

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
סה"כ	—		—		—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

### פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

**1.** המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.

רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.

3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של

2.5 מטרים לשנייה.

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו –

רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות

של 1.5 מטרים לשנייה.

אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

**א.** חשב את מהירות ההליכה של רננה.

**ב.** כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

**2.** הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל  $n$  טבעי על ידי כלל הנסיגה:  $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$ ,  $a_1 = -\frac{1}{c}$ . נתון:  $c > 0$ .

**א.** הוכח כי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות האי־זוגיים מהווים סדרה הנדסית,

וכי האיברים בסדרה  $a_n$  הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

**ב.** (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ . הבע את תשובתך באמצעות  $c$  אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות  $c$  את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

(3) הוכח שלכל  $n$  טבעי, הסכום של  $2n - 1$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  אינו תלוי ב־ $n$ .

**ג.** הסדרה  $b_n$  מוגדרת באופן הזה:  $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ .

(1) הראה כי  $b_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של  $c$  שבעבורם  $b_n$  היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האיך־סופית  $b_n$  היא סדרה יורדת.

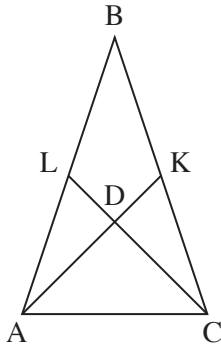
הבע באמצעות  $c$  את סכומה.

3. במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
- לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
- התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
- תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
- תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.
- כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.
- א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
- בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
- (1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
- (2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?
- ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
- בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
- מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
- ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.
- בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש- $k$  מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
- ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.
- מצא את  $k$ . נמק.

**פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור** (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = BC$ ).

$AK$  ו- $CL$  הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה  $D$ .

נתון:  $AK \perp CL$ .

א. הוכח:  $BD = AC$ .

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{\triangle BLDK}}{S_{\triangle ABC}}$ .

ג.  $M$  הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע  $ALKC$ .

(1) הוכח:  $\sphericalangle AML = 90^\circ$ .

(2) מצא את היחס  $\frac{AM}{AD}$ .

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

5.  $ABC$  הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

$BD$  הוא חוצה זווית במשולש  $ABC$ .

המשך הקטע  $BD$  חותך את המעגל החוסם את המשולש  $ABC$  בנקודה  $E$ .

גודל הזווית  $ABC$  הוא  $2\beta$ .

א. הבע באמצעות  $\beta$  את  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$ , היחס בין שטח המשולש  $ABC$  ובין שטח המשולש  $ADE$ .

אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון:  $BE$  שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש  $ABC$ .

ב. חשב את היחס  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$ .

נסמן ב- $a$  את אורך השוק  $AB$ .

ג. הבע באמצעות  $a$  את רדיוס המעגל החוסם על ידי המשולש  $ABC$ .

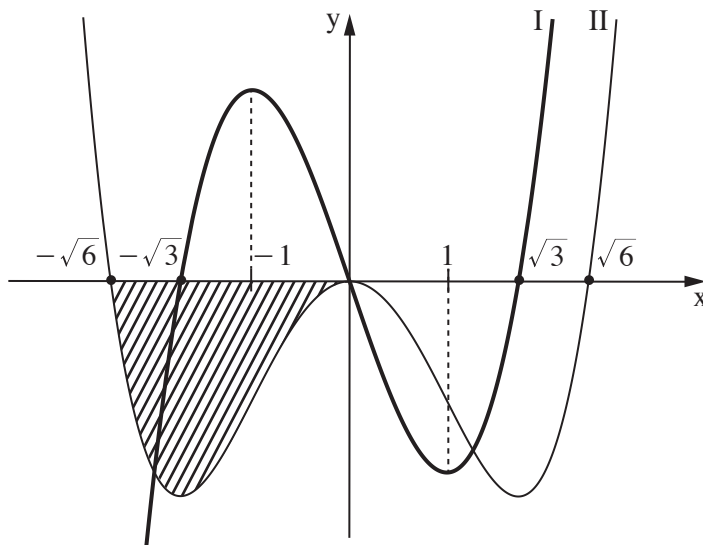
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות  
ושל פונקציות טריגונומטריות** (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. לפניך הגרפים של הפונקציות  $f'(x)$  ו- $f''(x)$  (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$ ) בתחום  $-2.5 \leq x \leq 2.5$ . שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



א. התאם בין הגרפים I ו- II ובין הפונקציות  $f'(x)$  ו- $f''(x)$ . נמק.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$  בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של  $x$  בתחום  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת,  $f'(x)$ , הוא מינימלי?

נתון:  $f(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתון: ערך הפונקציה  $f(x)$  בנקודת המקסימום שלה הוא  $t$ .

ה. הבע באמצעות  $t$  את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- $x$  (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים  $a, b, c$  ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ .

מצא את  $c$  ואת היחס  $\frac{a}{b}$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ ?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום  $x \geq \frac{2}{7}$ .

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה  $f(x)$  יש אסימפטוטה אופקית. מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $f(x)$ .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ענה על סעיף ו עבור התחום  $x > 0$ .

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .

לפניך 3 טענות (i-iii). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

(i) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

(iii) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$ , המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

8.

בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  בתחום  $x > 0$ ,

ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

נתון: שטח המלבן הוא 4.

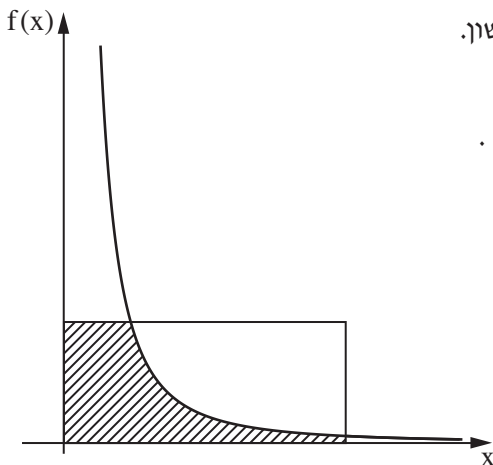
נסמן ב- $a$  את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- $x$ . נתון:  $a \geq \frac{1}{4}$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הצירים,

על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה  $f(x)$

(השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של  $a$  השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?



### בהצלחה!