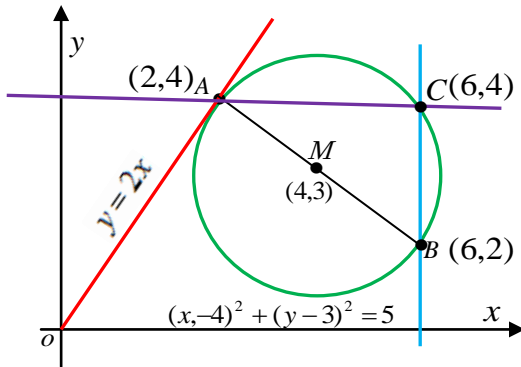
$$(2-4)^2 + (4-3)^2 = R^2$$

$$R^2 = 5$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$$

**תשובה:**  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$

ג. הראה כי הישר שמשוואתו  $y = 2x$  חותך את המעגל רק בנקודה אחת (כלומר הישר משיק למעגל)



חותך את המעגל בנקודה אחת

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$y = 2x$$

$$(x-4)^2 + (2x-3)^2 = 5$$

$$(x^2 - 8x + 16)^2 + (4x^2 - 12x + 9) = 5$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{20 \pm 0}{10}$$

$$x = 2$$

**תשובה:** הוכחה

ד. הישר  $x = 6$  חותך את המעגל בנקודה B ובנקודה נוספת C מצא את משוואת הישר AC.

נקודה C

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$x = 6$$

$$(6-4)^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$4 + (y-3)^2 = 5$$

$$y-3 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$y = \pm 1 + 3$$

$$y = -1 + 3 = 2$$

$$y = +1 + 3 = 4$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = 2$$

$$C(6,4)$$

משוואת AC

$$A(2,4) \quad C = (6,4)$$

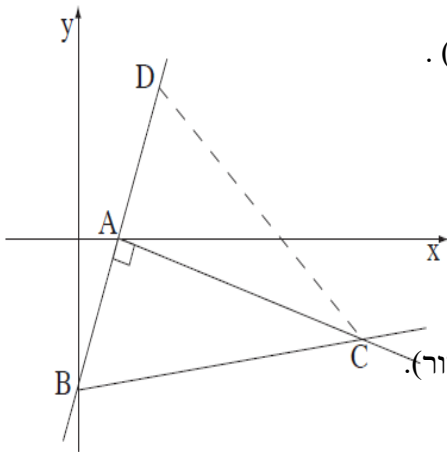
$$y = 4$$

**תשובה:**  $C(6,4) \quad y_{AC} = 4$

**תשובה סופית:**

(א)  $A(2,4) \quad B = (6,2)$  (ב)  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$  (ג) הוכחה (ד)  $C(6,4) \quad y_{AC} = 4$

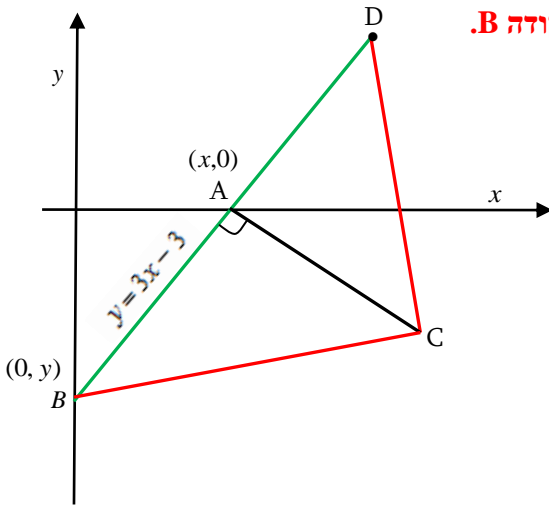
**שאלה מספר 2:**



- נתון ישר שמשוואתו  $y = 3x - 3$ .  
 הישר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A$ , ואת ציר ה- $y$  בנקודה  $B$  (ראה ציור).  
**(א)** מצא את השיעורים של הנקודה  $A$  ואת השיעורים של הנקודה  $B$ .  
 דרך הנקודה  $A$  העבירו אנך לישר הנתון.  
 ודרך נקודה  $B$  העבירו ישר החותך את האנך בנקודה  $C$ . (ראה ציור).  
**(ב)** מצא את משוואת האנך  $AC$ .  
**(ג)** נתון כי השיפוע של  $BC$  הוא  $\frac{1}{7}$ . מצא את השיעורים של הנקודה  $C$ .  
**(ד)** נקודה  $D$  נמצאת על הישר  $y = 3x - 3$  כך שהמשולש  $BCD$  הוא משולש שווה שוקיים ( $BC = DC$ ) (ראה ציור). מצא את השטח של משולש זה.

**פתרון:**

**(א) מצא את השיעורים של הנקודה  $A$  ואת השיעורים של הנקודה  $B$ .**



**נקודה A**

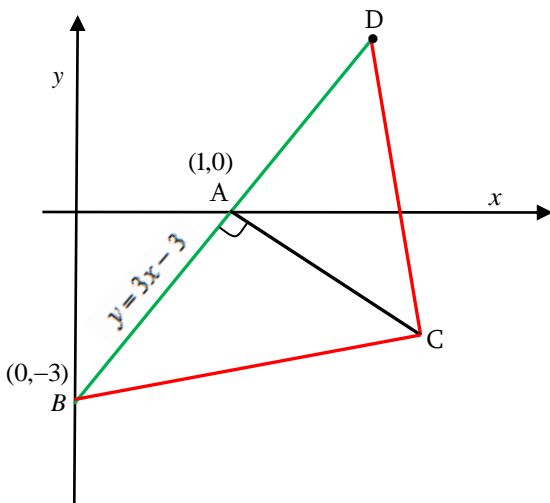
$$\begin{aligned} y &= 3x - 3 \\ y &= 0 \\ 0 &= 3x - 3 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \\ A &(1, 0) \end{aligned}$$

**נקודה B**

$$\begin{aligned} y &= 3x - 3 \\ x &= 0 \\ y &= 3(0) - 3 \\ y &= -3 \\ B &(0, -3) \end{aligned}$$

**תשובה:**  $A(1, 0)$   $B(0, -3)$

**(ב) מצא את משוואת האנך  $AC$ .**



**שיפוע AC**

$$m_{AB} = 3 \quad m_{AC} = -\frac{1}{3}$$

**שיפוע הופכי נגדי**

**משוואת AC**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

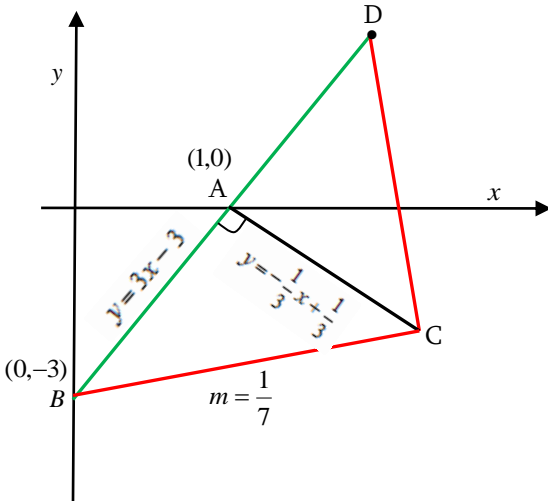
$$(1, 0) \quad m = -\frac{1}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

**תשובה:**  $y_{AC} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(ג) נתון כי השיפוע של BC הוא  $\frac{1}{7}$ . מצא את השיעורים של הנקודה C.



**משוואת BC**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$(0, -3) \quad m = \frac{1}{7}$$

$$y + 3 = \frac{1}{7}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{7}x - 3$$

**נקודה C**

$$y_{BC} = y_{AC}$$

$$\frac{1}{7}x - 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad y = \frac{1}{7}x - 3$$

$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{3}x = 3 + \frac{1}{3} \quad x = 7$$

$$\frac{10}{21}x = 3\frac{1}{3} \quad y = \frac{1}{7}(7) - 3$$

$$x = 7 \quad y = -2$$

$C(7, -2)$

**תשובה:**  $C(7, -2)$

(ד) נקודה D נמצאת על הישר  $y = 3x - 3$  כך שהמשולש BCD הוא משולש שווה שוקיים ( $DC = BC$ ) (ראה ציור). מצא את השטח של משולש זה

**מציאת אורך הקטע AC**

$A(1,0) \quad C(7,-2)$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (7 - 1)^2 + (-2 - 0)^2$$

$$d_{AC} = \sqrt{40}$$

$$d_{AC} = 6.32$$

**מציאת אורך הקטע AB**

$A(1,0) \quad B(0,-3)$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (0 - 1)^2 + (-3 - 0)^2$$

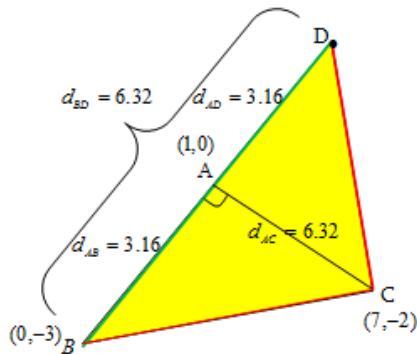
$$d_{AB} = \sqrt{10} = 3.16$$

$$d_{AB} = 3.16$$

**מציאת אורך הקטע BD**

$$d_{BD} = 2 \cdot d_{AB} = 2 \cdot 3.16$$

$$d_{BD} = 6.32$$



**שטח משולש BCD**

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

$$S_{BCD} = \frac{6.32 \cdot 6.32}{2}$$

$$S_{BCD} = 20$$

**תשובה:**  $S_{BCD} = 20$

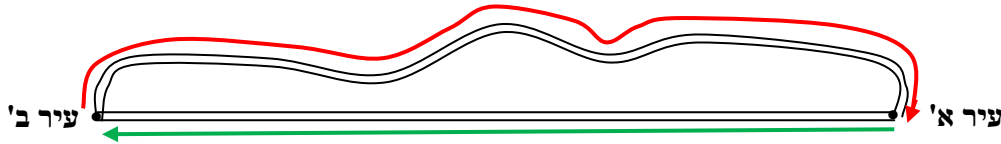
**תשובה סופית:**

(א)  $B(0, -3)$  (ב)  $y_{AC} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  (ג)  $C(7, -2)$  (ד)  $S_{BCD} = 20$

**שאלה מספר 3**

רוכב אופניים רכב מעיר א' לעיר ב' בכביש סלול במהירות קבועה של 20 קמ"ש. בדרכו חזרה הוא רכב במהירות קבועה בכביש עוקף, האורך פי 1.25 מהכביש הסלול. מהירות הרוכב בכביש העוקף הייתה קטנה ב- 5 קמ"ש ממהירותו בכביש הסלול. זמן הרכיבה של הרוכב בכביש העוקף היה ארוך ב- 2 שעות מזמן הרכיבה שלו בכביש הסלול. מצא את האורך של הכביש הסלול שבין עיר א' לעיר ב'.

**פתרון:**



בכביש העוקף		
זמן	מהירות	דרך
$t$	$v$	$S = t \cdot v$
$t + 2$	$20 - 5 = 15$	$S_2 = 15 \cdot (t + 2)$

בכביש הסלול		
זמן	מהירות	דרך
$t$	$v$	$S = t \cdot v$
$t$	20	$S_1 = 20 \cdot t$

$$S_2 = 1.25 \cdot S_1$$

$$15(t + 2) = 1.25 \cdot (20t)$$

$$15t + 30 = 25t$$

$$10t = 30$$

$$t = 3$$

**מצא את האורך של הכביש הסלול שבין עיר א' לעיר ב'.**

**תשובה:**  $S_1 = t \cdot v$      $S_1 = 20 \cdot 3$      $S_1 = 60$

**תשובה סופית:**

האורך של הכביש הסלול שבין עיר א' לעיר ב' 60 ק"מ

**שאלה מספר 4**

נתונה הפונקציה  $f(x) = -\frac{x}{4} - \frac{4}{x}$ .

- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה-x.
- (ג) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- (ד) האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x? אם כן – מצא את נקודות החיתוך. אם לא – נמק.
- (ה) האם לפונקציה  $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$  ( $x \neq 0$ ) יש נקודות קיצון? אם כן – מצא את נקודות החיתוך. אם לא – נמק.

**פתרון**

(א) **רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.**

**תשובה:** תחום הגדרה =  $x \neq 0$

(ב) **מצא את האסימפטוטה המאונכת לציר ה-x.**

**תשובה:** האסימפטוטה =  $x = 0$

(ג) **מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.**

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

**פונקציה**  
 $y = ?$   
 $f(x) = -\frac{x}{4} - \frac{4}{x}$   
 $f(4) = -\frac{(4)}{4} - \frac{4}{(4)}$   
 $y = -2$   
 $(4, -2)$   
 $f(-4) = -\frac{(-4)}{4} - \frac{4}{(-4)}$   
 $y = 2$   
 $(-4, 2)$

**נגזרת ראשונה**  
 $m = 0$   
 $f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{4 \cdot 1}{x^2}$   
 $f'(x) = m = 0$   
 $0 = -\frac{1}{4} + \frac{4}{x^2}$   
 $\frac{1}{4} = \frac{4}{x^2}$   
 $x^2 = 16$   
 $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$

**נגזרת שנייה**  
 $\max/\min$   
 $f'(x) = -\frac{4 \cdot 2}{x^3} = -\frac{8}{x^3}$   
 $f''(-4) = -\frac{8}{(-4)^3} = +\frac{1}{8} \cup \min$   
 $f''(4) = -\frac{8}{(+4)^3} = -\frac{1}{8} \cap \max$

**נקודות הקיצון:**  
 $(4, -2) \cap \max$   
 $(-4, 2) \cup \min$

(ד). האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ ? אם כן – מצא את נקודות החיתוך. אם לא – נמק.

**חיתוך עם ציר ה- $x$**

$$y=0$$

$$f(x) = -\frac{x}{4} - \frac{4}{x}$$

$$y = 0$$

$$0 = -\frac{x}{4} - \frac{4}{x} / 4x$$

$$0 = -x^2 - 16$$

$$x^2 = 16$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-16}$$

**שורש שלילי לכן אין חיתוך עם ציר ה- $x$**

(ה). האם לפונקציה  $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$  ( $x \neq 0$ ) יש נקודות קיצון?

אם כן – מצא את נקודות החיתוך. אם לא – נמק.

**פונקציה**

$$y=?$$

$$g(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$$

**נגזרת ראשונה**

$$m=0$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} + \frac{4 \cdot 1}{x^2}$$

$$g'(x) = m = 0$$

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{4}{x^2}$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{4}{x^2}$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

שורש שלילי

$$f(x) = \frac{a}{b \cdot x^n}$$

$$f'(x) = -\frac{a \cdot n}{b \cdot x^{n+1}}$$

**שורש שלילי  
לא קיימת נקודת קיצון בפונקציה**

**תשובה סופית:**

(ג).  $(-4,2) \cup \min$   $(4,-2) \cap \max$

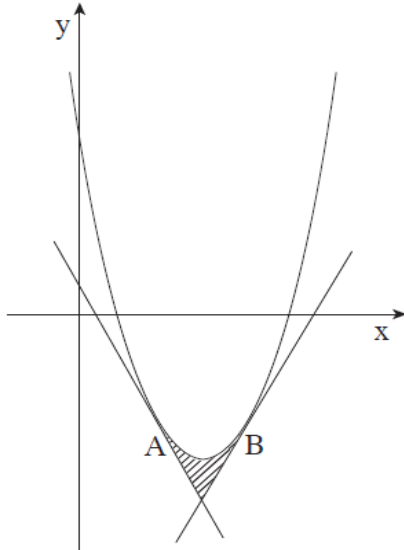
(ה). אין קיצון.

(ב).  $x = 0$

(א).  $x \neq 0$

(ד). אין נק' חיתוך

**שאלה מספר 5**



נתונה פרבולה שמשוואתה  $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(ראה ציור).

משוואת הישר המשיק לפרבולה בנקודה A היא  $y = -2x + 1$ .

משוואת הישר המשיק לפרבולה בנקודה B היא  $y = 2x - 11$ .

(א) מצא את שיעור ה-x של הנקודה A,

ואת שיעור ה-x של הנקודה B.

(ב) מצא את השטח המוגבל על ידי המשיקים ועל ידי הפרבולה.

(השטח המקוקו בציור).

**פתרון:**

(א) מצא את שיעור ה-x של הנקודה A,

ואת שיעור ה-x של הנקודה B.

**נקודה A**

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 - 6x + 5 &= -2x + 1 \\ x^2 - 6x + 5 + 2x - 1 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm 0}{2} \\ x_A &= 2 \end{aligned}$$

**נקודה A**

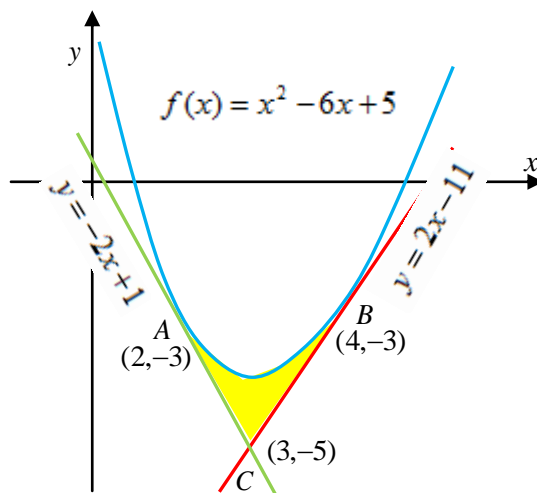
$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \\ x_A &= 2 \\ y &= -2(2) + 1 \\ y &= -3 \\ A &= (2, -3) \end{aligned}$$

**נקודה B**

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 - 6x + 5 &= 2x - 11 \\ x^2 - 6x + 5 - 2x + 11 &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{64 - 4(1)(16)}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{8 \pm 0}{2} \\ x_B &= 4 \end{aligned}$$

**נקודה B**

$$\begin{aligned} y &= 2x - 11 \\ x_B &= 4 \\ y &= 2(4) - 11 \\ y &= -3 \\ B &= (4, -3) \end{aligned}$$

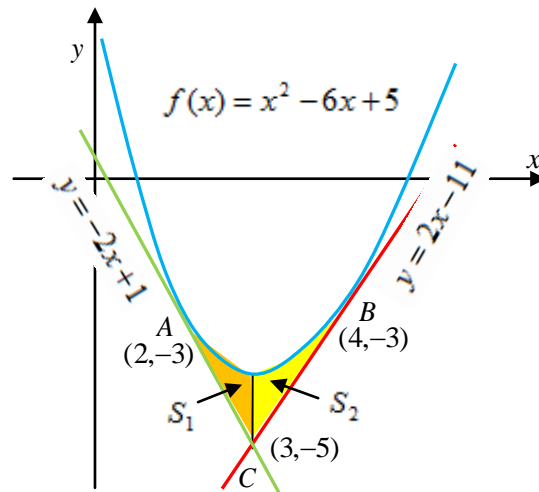


**נקודה C**

$$\begin{aligned} y &= y \\ -2x + 1 &= 2x - 11 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \\ y &= 2x - 11 \\ y &= 2(3) - 11 \\ y &= -5 \\ C &= (3, -5) \end{aligned}$$



(ב). מצא את השטח המוגבל על ידי המשיקים ועל ידי הפרבולה.  
( השטח המקוקו בצירור).



$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$f(x) = x^2 - 6x + 5$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 2$	$y = -2x + 1$	$x = 3$

$$S_1 = \int_2^3 (x^2 - 6x + 5) - (-2x + 1) dx$$

$$S_1 = \int_2^3 (x^2 - 6x + 5 + 2x - 1) dx$$

$$S_1 = \int_2^3 (x^2 - 4x + 4) dx$$

$$S_1 = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x \right]_2^3$$

$$S_1 = \left[ \frac{(3)^3}{3} - \frac{4(3)^2}{2} + 4(3) \right] - \left[ \frac{(2)^3}{3} - \frac{4(2)^2}{2} + 4(2) \right]$$

$$S_2 = \left[ 3 \right] - \left[ 2\frac{2}{3} \right]$$

$$S_1 = \left[ \frac{1}{3} \right]$$

$x$	פונקציה עליונה	$x$
קטן/שמאל	$f(x) = x^2 - 6x + 5$	גדול/ימין
	פונקציה תחתונה	
$x = 3$	$y = 2x - 11$	$x = 4$

$$S_2 = \int_3^4 (x^2 - 6x + 5) - (2x - 11) dx$$

$$S_2 = \int_3^4 (x^2 - 6x + 5 - 2x + 11) dx$$

$$S_2 = \int_3^4 (x^2 - 8x + 16) dx$$

$$S_2 = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x \right]_3^4$$

$$S_2 = \left[ \frac{(4)^3}{3} - \frac{8(4)^2}{2} + 16(4) \right] - \left[ \frac{(3)^3}{3} - \frac{8(3)^2}{2} + 16(3) \right]$$

$$S_2 = \left[ 21\frac{1}{3} \right] - \left[ 21 \right]$$

$$S_2 = \left[ \frac{1}{3} \right]$$

$$S_T = S_1 + S_2$$

$$S_T = \left[ \frac{1}{3} \right] + \left[ \frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3}$$

**תשובה סופית :**

$$S_T = \frac{2}{3} \quad (\text{ב}) \quad XB = 4 \quad XA = 2 \quad (\text{א})$$

**שאלה מספר 6.**

בציור נתונים הגרפים I ו-II של הפונקציות

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2 \quad f(x) = \frac{x-2}{4}$$

(א) איזה מבין הגרפים I ו-II הוא של הפונקציה  $f(x)$ ,

ואיזה גרף הוא של הפונקציה  $g(x)$ ? נמק.

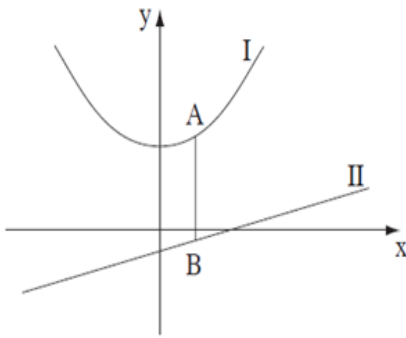
(ב) A היא נקודה על גרף I ו B היא נקודה על גרף II

כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y (ראה ציור).

מצא את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B,

שעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

(ג) מצא את האורך המינימלי של הקטע AB.



**פתרון:**

1. **משפט המטרה:** אורך הקטע AB הוא מינימלי

2. **נוסחת המטרה:**  $p = y_A - y_B \Rightarrow \min$

3. **נוסחת עזר:**  $y_A = \frac{1}{4}x^2 + 2 \quad y_B = \frac{x-2}{4}$

4. **פונקציית המטרה**  $p = y_A - y_B \Rightarrow \min$

$$p = \left[ \frac{1}{4}x^2 + 2 \right] - \left[ \frac{x-2}{4} \right]$$

$$p = \left[ \frac{1}{4}x^2 + 2 \right] - \left[ \frac{x}{4} - \frac{2}{4} \right]$$

$$p = \frac{1}{4}x^2 + 2 - \frac{x}{4} + \frac{2}{4}$$

$$p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$$

**הפונקציה**

$$p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$$

$$x = 0.5$$

$$p = \frac{1}{4}(0.5)^2 - \frac{1}{4}(0.5) + 2\frac{1}{2}$$

$$p = 2\frac{7}{16}$$

**נגזרת ראשונה**

$$p' = 0.5x - 0.25$$

$$p' = 0$$

$$0 = 0.5x - 0.25$$

$$0.25 = 0.5x$$

$$x = 0.5$$

**נגזרת שנייה**

**Max/min**

$$p''(x) = +0.5 \cup \min$$

**סיכום התשובות**

$$x = 0.5 \quad \min$$

$$y_A = 2\frac{1}{16}$$

$$y_B = -\frac{3}{8}$$

$$p = 2\frac{7}{16}$$

$$x = 0.5$$

$$y_A = \frac{1}{4}x^2 + 2 = \frac{1}{4}(0.5)^2 + 2 = 2\frac{1}{16}$$

$$y_B = \frac{x-2}{4} = \frac{0.5-2}{4} = -\frac{3}{8}$$

**תשובה סופית:**

(א) גרף II  $f(x)$  משוואת ישר

(ב)  $x_{AB} = 0.5 \quad \min$  (ג)  $AB = 2\frac{7}{16}$

גרף I  $g(x)$  פרבולה