

## XII. גיאומטריה אנליטית

### 45. ישרים במערכת צירים

#### א. משוואת הישר

1. משוואה כללית של ישר:  $Ax + By + C = 0$ , כאשר לפחות אחד מהפרמטרים  $A$  ו- $B$  שונה מ-0.

**דוגמה 1.** נתונה המשוואה:  $(2k-3)x + (p^2+2p)y + pk = 0$

מצא לאילו ערכי הפרמטר  $k$  ו- $p$  המשוואות הבאות: I. מייצגות את הישר האנכי.

II. מייצגות את הישר האופקי.

III. לא מייצגות את הישר.

IV. מייצגות את הישר.

$$A = 2k - 3$$

$$B = p^2 + 2p$$

$$2k - 3 = 0$$

$$p^2 + 2p = 0$$

$$k = 1.5$$

$$p = -2 \vee p = 0$$

**תשובה:** I.  $(A \neq 0 \wedge B = 0)$  כאשר:  $k \neq 1.5 \wedge (p = -2 \vee p = 0)$  (הישר הוא אנכי (מאונך לציר ה- $x$ ), כאשר:  $A \neq 0 \wedge B = 0$ )

II.  $(A = 0 \wedge B \neq 0)$  כאשר:  $k = 1.5 \wedge (p \neq -2 \wedge p \neq 0)$  (הישר הוא אופקי (מאונך לציר ה- $y$ ), כאשר:  $A = 0 \wedge B \neq 0$ )

III.  $(A = 0 \wedge B = 0)$  כאשר:  $k = 1.5 \wedge (p = -2 \vee p = 0)$  (המשוואה לא מייצגת את הישר, כאשר:  $A = 0 \wedge B = 0$ )

IV.  $(A \neq 0 \vee B \neq 0)$  כאשר:  $k \neq 1.5 \vee (p \neq -2 \wedge p \neq 0)$  (המשוואה מייצגת את הישר, כאשר:  $A \neq 0 \vee B \neq 0$ )

**דוגמה 2.** נתונה המשוואה:  $(k^2+k-2)x + (k^2+2k)y + k^2 - 1 = 0$

מצא לאילו ערכי הפרמטר  $k$  המשוואה: I. מייצגות את הישר האנכי.

II. מייצגות את הישר האופקי.

III. לא מייצגות את הישר.

IV. מייצגות את הישר.

$$A = k^2 + k - 2$$

$$B = k^2 + 2k$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$k^2 + 2k = 0$$

$$k = -2 \vee k = 1$$

$$k = -2 \vee k = 0$$

I. הישר הוא אנכי (מאונך לציר ה- $x$ ), כאשר:  $A \neq 0 \wedge B = 0$ , כלומר:  $\boxed{k=0} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq -2 \wedge k \neq 1 \\ k = -2 \vee k = 0 \end{cases}$

$$\text{בדוקה: } -2x - 1 = 0$$

II. הישר הוא אופקי (מאונך לציר ה- $y$ ), כאשר:  $A = 0 \wedge B \neq 0$ , כלומר:  $\boxed{k=1} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \vee k = 1 \\ k \neq -2 \wedge k \neq 0 \end{cases}$

$$\text{בדוקה: } 3y = 0$$

III. המשוואה לא מייצגת את הישר, כאשר:  $A = 0 \wedge B = 0$ , כלומר:  $\boxed{k=-2} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \vee k = 1 \\ k = -2 \vee k = 0 \end{cases}$

$$\text{בדוקה: } 0 + 3 = 0$$

IV. המשוואה מייצגת את הישר, כאשר:  $A \neq 0 \vee B \neq 0$ , כלומר:  $\boxed{k \neq -2} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq -2 \wedge k \neq 1 \\ k \neq -2 \wedge k \neq 0 \end{cases}$

**תשובה:** I.  $k = 0$  II.  $k = 1$  III.  $k = -2$  IV.  $k \neq -2$

**תרגילים.**

- מצא** לאילו ערכי הפרמטר  $k$  ו- $p$  המשוואות הבאות: I. מייצגות את הישר האנכי.  
 II. מייצגות את הישר האופקי.  
 III. לא מייצגות את הישר.  
 IV. מייצגות את הישר.

$$1. (k-4)x + (p+1)y + p - k = 0$$

$$2. (k^2 - 4)x + (p+5)y + p + k = 0$$

- מצא** לאילו ערכי הפרמטר  $k$  המשוואות הבאות: I. מייצגות את הישר האנכי.  
 II. מייצגות את הישר האופקי.  
 III. לא מייצגות את הישר.  
 IV. מייצגות את הישר.

$$3. (k-3)x + (k^2 - 3k)y + k + 6 = 0$$

$$4. (k^2 + 3k - 4)x + (k^2 - 16)y + 2 - k^2 = 0$$

- תשובות:** 1. I.  $k \neq 4 \wedge p = -1$   
 II.  $k = 4 \wedge p \neq -1$   
 III.  $k = 4 \wedge p = -1$   
 IV.  $k \neq 4 \vee p \neq -1$

2. I.  $k \neq \pm 2 \wedge p = -5$   
 II.  $k = \pm 2 \wedge p \neq -5$   
 III.  $k = \pm 2 \wedge p = -5$   
 IV.  $k \neq \pm 2 \vee p \neq -5$

3. I.  $k = 0$   
 II. אין.  
 III.  $k = 3$   
 IV.  $k \neq 3$

4. I.  $k = 4$   
 II.  $k = 1$   
 III.  $k = -4$   
 IV.  $k \neq -4$

**הערות.**  $k = \pm 2 \Leftrightarrow (k = 2 \vee k = -2)$   
 $k \neq \pm 2 \Leftrightarrow (k \neq 2 \wedge k \neq -2)$

2. מציאת משוואת הישר עפ"י שיפוע שלו ונקודה שעליו.

$(x_1, y_1)$

נתונה משוואה מפורשת הישר:  $y = mx + n$

נקודה  $(x_1, y_1)$  נמצאת על הישר הנתון:  $y_1 = mx_1 + n$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y_1 = mx_1 + n \end{cases}$$

$y - y_1 = mx - mx_1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

**משוואת ישר ששיפועו  $m$  העובר דרך הנקודה  $(x_1, y_1)$ :**  $y - y_1 = m(x - x_1)$

---

**הערות.** אם הישר עובר דרך הנקודה  $(x_1, y_1)$  ושיפועו אינו קיים, אז משוואת הישר (האנכי) היא:  $x = x_1$ .

**שיפוע הישר  $y = mx + n$** , היוצר עם כיוון החיובי של ציר ה- $x$  את הזווית  $\alpha$  הוא:  $m = \tan \alpha$ .

**דוגמה 1.** מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(2, 5)$  ושיפועו 3.

משוואת הישר המבוקש:  $y - y_1 = m(x - x_1)$

נציב:  $m = 3, x_1 = 2, y_1 = 5$

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6 + 5$$

**תשובה:**  $y = 3x - 1$

**דוגמה 2.** מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(3, 5)$  ומאונך לציר ה- $x$ .

שיפוע הישר המבוקש אינו קיים (קו ישר אנכי)

משוואת הישר המבוקש:  $x = 3$

**תשובה:**  $x = 3$

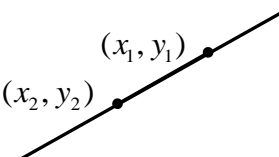
1. מצא את משוואת הישר ששיפועו  $m$  והעובר דרך הנקודה:
  - א.  $m = 3, (2, 5)$
  - ב.  $m = -\frac{1}{2}, (6, -3)$
  - ג.  $m = 0, (5, 3)$
2. מצא את משוואת הישר ששיפועו -4 והוא עובר בנקודת החיתוך של ישרים  $y = -2x + 5$  ו- $y = 2x + 1$ .
3. מצא את משוואת הישר המקביל לציר ה- $y$  והעובר בנקודת החיתוך של ישרים  $3x + y = 4$  ו- $y = x - 2$ .
4. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(2, -3)$  ומאונך לישר  $x = 5$ .
5. מצא את משוואת הישר היוצר זווית  $60^\circ$  עם כיוון החיובי של ציר ה- $x$  והעובר בנקודה  $(-2, 3)$ .
6. מצא את משוואת הישר היוצר זווית  $45^\circ$  עם כיוון החיובי של ציר ה- $y$  והעובר בנקודה  $(-2, 3)$ .

7. ישר ששיפועו  $-1.5$  עובר דרך הנקודה  $(2,3)$ . מצא את שטח המשולש הנוצר ע"י הישר הנ"ל והכיוונים החיוביים של הצירים.

8. שני ישרים ששיפועיהם  $-\frac{1}{2}$  ו- $\frac{3}{4}$  בהתאמה עוברים דרך הנקודה  $(6,2)$ . מצא את השטח המוגבל ע"י שני הישרים הנ"ל וציר ה- $y$ .

תשובות: 1. א.  $y = 3x - 1$  ב.  $y = -\frac{1}{2}x$  ג.  $y = 3$  ד.  $y = -4x + 7$  2.  $x = 1.5$  3.  $x = 1.5$  4.  $y = -3$   
 5.  $y = \sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} + 3$  6.  $y = 1 - x$  7.  $12.7$  8.  $22.5$

### 3. מציאת משוואת הישר עפ"י שתי נקודות שעליו.



נתונה משוואה מפורשת הישר:  $y = mx + n$   $x_1 \neq x_2$

נקודה  $(x_1, y_1)$  נמצאת על הישר הנתון:  $y_1 = mx_1 + n$

נקודה  $(x_2, y_2)$  נמצאת על הישר הנתון:  $y_2 = mx_2 + n$

$$\begin{cases} y_2 = mx_2 + n \\ y_1 = mx_1 + n \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad /:(x_2 - x_1) \neq 0$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

שיפוע ישר העובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  :  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

הערה: אם הישר עובר דרך הנקודות  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_1, y_2)$  אז משוואת הישר (האנכי) היא:  $x = x_1$ .

דוגמה. מצא את משוואת הישר העובר דרך שתי נקודות  $A(-4, 8)$  ו- $B(-2, 5)$ .

1. שיפוע הישר המבוקש:  $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{8 - 5}{-4 - (-2)} = -1.5$

2. משוואת הישר המבוקש:  $y - y_1 = m(x - x_1)$

נציב:  $y_B = 5, m = -1.5, x_B = -2$

$$y - 5 = -1.5(x + 2)$$

$$y = -1.5x - 3 + 5$$

תשובה:  $y = 2 - 1.5x$

1. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודות: א.  $(1,2), (4,-7)$  ב.  $(-4,1), (8,-2)$  ג.  $(2,5), (5,5)$

2. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(-2,5)$  ודרך נקודת חיתוך של ישר  $y = -3x + 6$  ו-  $y = 2x + 1$ .

3. מצא את משוואת הישר העובר בנקודה  $(4,2)$  ובנקודת חיתוך של ציר ה- $x$  עם ישר היוצר זווית  $45^\circ$  עם כיוון החיובי של ציר ה- $x$  והעובר בנקודה  $(3,5)$ .

4. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(-1,3)$  ודרך נקודת חיתוך של הישר  $2y - 5x = 0$  עם הישר העובר דרך הנקודה  $(1,6)$  ויוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

5. מצא את משוואות הצלעות של משולש שקדקודיו בנקודות: א.  $(-3,-2), (5,-1), (0,4)$  ב.  $(4,-2), (1,-2), (4,4)$ .

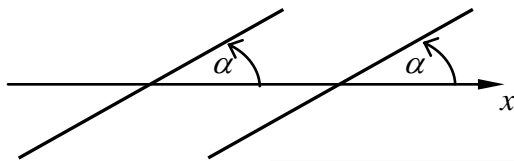
6. הוכח שהנקודות הבאות נמצאות על ישר אחד ומצא את משוואתו: א.  $(-2,-5), (0,1), (1,4)$  ב.  $(1,1), (3,-1), (5,-3)$ .

7. הוכח: הישר העובר דרך הנקודות  $(2,6)$  ו- $(-8,1)$  יוצר עם כיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית, קטנה פי 2 מהזווית שיוצר הישר  $4x - 3y = 5$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ . פתור בעיה גם ללא מחשבון.

**תשובות:** 1. א.  $y = -3x + 5$  ב.  $y = -0.25x$  ג.  $y = 5$  2.  $3y + 2x = 11$  3.  $3y - x = 2$  4.  $3y - 2x = 11$  5. א.  $8y - x = -13$ ,  $y = 2x + 4$ ,  $y = -x + 4$  ב.  $y = -2$ ,  $x = 4$ ,  $y = 2x - 4$  6. א.  $y = 3x + 1$  ב.  $y = -x + 2$

## ב. ישרים מקבילים זה לזה

נתונות משוואות מפורשות של שני ישרים מקבילים זה לזה:  $y = m_1x + n_1$  ו-  $y = m_2x + n_2$



$$\left. \begin{array}{l} m_1 = \tan \alpha \\ m_2 = \tan \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 = m_2 \quad (n_1 \neq n_2)$$

התנאי להקבלה של שני ישרים  $y = m_1x + n_1$  ו-  $y = m_2x + n_2$  :  $m_1 = m_2 \wedge n_1 \neq n_2$

**הערות.** הישרים  $x = x_1$  ו-  $x = x_2$  מקבילים זה לזה.

הישרים  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Ax + By + C_2 = 0$  ( $C_1 \neq C_2$ ) מקבילים זה לזה.

**דוגמה 1.** מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(-3, 4)$  ומקביל לישר  $6x + y - 9 = 0$ .

**דרך ראשונה.**

1. שיפוע הישר הנתון:  $6x + y - 9 = 0$

$$y = -6x + 9$$

$$m_1 = -6$$

2. שיפוע הישר המבוקש:  $m_2 = m_1 = -6$

3. משוואת הישר המבוקש:  $y - y_1 = m_2(x - x_1)$

$$y - 4 = -6(x + 3)$$

$$y = -6x - 18 + 4$$

**תשובה:**  $y = -6x - 14$

**דרך שנייה.**

1. הישר  $6x + y + C = 0$  מקביל לישר  $6x + y - 9 = 0$

2. נציב  $x = -3, y = 4$  ונקבל:  $6 \cdot (-3) + 4 + C = 0$  (ישר עובר בנקודה שיערי = הנקודה מקיימים את משוואתו)

$$C = 14$$

**תשובה:**  $6x + y + 14 = 0$

1. מצא את משוואת הישר המקביל לישר  $y = 2x + 3$  והעובר דרך נקודה  $(2, -6)$ .
2. מצא את משוואת הישר העובר דרך ראשית הצירים ומקביל לישר  $3y + x = 5$ .
3. מצא את משוואת הישר המקביל לישר  $2x + 3y = 2$  והעובר דרך נקודת החיתוך של הישרים  $2y + 4x = -7$  ו-  $-3y - 5x = 11$ .
4. מצא את משוואת הישר המקביל לישר  $5x + 3y = 2$  והחותך את ציר ה- $x$  בנקודה שמרחקה מהראשית 1.5.
5. מצא את משוואתו של ישר המקביל לישר  $y + 2x = 5$  ויוצר עם כיוונים החיוביים של הצירים משולש ששטחו 36.
6. מצא את משוואת הישר העובר בנקודה  $(3, 5)$  ומקביל לישר העובר דרך נקודות  $(2, 4)$  ו-  $(3, 6)$ .
7. הוכח: המרובע שקדקודיו  $(1, -1), (3, 5), (7, 3), (5, -3)$  הוא מקבילית.
8. שלושה קודקודי מקבילית  $ABCD$  הם  $A(-2, -2), B(4, 2), C(5, -1)$ . א. מצא את שיעורי קדקוד  $D$ . ב. מצא את משוואת האלכסון  $BD$ .
9. בטרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) נתון  $A(1, 0), B(9, 4), C(4, 4)$  ומשוואת  $AD$  היא  $y = 3x - 3$ . מצא את משוואת שאר הצלעות הטרפז ואת קדקוד  $D$ .

**דוגמה 2.** נתונים שני ישרים עם פרמטר  $m$ :  $(m^2 + m)x - my = m^2 + m + 3$ ,  $(m-1)x + (m+1)y = 2m$ . מצא לאילו ערכי הפרמטר  $m$  (אם יש כאלה) הישרים מקבילים זה לזה.

1. שיפועי הישרים:

$$\begin{aligned} (m-1)x + (m+1)y &= 2m \\ (m+1)y &= -(m-1)x + 2m \\ m &= -1 \quad m \neq -1 \quad (m+1 \neq 0) \\ \swarrow & \searrow \\ 0 = 2x - 2 & \quad y = \frac{-(m-1)}{m+1}x + \frac{2m}{m+1} \\ \text{אין שיפוע} & \quad \text{ישר אנכי} \\ \text{(ישר אנכי)} & \quad m_2 = \frac{-m+1}{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m^2 + m)x - my &= m^2 + m + 3 \\ (m^2 + m)x - (m^2 + m + 3) &= my \\ m &= 0 \quad m \neq 0 \\ \swarrow & \searrow \\ 0 + 3 = 0 & \quad \frac{m^2 + m}{m}x - \frac{m^2 + m + 3}{m} = y \\ \text{לא ישר} & \quad y = \frac{\cancel{m}(m+1)}{\cancel{m}}x - \frac{m^2 + m + 3}{m} \\ & \quad m_1 = m + 1 \end{aligned}$$

2. עבור  $m = -1$ :  $m_2$  לא קיים (ישר אנכי) ו-  $m_1 = -1 + 1 = 0$  (ישר אופקי), כלומר הישרים **מאונכים** זה לזה.

עבור  $m \neq 0 \wedge m \neq -1$ : הישרים מקבילים, כאשר  $m_2 = m_1$  וגם  $\frac{2m}{m+1} \neq -\frac{m^2 + m + 3}{m}$

$$\frac{-m+1}{m+1} = m+1 \quad /: (m+1) \neq 0$$

$$-m+1 = m^2 + 2m + 1$$

$$0 = m^2 + 3m$$

$$0 = m(m+3)$$

$$m \neq 0 \quad \text{או} \quad m+3 = 0$$

וגם  $\frac{2 \cdot (-3)}{-3+1} \neq -\frac{(-3)^2 - 3 + 3}{-3}$

$$m = -3$$

$$3 \neq 3$$

לא מתקיים

**תשובה:** אין.

מצא לאילו ערכי הפרמטר  $m$  הישרים הבאים מקבילים זה לזה.

$$\begin{aligned} (m-1)x + 2y + 2 &= 0 & .11 \\ mx - y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + 6 &= 0 & .10 \\ 2mx + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mx - (m-1)y + 3 &= 0 & .13 \\ 2mx + (m-1)y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - (m+1)y &= 0 & .12 \\ mx - y &= 1 - m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mx + (m+2)y + 2 &= 0 & .15 \\ 3x - (m+2)y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6y &= 3(m-2)x + 1 & .14 \\ (m-2)y - 2x &= 5 \end{aligned}$$

$$6y + 4x + 25 = 0 \quad .3$$

$$y = -\frac{1}{3}x \quad .2$$

**תשובות.** 1.  $y = 2x - 10$

$$y = 2x - 1 \quad .6 \quad y = -2x + 12 \quad .5$$

$$6y + 10x = -15 \quad \text{או} \quad 6y + 10x = 15 \quad .4$$

$$D(2,3), \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad y = 4, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad .9$$

$$5y - 7x = -18 \quad .8 \quad \text{א.} \quad (-1, -5) \quad .8$$

$$m = 0, m = 1 \quad .13$$

$$m = -2 \quad .12$$

$$m = \frac{1}{3} \quad .11$$

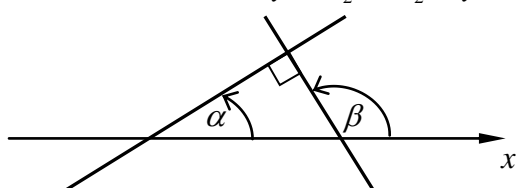
$$m = -\frac{2}{3} \quad .10$$

$$m = -2 \quad .15$$

$$m = 0, m = 4 \quad .14$$

### ג. ישרים מאונכים זה לזה

נתונות משוואות מפורשות של שני ישרים מאונכים זה לזה:  $y = m_1x + n_1$  ו-  $y = m_2x + n_2$



$$m_1 = \tan \alpha$$

$$m_2 = \tan \beta = \tan (90^\circ + \alpha) = \frac{\sin (90^\circ + \alpha)}{\cos (90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha \quad \left. \vphantom{m_2} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = \tan \alpha \cdot (-\cot \alpha) = -1$$

(עמ' 232 - 7,8)

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{או} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1} : m_2 \text{ ו- } m_1 \text{ ששיפועיהם}$$

הערות. הישרים  $x = x_1$  ו-  $y = y_1$  מאונכים זה לזה.

הישרים  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Bx - Ay + C_2 = 0$  מאונכים זה לזה.

**דוגמה 1.** מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה  $(-3, 4)$  ומאונך לישר  $6x + y - 9 = 0$ .

**דרך ראשונה.** 1. שיפוע הישר הנתון:  $6x + y - 9 = 0$

$$y = -6x + 9$$

$$m_1 = -6$$

2. שיפוע הישר המבוקש:  $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{6}$

3. משוואת הישר המבוקש:  $y - y_1 = \frac{1}{6}(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{1}{6}(x + 3)$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} + 4$$

$$y = \frac{1}{6}x + 4\frac{1}{2} \quad \text{תשובה:}$$

**דרך שנייה.**

1. הישר  $x - 6y + C = 0$  מאונך לישר  $6x + y - 9 = 0$

2. נציב  $x = -3, y = 4$  ונקבל:  $-3 - 6 \cdot 4 + C = 0$  (ישר עובר בנקודה שיערי = הנקודה מקיימים את משוואתו)  
 $C = 27$

**תשובה:**  $x - 6y + 27 = 0$

1. מצא את משוואת הישר הניצב לישר  $5y - 2x = 2$  והעובר דרך נקודה  $(-3, -1)$ .

2. מצא את משוואת הישר המאונך לישר  $3x - 2y = 9$  והחותך אותו על ציר ה- $x$ .

3. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(2, 3)$  והניצב לישר העובר דרך הנקודות  $(3, 6)$  ו-  $(-2, -4)$ .

4. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה  $(4, 3)$  והמאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(2, -1)$  ו-  $(5, -1)$ .



5. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודת החיתוך של ישרים  $x + y = 5$  ו-  $2x - y = 7$  והמאונך לישר העובר דרך נקודות  $(3, -6)$  ו-  $(10, 1)$ .

**דוגמה 2.** נתונים שני ישרים עם פרמטר  $m$ :  $(m^2 + m)x - my = m^2 + m + 3$ ,  $(m - 1)x + (m + 1)y = 2m$ . מצא לאילו ערכי הפרמטר  $m$  הישרים מאונכים זה לזה.

1. שיפועי הישרים:

$$\begin{aligned} (m-1)x + (m+1)y &= 2m \\ (m+1)y &= -(m-1)x + 2m \end{aligned}$$

$m = -1$        $m \neq -1 \ (m+1 \neq 0)$

$$0 = 2x - 2 \quad y = \frac{-(m-1)}{m+1}x + \frac{2m}{m+1}$$

אין שיפוע (ישר אנכי)

$$m_2 = \frac{-m+1}{m+1}$$

$$\begin{aligned} (m^2 + m)x - my &= m^2 + m + 3 \\ (m^2 + m)x - (m^2 + m + 3) &= my \end{aligned}$$

$m = 0$        $m \neq 0$

$$0 + 3 = 0 \quad \frac{m^2 + m}{m}x - \frac{m^2 + m + 3}{m} = y$$

לא ישר

$$y = \frac{\cancel{m}(m+1)}{\cancel{m}}x - \frac{m^2 + m + 3}{m}$$

$$m_1 = m + 1$$

2. עבור  $m = -1$ :  $m_2$  לא קיים (ישר אנכי)  $m_1 = -1 + 1 = 0$  (ישר אופקי), כלומר הישרים מאונכים זה לזה.

עבור  $m \neq 0 \wedge m \neq -1$ : הישרים מאונכים זה לזה, כאשר  $m_2 \cdot m_1 = -1$

$$\frac{-m+1}{\cancel{m+1}} \cdot \frac{\cancel{m+1}}{m+1} = -1$$

$$-m+1 = -1$$

$$m = 2$$

**תשובה:**  $m = -1$  או  $m = 2$ .

מצא לאילו ערכי הפרמטר  $m$  הישרים הבאים ניצבים זה לזה.

$$\begin{aligned} (m-1)x + 2y + 2 &= 0 & .7 \\ mx - y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + 6 &= 0 \\ 2mx + 4y - 2 &= 0 & .6 \end{aligned}$$

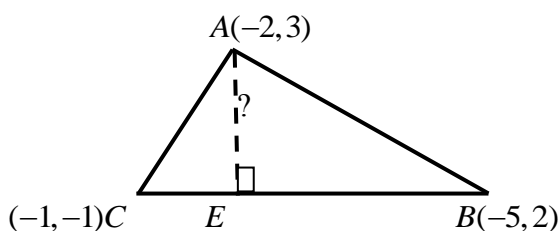
$$\begin{aligned} mx - (m-1)y + 3 &= 0 & .9 \\ (m-1)x - y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - (m+1)y &= 0 & .8 \\ mx + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mx + (m+2)y + 2 &= 0 & .11 \\ 9x - (m+2)y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6y &= 3(m-2)x + 1 \\ (m-2)y + 2x &= 5 & .10 \end{aligned}$$

**דוגמה 3.** קודקודי המשולש  $\triangle ABC$  הם:  $A(-2, 3)$ ,  $B(-5, 2)$ ,  $C(-1, -1)$ . מצא משוואת הגובה לצלע  $BC$ .



**הגדרה.** גובה במשולש הוא אנך מקדקוד המשולש לצלע שמולו (או להמשכה).

1. שיפוע הצלע  $CB$ :  $m_{CB} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 - 2}{-1 - (-5)} = -\frac{3}{4}$

2. שיפוע הגובה  $AE$ :  $m_{AE} = \frac{-1}{m_{CB}} = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

3. משוואת הגובה  $AE$ :  $y - y_A = m_{AE}(x - x_A)$

$$y - 3 = 1\frac{1}{3}(x + 2)$$

$$y = 1\frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3} + 3$$

**תשובה:**

12. המשולש  $ABC$  הוא ישר זווית ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ) נתון:  $A(2,-1), B(4,1)$  וכן ש-  $C$  נמצאת על ציר ה- $y$ .  
 א. מצא את משוואת הצלע  $BC$  ואת שיעורי הנקודה  $C$ .  
 ב. הראה שנקודה  $(7,2)$  נמצאת על הגובה ליתר  $AC$ .
13. במשולש ישר זווית  $ABC$  משוואת צלע  $AB$  היא  $y = -2x$  ומשוואת הצלע  $AC$  היא  $4y + 3x = 15$ . הנקודה  $(3,-1)$  נמצאת על הצלע  $BC$ . מצא את קדקודי המשולש (הבחן בין 2 מקרים).
14. שניים מקדקודיו של משולש הם בנקודות  $(0,3)$  ו-  $(1,-5)$  משוואת אחת מצלעותיו היא  $3y - 2x = 9$  ונתון שהנקודה  $(-1,-2)$  נמצאת על אחת מצלעות המשולש.  
 א. הוכח שהמשולש ישר זווית.  
 ב. מצא את משוואת הגובה ליתר.  
 ג. מצא את אורך הגובה ליתר.
15. קדקודיו של משולש הם  $(-6,1), (2,-3), (3,4)$ . מצא את נקודת מפגש הגבהים של המשולש.

17. במלבן  $ABCD$  נתון  $A(0,0), C(8,-1)$  ומשוואת הצלע  $AD$  היא  $y = 1.5x$ .  
 א. מצא את משוואות הצלעות  $AB$  ו- $CD$ .  
 ב. מצא את הקדקודים  $B$  ו- $D$ .  
 מצא בכל אחד מהתרגילים הבאים איזו צורה מתארים ארבעת הקדקודים (לפי הסדר) והוכח את תשובתך:

18.  $(7,1), (4,-5), (0,-3), (3,3)$ .

19.  $(2,3), (7,-2), (0,-3), (-5,2)$ .

20.  $(4,2), (0,5), (-4,3), (-2,-1)$ .

21. במשולש  $ABC$  שבו  $A(0,0), B(6,3)$  נפגשים הגבהים בנקודה  $(1,3)$ . מצא:  
 א. את אורך הגובה לצלע  $AB$ .  
 ב. את קדקוד  $C$ .

22. משוואות שניים מגבהי משולש הן  $y = 2x$  ו-  $y = -x + 6$ . אחד הקדקודים בנקודה  $(5,5)$ .  
 א. מצא את שני הקדקודים האחרים של משולש.  
 ב. מצא את משוואת הגובה השלישי והוכח שכל שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

**תשובות:** 1.  $2y + 5x = -17$  2.  $3y + 2x = 6$  3.  $2y + x = 8$  4.  $x = 4$  5.  $y = -x + 5$  6.  $2, -1$  7.  $\emptyset$  8.  $\pm 1$  9.  $\mathbb{R}$  10.  $1, 4$  11.  $(0, 5), y = -x + 5$  12.  $1, 4$

13.  $C(5, 0), B(1, -2), A(-3, 6)$  או  $C(4.2, 0.6), B(1.5, -3), A(-3, 6)$  14.  $8y - x = 11$  15.  $\frac{2\sqrt{65}}{5} = 3.225$  16.  $\left(-1\frac{2}{15}, \frac{11}{15}\right)$

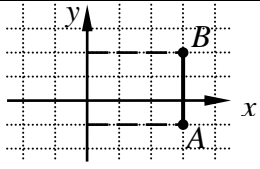
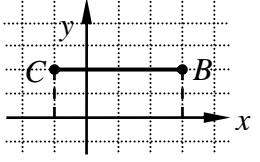
17.  $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}x$  18. מלבן 19. מעוין

20. טרפז ישר זווית 21.  $2\sqrt{5}$  22.  $(-3, 9), (0, 0)$  23.  $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$

## 46. קטעים במערכת צירים

### א. אורך הקטע (מרחק בין שתי נקודות)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{הוא } (x_2, y_2) \text{-ו- } (x_1, y_1)$$

$d = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$	$(-1, 2), (3, -1)$ $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$	<b>דוגמה 1.</b> מצא את המרחק בין שתי הנקודות $(-1, 2), (3, -1)$ .
$x_A = x_B = \boxed{3} \quad y_B > y_A$ $AB = y_B - y_A = 2 - (-1) = \boxed{3}$		<b>דוגמה 2.</b> מצא את המרחק בין שתי הנקודות $B(3, 2), A(3, -1)$ .
$y_B = y_C = \boxed{2} \quad x_B > x_C$ $BC = x_B - x_C = 3 - (-1) = \boxed{4}$		<b>דוגמה 3.</b> מצא את המרחק בין שתי הנקודות $B(3, 2), C(-1, 2)$ .

מצא את המרחק בין הנקודות הבאות:

1.  $(-2, 3), (1, -1)$     2.  $(7, 8), (-5, 3)$     3.  $(2, -2), (3, 1)$

מצא בתרגילים הבאים  $(4 - 7)$  אילו בין המשולשים שקדקודיהם נתונים הוא :  
 (1 ישר זווית, 2 שווה שוקיים, 3 ישר זווית ושווה שוקיים. נמק את תשובתך.

4.  $(4, 0), (4, 5), (1, 1)$     5.  $(1, 1), (0, -2), (-2, 2)$

6.  $(1, 3), (0, 2), (-2, 4)$     7.  $(1, 7), (5, 1), (-1, -3)$

**דוגמה 4.** במשולש שווה-שוקיים  $\triangle ABC$  ( $AC = CB$ ) נתון:  $A(2, 3), B(-5, 2)$ . קדקוד  $C$  נמצא על ציר ה- $y$ . מצא את שיעורי הקדקוד  $C$ .

$C$  נמצא על ציר ה- $y$ , לכן  $C(0, y)$

**משוואה:**  $AC = CB$

$$AC^2 = CB^2$$

$$AC^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (2 - 0)^2 + (3 - y)^2 = 4 + 9 - 6y + y^2 = y^2 - 6y + 13$$

$$CB^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (0 + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 4y + 29$$

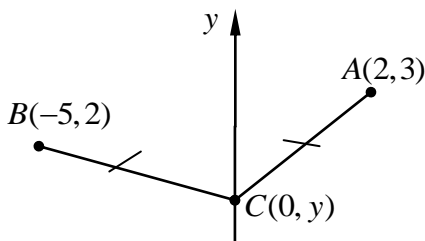
$$y^2 - 6y + 13 = y^2 - 4y + 29$$

$$-6y + 4y = 29 - 13$$

$$-2y = 16 \quad /:(-2)$$

$$y = -8$$

**תשובה:**  $C(0, -8)$



בתרגילים  $8 - 13$  נתונה הנקודה  $(2, 5)$ . מצא נקודה או נקודות:

8. המרוחקת ממנה 4 ושיעור ה- $y$  שלה 5.

9. המרוחקת ממנה 5 ושיעור ה- $x$  שלה  $-1$ .

10. המרוחקת ממנה 3 ושיעור ה- $x$  שלה שווה לשיעור ה- $y$ .

11. המרוחקת ממנה  $\sqrt{13}$  ונמצאת על ציר ה- $y$ .

12. המרוחקת ממנה  $\sqrt{20}$  ונמצאת על הישר  $y = 2x + 1$ .

13. המרוחקת ממנה  $\sqrt{5}$  ונמצאת על הפרבולה  $y = x^2 - 4x + 4$ .

14. במשולש שווה שוקיים  $ABC$  ( $AB=AC$ ) נתון:  $A(-1,1)$ ,  $B(5,3)$  ו- $C(1,t)$ .

א. מצא את  $t$  (הבחן בין שני מקרים).

ב. מצא את אורך בסיס המשולש.

15. מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם:

א.  $A(2,6)$ ,  $B(-3,3)$ ,  $C(0,0)$ . ב.  $A(3,8)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(4,5)$ .

16. מנקודת החיתוך של הישר  $y = 2x + 4$  עם ציר ה- $y$  מעלים אנך לישר. מנקודת החיתוך

של הישר  $y = \frac{1}{3}x - 1$  עם ציר ה- $x$  מעלים אנך לישר. חשב את שטח המרובע המוגבל

בין שני הישרים ושני האנכים.

17. הישר שמשוואתו  $y = 2x + 6$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $A$  והישר שמשוואתו

$y = 2x - 4$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $C$ . מנקודה  $A$  מורידים אנך לישר

$y = 2x - 4$  החותך אותו בנקודה  $B$  ומנקודה  $C$  מורידים אנך לישר  $y = 2x + 6$  החותך

אותו בנקודה  $D$ . חשב את שטח המרובע  $ABCD$ .

18. קודקוד הזווית הישרה במשולש ישר זווית נמצא על הישר  $y = -2x + 4$  ושני הקדקודים

האחרים הם בנקודות  $(1,1)$  ו- $(-1,-3)$ . מצא את קודקוד הזווית הישרה.

19. מצא על ישר  $3y - x = 9$  נקודה, שמרחקה מנקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$  שווה ל- $\sqrt{10}$ .

(הבחן בין שני מקרים)

20. במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) נתון  $A(6,4)$ ,  $B(-1,3)$ , וכן ש- $C$  נמצאת על ציר  $x$ .

א. מצא את שיעורי קדקוד  $C$  (הבחן בין שני מקרים).

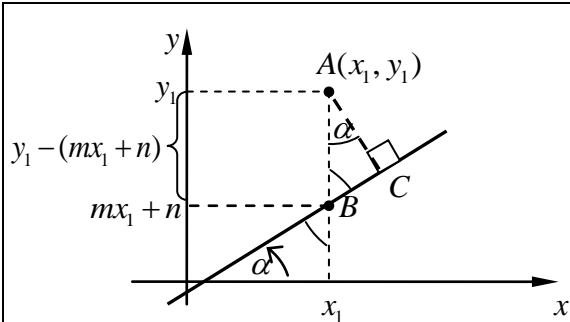
ב. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .

21. במרובע  $ABCD$  שבו  $AB \parallel DC$  ו- $BC=AD$  נתון  $A(-3,1)$ ,  $B(1,5)$ ,  $D(-3,-4)$ .

א. מצא את משוואת הצלע  $DC$ .

ב. מצא את שיעורי הקודקוד  $C$ , הבחן בין שני מקרים והסבר איזה מרובע מתקבל בכל מקרה.

22. מצא על הישר  $y = 2x$  נקודה שמרחקה מהנקודה  $(-3,0)$  גדול פי 2 ממרחק מהנקודה  $(2,0)$ . (הבחן בין שני מקרים).



נתונה משוואה מפורשת של ישר  $y = mx + n$  ונקודה  $(x_1, y_1)$

נסמן:  $AC = d$  - מרחק הנקודה מהישר (אנך)

במשולש ישר זווית  $ACB$ :  $AC = AB \cdot \cos \alpha$

$$AB = |y_1 - (mx_1 + n)| = |y_1 - mx_1 - n|$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + m^2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}$$

$$(0^\circ < \alpha < 90^\circ) \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1 + m^2}} : y = mx + n \text{ מהישר } (x_1, y_1) \text{ הנקודה } d \text{ מרחק}$$

23. מצא את המרחק של הנקודה  $(7, 5)$  מהישר  $y = -3x + 6$ .

24. מצא את המרחק של הנקודה  $(2, -3)$  מהישר  $3x - 2y = 6$ .

תשובות: 1. 5 2. 13 3.  $\sqrt{10}$  4. 2 5. 3.5 6. 1.6 7. 3.7 8.  $(6, 5)$  או  $(-2, 5)$

9.  $(-1, 1), (-1, 9)$  10.  $(2, 2), (5, 5)$  11.  $(0, 8), (0, 2)$

12.  $(4, 9), (0, 1)$  13.  $(2 - \sqrt{5}, 5), (2 + \sqrt{5}, 5), (4, 4), (0, 4)$

14. א.  $5\sqrt{7}$  ב.  $\sqrt{80} \vee \sqrt{32}$  15. א. 12 ב. 6.5 16. 17.5 17. 40

18.  $(2, 0)$  19.  $(-3, 2), (3, 4)$  20. א.  $(3, 0) \vee (2, 0)$  ב.  $12.5 \vee 12$

21. א.  $y = x - 1$  ב.  $(1, 0), (6, 5)$  22.  $(1, 2), \left(\frac{7}{15}, \frac{14}{15}\right)$  23.  $\sqrt{40}$

$$\frac{6\sqrt{13}}{13} = 1.664 \quad 24.$$

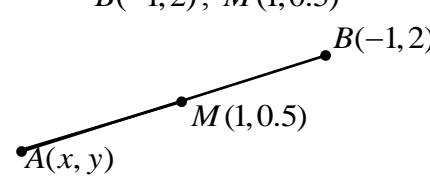
**ב. אמצע קטע**

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ אמצע הקטע שקצותיו } (x_1, y_1) \text{ ו- } (x_2, y_2) \text{ הוא בנקודה}$$

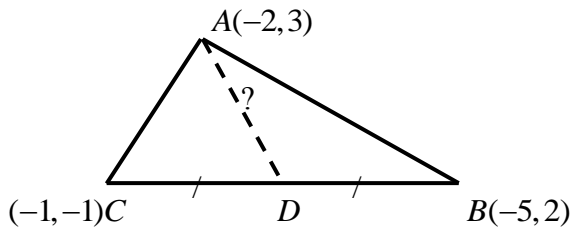
**דוגמה 1.** מצא את שיעורי נקודת האמצע של הקטע שקצותיו הם:  $(-1, 2)$ ,  $(3, -1)$ .

$$\begin{aligned} \text{שיעורי אמצע הקטע: } x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x_M &= \frac{3 + (-1)}{2} = 1, \quad y = \frac{-1 + 2}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

**תשובה:**  $(1, 0.5)$

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ $1^{1/2} = \frac{x + (-1)^{1/2}}{2} \qquad 0.5^{1/2} = \frac{y + 2^{1/2}}{2}$ $2 = x - 1 \qquad 1 = y + 2$ $3 = x \qquad -1 = y$ <p style="text-align: center;"><b>A(3, -1)</b></p>	<p><b>דוגמה 2.</b> מצא את שיעורי הקצה <math>A</math> של הקטע <math>AB</math>, אם נתונים אמצע הקטע <math>M</math> והקצה השני <math>B</math>:  <math>B(-1, 2)</math>, <math>M(1, 0.5)</math></p> 
--	---

**דוגמה 3.** קודקודי המשולש  $\triangle ABC$  הם:  $A(-2, 3)$ ,  $B(-5, 2)$ ,  $C(-1, -1)$ . מצא משוואת התיכון לצלע  $BC$ .



**הגדרה:** תיכון במשולש הוא קטע המחבר את קודקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.

1. שיעורי הנקודה  $D$  אמצע הצלע  $BC$ :

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{-1 + (-5)}{2} = -3$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = 0.5$$

2. שיפוע התיכון  $AD$ :

$$m_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{3 - 0.5}{-2 - (-3)} = 2.5$$

3. משוואת התיכון  $AD$ :

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$$

$$y - 3 = 2.5(x + 2)$$

$$y = 2.5x + 5 + 3$$

**תשובה:**  $y = 2.5x + 8$

בתרגילים 1 – 3 מצא את אמצע הקטע שקצותיו הם:

1.  $(-3, 5)$ ,  $(4, 1)$     2.  $(-3, -7)$ ,  $(7, 0)$     3.  $(4, -8)$ ,  $(-8, 8)$ .

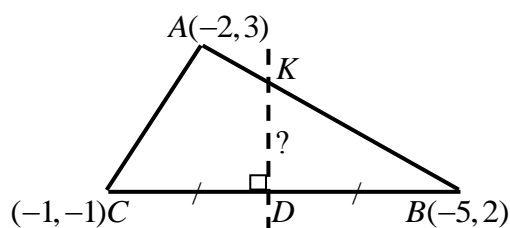
בתרגילים 4, 5 מצא את קצהו השני של קטע אם קצהו האחד בנקודה שמימין והאמצע שלו בנקודה שמשמאל:

4.  $(-9, 4)$ ,  $(-2, -2)$     5.  $(5, 6)$ ,  $(2.5, -0.5)$

6. קצהו האחד של קטע הוא על ציר ה- $x$ , והקצהו השני על ציר ה- $y$ . והאמצע שלו בנקודה  $(2, 3)$ . מצא את קצות הקטע.

7. במשולש  $ABC$  קודקוד  $A$  הוא בנקודה  $(6,4)$ . הנקודה  $(1.5,3)$  היא האמצע הצלע  $AB$  והנקודה  $(0.5,-0.5)$  היא אמצע הצלע  $BC$ . מצא את הקודקודים  $B$  ו- $C$  ואת אמצע צלע  $AC$ .
8. הנקודות  $(3,2)$ ,  $(-4,-5)$ ,  $(-3,0)$  הן שלושה קודקודים של מקבילית. מצא את נקודת מפגש אלכסונים ואת הקודקוד הרביעי. (מצא את כל אפשרויות).
9. משוואות שתיים מצלעות המקבילית הן  $y = x + 1$  ו- $y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ . נקודת המפגש אלכסונים היא  $(2,0)$ . מצא את קודקודי המקבילית.
10. מצא על קטע  $AB$  שקצותיו  $A(-2,-2)$  ו- $B(7,4)$ , שתי נקודות  $D$  ו- $C$ , המחלקות את הקטע ל-3 קטעים שווים.
11. אמצעי צלעותיו של משולש הן  $(-1,-1)$ ,  $(3,0)$ ,  $(1,3)$ . מצא את קודקודיו.

**דוגמה 5.** קודקודי המשולש  $\triangle ABC$  הם:  $A(-2,3)$ ,  $B(-5,2)$ ,  $C(-1,-1)$ . מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע  $BC$



**הגדרה:** אנך אמצעי לקטע הוא ישר העובר דרך אמצע הקטע ומאונך לקטע.

**תשובה:**  $y = 1\frac{1}{3}x + 4 + \frac{1}{2}$

1. שיעורי הנקודה  $D$  אמצע הצלע  $BC$ :

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{-1 + (-5)}{2} = -3$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = 0.5$$

2. שיפוע הצלע  $CB$ :  $m_{CB} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2 - (-1)}{-5 - (-1)} = -\frac{3}{4}$

3. שיפוע האנך האמצעי  $DK$ :  $m_{DK} = \frac{-1}{m_{CB}} = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$

4. משוואת האנך האמצעי  $DK$ :  $y - y_D = m_{DK}(x - x_D)$

$$y - 0.5 = 1\frac{1}{3}(x + 3)$$

16. קודקודיו של משולש הם  $(-6,1)$ ,  $(2,-3)$ ,  $(3,4)$ . מצא את נקודת מפגש של אנכים האמצעים לצלעות המשולש.

12. קודקודי המשולש הם  $A(3,2)$ ,  $B(-3,0)$ ,  $C(5,-4)$ .

א. מצא את משוואת התיכון לצלע  $AB$ .

ב. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע  $AB$ .

ג. מצא את משוואת הקטע אמצעים המחבר את אמצעי צלעות  $AB$  ו- $AC$  והוכח שהוא מקביל לצלע  $BC$ .

13. מצא את נקודת המפגש התיכונים במשולש שקודקודיו  $(0,0)$ ,  $(7,4)$ ,  $(2,8)$ .

14. במעוין  $ABCD$  נתון:  $A(3,4)$ ,  $B(4,-4)$  ומשוואת האלכסון  $BD$  היא  $x + 2y + 4 = 0$ .

מצא את משוואת אלכסון  $AC$  ואת הקודקודים  $C$  ו- $D$ .

15. אחד מקודקודי ריבוע  $ABCD$  הוא  $A(1,-3)$  ומשוואת אחד מאלכסוניו היא  $y = 2x$ .

א. מצא את משוואת האלכסון השני ואת הקודקוד  $C$ .

ב. מצא את אורך צלע הריבוע ואת שני הקודקודים הנותרים.

16. שלושה מקודקודיו של מלבן  $ABCD$  הם  $A(-4,2)$ ,  $B(2,5)$ ,  $C(4,1)$ .  
 א. מצא את שיעורי קודקוד  $D$ .  
 ב. חשב את שטחו והיקפו של המלבן.
17. מצא את הנקודה הסימטרית לנקודה  $(1,6)$  ביחס לישר  $y = x - 1$ . הדרכה: שתי נקודות הן סימטריות לגבי ישר, אם הישר הוא אנך האמצעי של הקטע המחבר אותן.
18. משוואת האלכסון  $AC$  של מעוין  $ABCD$  היא  $y = -2x + 4$  וקודקוד  $B$  הוא בנקודה  $(6,2)$ .  
 א. מצא את קודקוד  $D$ .  
 ב. מצא את שטח המעוין אם נתון שצלע  $AB$  מקבילה לציר ה- $x$ .
19. במשולש שווה שוקיים קודקודי הבסיס הם  $(1,0)$  ו- $(-3,4)$ .  
 א. מצא את משוואת הגובה לבסיס.  
 ב. נתון ששטח המשולש הוא 20. מצא את קודקוד הראש.
20. נתונים הישרים  $x = 5$ ,  $y = 3x$  והנקודה  $C(3,2)$ . דרך נקודה  $C$  עובר ישר החותך את הישרים הנ"ל בנקודות  $A$  ו- $B$ .  
 בהתאמה כך ש- $C$  היא אמצע קטע  $AB$ .  
 א. מצא את שיעורי הנקודות  $A$  ו- $B$ .  
 ב. מצא את משוואת הישר  $AB$ .
21. משוואות שתיים מצלעותיו של משולש הן  $y = x + 2$  ו- $y = -2x + 8$ .  
 אמצע הצלע השלישית הוא בנקודה  $(0, -1)$ . מצא את קודקודי המשולש.
- תשובות:** 1.  $(0.5, 3)$  2.  $(0, 1.5)$  3.  $(0, 0)$  4.  $(-8, 13)$  5.  $(-7, 0)$  6.  $(0, 6)$ ,  $(4, 0)$
7.  $B(-3, 2)$ ,  $C(4, -3)$ ,  $(5, 0.5)$  8.  $(0, 1)$ ,  $(4, 7)$  או  $(-0.5, -1.5)$ ,  $(2, -3)$  או  $(-3.5, -2.5)$ ,  $(-10, -7)$
9.  $(7, 2)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(-3, -2)$  10.  $(4, 2)$ ,  $(1, 0)$  11.  $(-3, 2)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(1, -4)$
12. א.  $y = -x + 1$  ב.  $y = -3x + 1$  ג.  $y = -0.5x + 1$  13.  $(3, 4)$
14.  $y = 2x - 2$ ,  $C(-3, -8)$ ,  $D(-4, 0)$  15.  $y = -0.5x - 2.5$ ,  $(-3, -1)$  ב.  $(-2, -4)$ ,  $(0, 0)$ ,  $\sqrt{10}$
16. א.  $(-2, -2)$  ב.  $30$ ,  $10\sqrt{5}$  17.  $(7, 0)$  18. א.  $(-2, -2)$  ב. 20
19. א.  $y = x + 3$  ב.  $(4, 7)$  או  $(-6, -3)$  20.  $(5, 1)$ ,  $(1, 3)$  ב.  $y = -0.5x + 3.5$  21.  $(4, 0)$ ,  $(-4, -2)$ ,  $(2, 4)$



**ג. חלוקת הקטע ביחס נתון**

שיעורי הנקודה  $P$  המחלקת את הקטע  $AB$  שקצותיו  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ביחס של  $\frac{AP}{PB} = \frac{k}{l}$

הם:  $P\left(\frac{lx_1 + kx_2}{k+l}, \frac{ly_1 + ky_2}{k+l}\right)$

כלומר:  $x_P = \frac{lx_A + kx_B}{k+l}, y_P = \frac{ly_A + ky_B}{k+l}$

**דוגמה 1.** מצא את שיעורי הנקודה המחלקת את הקטע שקצותיו הם:  $A(-2, 4)$ ,  $B(6, -3)$  ביחס 5:3 (הבדל בין שני מקרים).

$\frac{AM}{MB} = \frac{5}{3}$

$x_M = \frac{3x_A + 5x_B}{3+5} = \frac{3 \cdot (-2) + 5 \cdot 6}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$y_M = \frac{3y_A + 5y_B}{3+5} = \frac{3 \cdot 4 + 5 \cdot (-3)}{8} = \frac{-3}{8} = -0.375$

$M(3, -0.375)$

$\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$

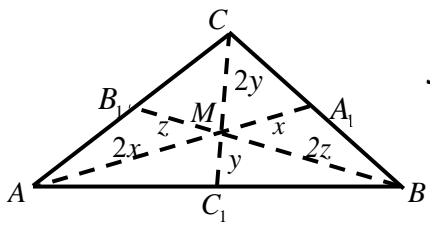
$x_M = \frac{5x_A + 3x_B}{5+3} = \frac{5 \cdot (-2) + 3 \cdot 6}{8} = \frac{8}{8} = 1$

$y_M = \frac{5y_A + 3y_B}{5+3} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot (-3)}{8} = \frac{11}{8} = 1.375$

$M(1, 1.375)$

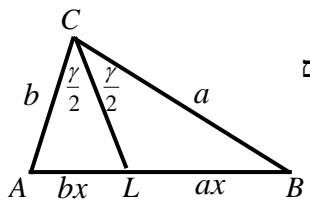
**משפטים הקשורים לנושאים בגיאומטריה אנליטית**

- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת  $M$ .
- נקודת החיתוך של התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1 מהקדקוד (החלק הקרוב לקדקוד הוא פי 2 מהחלק האחר).



$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2 \Rightarrow AM = \frac{2}{3} \cdot AA_1, MA_1 = \frac{1}{3} \cdot AA_1$$

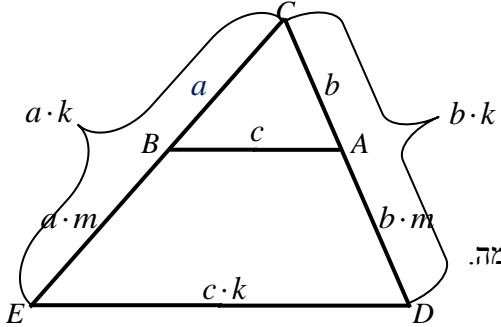
- הוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.



$$\frac{AL}{LB} = \frac{CA}{CB}$$

- משפט תאלס: אם שני ישרים מקבילים חותכים את שוקי הזווית (או משכם), אז הם מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BE}, \frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

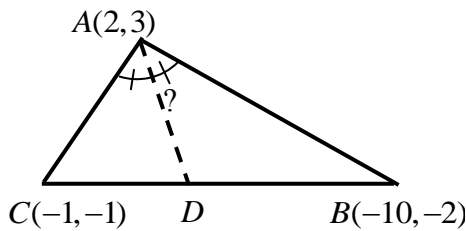


- משפט תאלס המורחב: שני ישרים מקבילים חותכים את שוקי הזווית (או משכם), מקצים בזווית משולשים עם צלעות פרופורציוניות בהתאמה.

$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

- משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.

דוגמה 2. קודקודי המשולש  $\triangle ABC$  הם:  $A(2,3)$ ,  $B(-10,-2)$ ,  $C(-1,-1)$ . מצא משוואת חוצה הזווית  $A$ .



1. אורך הצלע  $AC$ :

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = 5$$

2. אורך הצלע  $AB$ :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2+10)^2 + (3+2)^2} = 13$$

3. לפי משפט חוצה הזווית במשולש:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

4. שיעורי הנקודה  $D$ :

$$x_D = \frac{13x_C + 5x_B}{5+13} = \frac{13 \cdot (-1) + 5 \cdot (-10)}{5+13} = -3.5$$

$$y_D = \frac{13y_C + 5y_B}{5+13} = \frac{13 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2)}{5+13} = -1\frac{8}{18}$$

$$m_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{3 + 1\frac{8}{18}}{2 + 3.5} = \frac{73}{99}$$

5. שיפוע הישר  $AD$ :

6. משוואת חוצה הזווית  $AD$ :

$$y - 3 = \frac{73}{99}(x - 2)$$

$$y = \frac{73}{99}x + 1\frac{52}{99} \quad \text{תשובה}$$

הגדרה: חוצה הזווית במשולש הוא קטע המחבר את קודקוד המשולש עם נקודה על הצלע שמולו ומחלק את הזווית לשתי זוויות השווה זו לזו.

1. נתון  $A(3, -4)$ ,  $B(-3, 8)$ . מצא את נקודה  $P$  על קטע  $AB$  כך שמתקיים  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$ .

2. מצא על הקטע שקצותיו  $(-2, 5)$ ,  $(6, 1)$  נקודה המחלקת אותו לשני קטעים שיחס ביניהם  $\frac{3}{5}$  אם נתון שהנקודה הקרובה יותר לנקודה  $(-2, 5)$ .

3. מצא על הקטע  $AB$  שקצותיו  $A(-2, -1)$  ו-  $B(3, 4)$  נקודה המחלקת את הקטע לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו 2:3 (הבחן בין 2 מקרים).

4. מצא על הקטע  $AB$  שקצותיו  $A(-2, -2)$  ו-  $B(7, 4)$  שתי נקודות  $C$  ו-  $D$  המחלקות את הקטע ל-3 קטעים שווים.

5. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P(3, -1.5)$  את הקטע  $AB$  שקצותיו  $A(-2, 1)$  ו-  $B(6, -3)$ .

6. הנקודה  $P(a, 0)$  הנמצאת על הקטע  $AB$  שקצותיו  $A(-2, -3)$  ו-  $B(5, 4)$ .

א. מצא באיזה יחס  $P$  מחלק את  $AB$ ? ב. מצא את  $a$ .

7. הנקודה  $P$  מחלקת את  $AB$  כך שמתקיים  $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$ . מצא את  $B$  אם נתון:  $A(-8, -4)$ ,  $P(-2, -1)$ .

8. קצהו האחד של קטע הוא בנקודה  $(-2, -1)$ . הנקודה  $P(2, 3)$  נמצאת על הקטע ומחלקת אותו ביחס 4:1. מצא את קצהו השני של קטע. (הבחן בין 2 מקרים).

9. נתון:  $A(-1,-2)$ ,  $B(1,0)$ . מצא נקודה  $P$  על המשך  $AB$  אם:

א.  $P$  מהצד של  $B$  ומתקיים  $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$ . ב.  $P$  מהצד של  $A$  ומתקיים  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3}$ .

10. קדקודיו של משולש הם  $(1,3)$ ,  $(-4,1)$ ,  $(-3,8)$ . מצא את נקודת מפגש התיכונים.

11. שני קדקודיו של משולש הם  $(2,-3)$ ,  $(-4,-1)$ . מפגש התיכונים הוא בנקודה  $(1,2)$ . מצא את הקדקוד השלישי של המשולש.

12. אחד מקדקודי משולש הוא בנקודה  $(10,8)$ . אמצע אחת מהצלעות הוא בנקודה  $(7,2)$  ומפגש התיכונים הוא בנקודה  $(4,2)$ . מצא את שני הקדקודים האחרים של המשולש.

13. אמצעי שתי צלעות במשולש הם בנקודות  $(-1,3)$ ,  $(3,3.5)$ . מפגש התיכונים הוא בנקודה  $(1,2)$ . מצא את קודקודי המשולש.

14. הוכח: אם קודקודי המשולש הם  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  אז מרכז הכובד של משולש הוא בנקודה  $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ .

15. בטרפז  $ABCD$  שבו  $AB \parallel CD$  נתון:  $A(-5,-1)$ ,  $B(7,-5)$ ,  $C(5,-2)$ . חשב את קדקוד  $D$  אם נתון שהמשכי השוקיים של הטרפז נפגשים בנקודה  $(-1,7)$ .

16. בטרפז  $ABCD$  אורך הבסיס הגדול  $CD$  הוא פי 3 מאורך הבסיס הקטן  $AB$ . נתון:  $A(-1,5)$ ,  $B(3,3)$  ו- $C(4,-3)$ . מצא את קדקוד  $D$ .

17. קודקודיו של משולש הם:  $A(3,2)$ ,  $B(-5,-2)$  ו- $C(-1,4)$ . מצא את אורך חוצה זווית  $A$ .

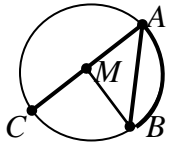
18.  $AD$  ו- $AE$  הם בהתאמה התיכון לצלע  $BC$  וחוצה זווית  $A$  במשולש  $ABC$ .

נתון:  $B(4,0)$ ,  $D(6,1.5)$ ,  $E\left(5\frac{1}{3}, 1\right)$ . מצא את קדקוד  $A$  אם נתון שהוא על ציר ה- $y$ .

- תשובות:** 1.  $(1.5, -1)$  2.  $(1, 3.5)$  3.  $(0, 1)$  או  $(1, 2)$  4.  $(1, 0)$ ,  $(4, 2)$  5.  $\frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$  6.  $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$  7.  $(6, 3)$  8.  $(3, 4)$  או  $(18, 19)$  9. א.  $(4, 3)$  ב.  $(-2, -3)$  10.  $(-2, 4)$  11.  $(5, 10)$  12.  $(4, -4)$ ,  $(-2, 2)$  13.  $(5, 0)$ ,  $(1, 7)$ ,  $(-3, -1)$  14.  $(-4, 1)$  15.  $(-8, 3)$  16.  $(0, 1)$  17.  $5\frac{1}{3}$  18.  $(0, 1)$

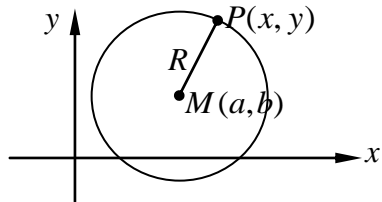
## 47. מעגל במערכת צירים (תיאוריה עמ' 28)

### א. משוואת המעגל

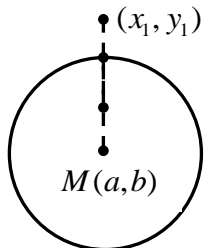
	<p>מעגל הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע <math>R</math> מאותה נקודה <math>M</math>.  <math>R</math> נקרא רדיוס המעגל ונקודה <math>M</math> נקראת מרכז המעגל.</p>
	<p>מעגל קנוני הוא מעגל אשר מרכזו בראשית הצירים <math>O(0,0)</math>.</p>
	<p>מיתר <math>AB</math> הוא קטע המחבר את שתי נקודות של המעגל.          קוטר <math>AC</math> הוא מיתר העובר דרך מרכז המעגל. אורכו שווה לפעמיים הרדיוס.          קשת <math>AB</math> היא חלק המעגל, הכלוא בין שתי נקודות על המעגל.          זווית מרכזית <math>\angle BMC</math> היא זווית אשר קדקודה הוא מרכז המעגל.          זווית היקפית <math>\angle BAC</math> היא זווית אשר קדקודה נמצא על המעגל וצלעותיה חותכים את המעגל.</p>

1. הגדרות

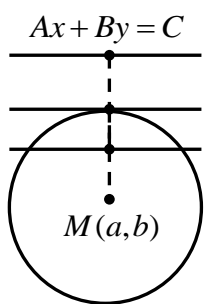
### 2. משוואת המעגל

	<p>נסמן: <math>P(x, y)</math> נקודה כלשהי של המעגל.          אז: <math>PM = R</math>  <math>PM^2 = R^2</math>  <math>\Downarrow</math>  <b>משוואת המעגל: <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2</math></b></p>
	<p>משוואה של מעגל קנוני: <math>x^2 + y^2 = R^2</math></p>
	<p>המשוואה <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 = c</math>:</p> <p>I. מייצגת את המעגל שמרכזו <math>(a, b)</math> ורדיוסו <math>R = \sqrt{c}</math>, כאשר <math>c &gt; 0</math>.          II. מייצגת את הנקודה <math>(a, b)</math>, כאשר <math>c = 0</math>.          III. מייצגת את קבוצה ריקה, כאשר <math>c &lt; 0</math>.</p>

### 3. מצב הדדי של נקודה ומעגל

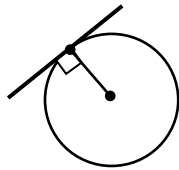
<p>תהי <math>(x_1, y_1)</math> נמצאת: <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2</math> משוואת המעגל, אז הנקודה <math>(x_1, y_1)</math> נמצאת:</p> <p>I. על המעגל, אם ורק אם מתקיים השוויון: <math>(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2</math></p> <p>II. בתוך המעגל, אם ורק אם מתקיים אי-השוויון: <math>(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &lt; R^2</math></p> <p>III. מחוץ למעגל, אם ורק אם מתקיים אי-השוויון: <math>(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &gt; R^2</math></p>	
---	---

### 4. מצב הדדי של ישר ומעגל

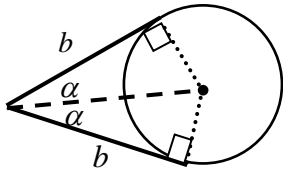
<p>תהי <math>(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2</math> משוואת המעגל, אז הישר <math>Ax + By = C</math>:</p> <p>שני פתרונות: <math>\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ Ax + By = C \end{cases}</math> I. חותך את המעגל, אם ורק אם יש למערכת:</p> <p>פתרון יחיד: <math>\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ Ax + By = C \end{cases}</math> II. משיק למעגל, אם ורק אם יש למערכת:</p> <p>אף פתרון: <math>\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ Ax + By = C \end{cases}</math> III. מבודד מהמעגל, אם ורק אם אין למערכת:</p>	
--	---

5. הגדרות ומשפטים הקשורים לנושאים בגיאומטריה אנליטית

הגדרה. משיק למעגל הוא קו ישר שיש לו עם המעגל נקודה משותפת אחת בלבד (נקודת השקה).

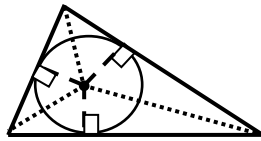


1. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
2. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.



3. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
4. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

הגדרות. מעגל חוסם את המצולע (מצולע בר חסימה), אם הוא עובר דרך כל קדקודיו (קדקודים נמצאים על המעגל).  
מעגל חסום במצולע, אם הוא נוגע בכל צלעותיו (צלעותיו משיקים למעגל).

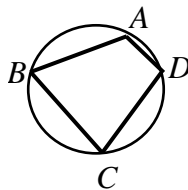


5. שלושת חוצי הזוויות של משולש נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.



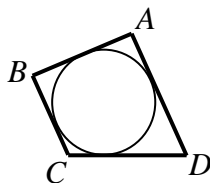
6. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



7. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ .

$$AB + CD = AC + BD$$



8. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

תרגילים:

מצא את משוואת המעגל עפ"י מרכזו  $M$  ורדיוסו  $R$ :

1.  $M(0,0), R = \sqrt{15}$
2.  $M(1,-2), R = 4$
3.  $M(2,-3), R = \sqrt{10}$

מצא את משוואת המעגל שמרכזו  $M$  והעובר דרך נקודה נתונה  $A$ :

4.  $M(0,0), A(1,3)$
5.  $M(-3,5), A(1,2)$
6.  $M(-2,0), A(-3,7)$

מצא את המרכז ואת הרדיוס של המעגלים הבאים:

<p><b>דוגמה 2.</b> <math>x^2 + y^2 - 6mx + 8my = -18</math></p> <p><math>x^2 - 6mx + y^2 + 8my = -18</math></p> <p><math>x^2 - 2x \cdot 3m + y^2 + 2y \cdot 4m = -18</math> <small>/+ (3m)<sup>2</sup> /+ (4m)<sup>2</sup></small></p> <p><math>x^2 - 2x \cdot 3 + (3m)^2 + y^2 + 2y \cdot 4 + (4m)^2 = -18 + 9m^2 + 16m^2</math></p> <p><small>(x-3m)<sup>2</sup> (y+4m)<sup>2</sup> 25m<sup>2</sup>-18</small></p> <p><math>(x-3m)^2 + (y+4m)^2 = 25m^2 - 18</math></p> <p><math>(x-3m)^2 + (y-(-4m))^2 = (\sqrt{25m^2 - 18})^2</math></p> <p><b>תשובה:</b> <math>R = \sqrt{25m^2 - 18}</math>, מרכז המעגל: <math>(3m, -4m)</math>, כאשר <math>25m^2 - 18 &gt; 0</math></p>	<p><b>דוגמה 1.</b> <math>x^2 + y^2 - 6x + 8y = -18</math></p> <p><math>x^2 - 6x + y^2 + 8y = -18</math></p> <p><math>x^2 - 2x \cdot 3 + y^2 + 2y \cdot 4 = -18</math> <small>/+ 3<sup>2</sup> /+ 4<sup>2</sup></small></p> <p><math>x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 + y^2 + 2y \cdot 4 + 4^2 = -18 + 9 + 16</math></p> <p><small>(x-3)<sup>2</sup> (y+4)<sup>2</sup> 7</small></p> <p><math>(x-3)^2 + (y+4)^2 = 7</math></p> <p><math>(x-3)^2 + (y-(-4))^2 = (\sqrt{7})^2</math></p> <p><b>תשובה:</b> <math>R = \sqrt{7}</math>, מרכז המעגל: <math>(3, -4)</math>.</p>
---	---

**תרגילים**

7.  $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$       8.  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$

9.  $x^2 + y^2 + 8y = 20$       10.  $x^2 + y^2 - 12x + 2y = -7$

11. א. שרטט את המעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 6x = 16$  ומצא ע"י חישוב את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.  
 ב. קבע בעזרת חישוב (ובדוק בשרטוט) לגבי כל אחת מהנקודות הבאות האם היא (1) בתוך המעגל, (2) על המעגל, (3) מחוץ למעגל:  $(-1, -3)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(7, 3)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(-2, -1)$

12. משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 8my = 12$ . מצא את  $m$ , את רדיוס המעגל ואת מרכזו, אם נתון שהמעגל עובר בנקודה: א.  $(-2, 0)$ . ב.  $(-1, -1)$ .

13. מצא את  $m$ , את רדיוסו ואת מרכזו של מעגל שמשוואתו היא:  $x^2 + y^2 + 4mx - 2(m-1)y = 3$  ומרכזו נמצא:  
 א. על ציר ה- $y$ . ב. על ציר ה- $x$ . ג. על הישר  $y = x$ .

14. מצא את  $m$  ואת מרכזו של מעגל אם נתון שמשוואתו היא  $x^2 + y^2 - 2mx + 6my = 9$  ורדיוסו שווה 7.

15. מרכז מעגל שרדיוסו  $\sqrt{13}$  נמצא על ציר ה- $x$  והוא עובר דרך הנקודה  $(6, -3)$ . מצא את משוואת המעגל.

16. מרכזו של מעגל נמצא על ציר ה- $y$  והוא עובר דרך הנקודות  $(1, 3)$  ו- $(3, 5)$ .  
 א. מצא את משוואת המעגל.  
 ב. הראה (בעזרת משוואת המעגל) שהוא אינו חותך את ציר ה- $x$ .

בתרגילים 17 – 19 מצא את משוואת המעגל שהנקודות הבאות הן קצות קוטר שלו:

17.  $(-2, 3)$ ,  $(4, 1)$       18.  $(5, 3)$ ,  $(-1, -3)$       19.  $(0, 2)$ ,  $(0, -5)$

20. מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר  $y = 3x - 10$  מהמעגל  $x^2 + y^2 = 20$

בתרגילים 21, 22 מצא את משוואת המעגל הנתון עפ"י שתי נקודות שעליו ורדיוסו:

21.  $R = \sqrt{50}$ ,  $(1, 7)$ ,  $(5, 5)$       22.  $R = 5$ ,  $(3, -1)$ ,  $(1, 3)$

23. נתון מעגל שמרכזו בנקודה  $(3,2)$  והוא עובר דרך הנקודה  $(4,4)$ .  
 א. מצא את משוואת המעגל והראה שהוא עובר דרך הנקודה  $(5,1)$ .  
 ב. מצא מעגל נוסף שעובר דרך הנקודות  $(4,4)$  ו- $(5,1)$  ורדיוסו שווה לרדיוס המעגל שמצאת בסעיף א'.
24. מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו על הישר  $y = 2x$ , רדיוסו  $\sqrt{20}$  והוא עובר דרך הנקודה  $(3,-4)$ .
25. מרכזו של מעגל נמצא על הישר  $y = 3x$  והוא עובר דרך הנקודות  $(4,2)$  ו- $(0,0)$ .  
 א. מצא את משוואתו של המעגל.  
 ב. דרך כל אחת מהנקודות הנ"ל מעבירים קוטר במעגל. מצא את הקצה השני של כל קוטר והוכח שארבעת הקצוות מהווים קדקודים של ריבוע.
26. קודקודי משולש הם  $A(7,5)$ ,  $B(6,-2)$ ,  $C(-2,2)$ .  
 א. מצא את משוואת האנך האמצעי לצלע  $BC$  ואת משוואת האנך האמצעי לצלע  $AC$ .  
 ב. מצא את משוואת המעגל בחוסם את משולש  $ABC$ .
27. במעגל  $x^2 + y^2 - 2x = 24$  חסום מלבן ששנייה מקדקודיו הם  $(1,5)$  ו- $(5,3)$ .  
 א. מצא את שני הקודקודים האחרים של המלבן.  
 ב. מצא את היקפו של המרובע שקודקודיו הם אמצעי צלעות המלבן.
28. נתונים המעגלים  $x^2 + y^2 = 20$  ו- $x^2 + y^2 - 10x - 10y = -40$ .  
 א. מצא את שתי נקודות החיתוך שלהם.  
 ב. מצא את שטחו של המרובע שקודקודיו הם מרכזי שני המעגלים הנ"ל ושתי נקודות החיתוך הנ"ל. (שים לב איזה מרובע התקבל)
29. משוואת אחת מצלעות ריבוע היא  $y = -2x - 5$  ומשוואת אחד האלכסונים היא  $y = 3x - 10$ .  
 האלכסונים נפגשים בנקודה  $(3,-1)$ .  
 א. מצא את קודקודי הריבוע.  
 ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את הריבוע.  
 ג. מצא את משוואת המעגל החסום בריבוע.
30. מצא את רדיוסו של מעגל שמרכזו בנקודה  $(1,2)$  והוא חותך מהישר  $y = x + 3$  מיתר שאורכו  $\sqrt{8}$ .
31. קודקודי משולש הם  $A(3,2)$ ,  $B(-5,8)$ ,  $C(-5,2)$ .  
 א. מצא את מרכז המעגל החסום במשולש.  
 ב. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש.
32. קודקודי משולש הם  $A(6,-3)$ ,  $B(-4,-3)$ ,  $C(1,9)$ .  
 א. מצא את מרכז המעגל החסום במשולש.  
 ב. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש.

בתרגילים 33 – 36 מצא לאילו ערכי  $m$  יש למעגלים ולישרים הבאים:  
 א. שתי נקודות חיתוך. ב. נקודה משותפת אחת (השקה). ג. אף נקודה משותפת.

$$y = mx, (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad 33$$

$$4x + 3y = m, x^2 + y^2 = 1 \quad 34$$

$$y = x + 2, x^2 + y^2 = m^2 + m \quad 35$$

$$y = x + 2m, x^2 + y^2 - 2my + m^2 = 4m - 8 \quad 36$$

בתרגילים 37 – 40 מצא לאילו ערכי  $m$  המשוואות הבאות מייצגות:  
 א. מעגל. ב. נקודה בודדת. ג. הקבוצה הריקה.

$$x^2 + y^2 - 2my + 1 = 0 \quad 37$$

$$x^2 + y^2 - 4mx = 8m \quad 38$$

$$x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 6y = -2m^2 - 2 \quad 39$$

$$x^2 + y^2 - 2mx + 4(m-2)y = -2m \quad 40$$

**תשובות:** 1.  $x^2 + y^2 = 15$  2.  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$  3.  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$  4.  $x^2 + y^2 = 10$

5.  $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$  6.  $(x+2)^2 + y^2 = 50$  7.  $(1,4), 5$  8.  $(-2,3), 4$  9.  $(0,-4), 6$

10.  $(6,-1), \sqrt{30}$  11.  $(0,4), (0,-4), (-2,0), (8,0)$  12.  $(2,0), 4, 0$  13.  $(2), (1), (2), (3), (3)$

14.  $(1,4), \sqrt{29}, -1$  15.  $(0,-1), 2, 0$  16.  $(-2,0), \sqrt{7}, 1$  17.  $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), \frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{1}{3}$

18.  $(2,-6)$  או  $(-2,6)$  19.  $(x-8)^2 + y^2 = 13$  או  $(x-4)^2 + y^2 = 13$  20.  $x^2 + (y-6)^2 = 10$

21.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$  22.  $(x-2)^2 + y^2 = 18$  23.  $(x-2)^2 + y^2 = 12.25$  24.  $x^2 + (y+1.5)^2 = 40$

25.  $x^2 + y^2 = 50$  או  $(x-6)^2 + (y-12)^2 = 50$  26.  $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$  או  $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$

27.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$  או  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$  28.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

29.  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$  או  $(2,6), (-2,4)$  30.  $y = -3x + 11, y = 2x - 4$  31.  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

32.  $(-3,-3), (1,-5)$  או  $(-3,1), (5,5), (9,-3), (1,-7)$  33.  $(2,4), (4,2)$  34.  $(-3,4)$  או  $(-3,1), (5,5), (9,-3), (1,-7)$

35.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$  או  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$  36.  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$

37.  $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4$  או  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$  38.  $m < -0.75$  או  $m > -0.75$

39.  $-5 < m < 5$  או  $m = \pm 5$  40.  $m < -5$  או  $5 < m$  41.  $m < -2$  או  $m > 1$  42.  $-2 < m < 1$

43.  $m \neq 4$  44.  $m < -1$  או  $m > 1$  45.  $-1 < m < 1$  46.  $m > 0$  או  $m < -2$

47.  $m > 0$  או  $m < -2$  48.  $-2 < m < 0$  49.  $-2 < m < 4$  או  $m > 4$  50.  $-2, 4$

51.  $m < 1.6$  או  $m > 2$  52.  $1.6 < m < 2$



## ב. משיקים למעגל

1. הוכח: הישר  $3y + x = 10$  משיק למעגל  $x^2 + y^2 = 10$  ומצא את נקודת ההשקה. הדרכה: לישר המשיק למעגל יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם המעגל.

2. נתון המעגל  $x^2 + y^2 = 13$  והנקודה  $A(2,3)$  שעליו.

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך מרכז המעגל והנקודה  $A$ .

ב. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ . הדרכה: העזר במשפט: ישר המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.

3. מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$  בנקודה  $(2,2)$ .

4. מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 50$  אם המשיק:

א. מקביל לישר  $y + x = 3$ .

ב. מאונך לישר  $7x + y = 2$ .

5. הישר  $y = -\frac{1}{2}x + 6$  משיק למעגל שמרכזו על ציר ה- $x$  בנקודה  $(4,4)$ . מצא את משוואת המעגל.

6. מצא את אורך המשיק היוצא מהנקודה  $(-1,2)$  למעגל  $x^2 - 22x + y^2 - 14y = -145$ . הדרכה: ניתן למצוא את המרחק גם מבלי למצוא את נקודת ההשקה.

7. א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$  עם ציר ה- $y$ .

ב. מצא את משוואות המשיקים למעגל בנקודות הנ"ל.

8. הוכח: משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = R^2$  בנקודה  $(x_1, y_1)$  שעליו היא  $xx_1 + yy_1 = R^2$  (היעזר בשלבים של תרגיל 2).

בתרגילים 9 – 11 מצא את משוואת המעגל:

9. המשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $(4,0)$  והעובר בנקודה  $(7,1)$ .

10. המשיק לציר ה- $y$  והעובר בנקודות  $(1,-4)$  ו- $(1,6)$ .

11. המשיק לישר  $y = 3$ , רדיוסו 5 והעובר בנקודה  $(7,-6)$ .

12. מצא את משוואת הישרים העוברים דרך הנקודה  $(-1,3)$  והמשיקים למעגל  $x^2 + y^2 = 5$ .

13. מצא את משוואות המשיקים למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  היוצאים מהנקודה  $(5,10)$ .

**תשובות:** 1.  $(1,3)$  2. א.  $2y - 3x = 0$  ב.  $3y + 2x = 13$  3.  $4x - 3y = 2$

4. א.  $y = -x + 10$  או  $y = -x - 10$  ב.  $7y - x = 50$  או  $7y - x = -50$

5.  $(x-2)^2 + y^2 = 20$  6. 12 7. א.  $(0,0)$ ,  $(0,2b)$  ב.  $yb = ax + 2b^2$ ,  $yb = -ax$

9.  $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$  10.  $(x-13)^2 + (y-1)^2 = 169$

11.  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$  או  $(x-10)^2 + (y+2)^2 = 25$

12.  $x=5$ ,  $4y-3x=25$  13.  $y=2x+5$ ,  $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

# XIII. חשבון דיפרנציאלי

## 48. מבוא

הבעיה שעמדה בפני המתמטיקאים הייתה מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה הנתונה. מה בעצם הנוסחה אומרת?

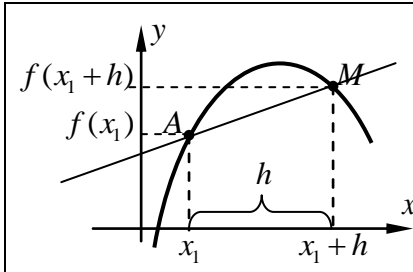
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ : למדנו בהנדסה אנליטית כי שיפוע בין שתי נקודות נתון ע"י הנוסחה:}$$

מה הבעיה עם שיפוע המשיק לגרף הפונקציה?

יש לנו רק נקודה אחת שהיא נקודת ההשקה (אותה נסמן):  $(A(x_1, y_1))$ .

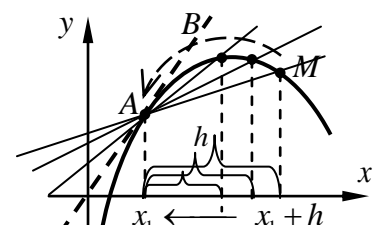
1. ניקח נקודה נוספת קרובה מאוד לנקודה שלנו (אותה נסמן):  $(x_2 = x_1 + h, M(x_2, y_2))$

מתקבל ישר  $AM$  שהוא חותך לגרף הפונקציה

	<p style="text-align: center;"><b>חותך לגרף הפונקציה</b> <math>y = f(x)</math> הוא קו ישר העובר דרך שתי נקודות <math>M(x_1 + h, f(x_1 + h)), A(x_1, f(x_1))</math> שעל גרף הפונקציה.</p> <p style="text-align: right;">שיפוע החותך <math>AM</math>:</p> $m_{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1} = \boxed{\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$
---	--

2. איך נוודא שהנקודה היא מאוד קרובה לנקודה שלנו?

את זה אנו מבטאים ע"י כך ש- $h$  הוא גודל ששואף לאפס, כלומר ערך מוחלט שלו יכול להיות קטן ממספר חיובי כלשהו.

 <p style="text-align: center;"> <math>(h \rightarrow 0)</math>  <math>(M \rightarrow A)</math>  <math>(AM \rightarrow AB)</math>  <math>(m_{AM} \rightarrow m = m_{AB})</math> </p>	<p style="text-align: center;"><b>משיק לגרף בפונקציה</b> <math>y = f(x)</math> בנקודה <math>A(x_1, y_1)</math> הוא קו ישר גבולי יחיד <math>AB</math> (אם הוא קיים) של החותכים <math>AM</math>, כאשר הנקודה <math>M</math> מתקרבת לנקודה <math>A</math> ללא הגבלה (<math>h</math> שואף ל-0).</p> <p style="text-align: center;">כאשר <math>h</math> שואף ל-0, שיפוע החותך <math>m_{AM}</math> שואף לשיפוע המשיק <math>m</math>.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center;">אומרים: <math>m</math> הוא גבול של <math>m_{AM}</math> בנקודה <math>h = 0</math></p> <p style="text-align: center;"><b>סימון:</b> <math>\lim_{h \rightarrow 0} m_{AM} = m</math></p> </div>
--	--

3. הגדרות

**ערך הנגזרת** של פונקציה  $y = f(x)$  בנקודה  $x = x_1$  הוא **שיפוע המשיק** לגרף הפונקציה  $y = f(x)$  בנקודה זו.

$$f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \text{סימון: } f'(x_1) \text{ או } y'_{(x=x_1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

נגזרת הפונקציה  $y = f(x)$  היא פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' \text{ סימון נוסף של נגזרת הפונקציה:}$$

$\boxed{\text{שיפוע הפונקציה}} = \boxed{\text{שיפוע המשיק}} = \boxed{\text{ערך הנגזרת}}$

## 49. חישוב גבולות

### א. חישוב גבול הפונקציה בנקודה

דוגמה 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2.5} \frac{5x - 2x^2}{x^2 + x - 4} = \frac{0}{4.75} = \boxed{0}$$

דוגמה 2.

$$\lim_{x \rightarrow -1.5} \frac{5x - 2x^2}{4x^3 - 7x + 3} = \frac{-12}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1.5^-} \frac{5x - 2x^2}{4x^3 - 7x + 3} = \frac{-12}{0^-} = \boxed{+\infty} \qquad \lim_{x \rightarrow -1.5^+} \frac{5x - 2x^2}{4x^3 - 7x + 3} = \frac{-12}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

- |  |    |   |    |
|--|----|---|----|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$                 | .2 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$            | .1 |
| $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2}{(x+2)}$           | .4 | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$        | .3 |
| $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)^2}{x+1}$          | .6 | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x-3}$      | .5 |
| $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{-x^2 + 3x - 2}$ | .8 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x - 1}{x-2}$ | .7 |

דוגמה 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 3x - 9} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

עבור  $x = 3$  המונה והמכנה מתאפסים, לכן לפי משפט בזו גם המונה וגם המכנה מתחלקים ב- $(x-3)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 3x - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{2\cancel{(x-3)}(x+1.5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2(x+1.5)} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

פירוק הפרש הריבועים לגורמים:  $x^2 - 9 = \underbrace{x^2 - 3^2}_{a^2 - b^2} = \underbrace{(x-3)(x+3)}_{(a-b)(a+b)}$

פירוק הטרינום לגורמים:  $2x^2 - 3x - 9 = \underbrace{2(x-3)(x+1.5)}_{a(x-x_1)(x-x_2)}$

$2x^2 - 3x - 9 = 0 \quad (a=2, b=-3, c=-9)$

$x_1 = 3, x_2 = -1.5$

- |  |     |  |     |
|--|-----|--|-----|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$   | .10 | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x}$          | .9  |
| $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 25}$      | .12 | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$         | .11 |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x}$ | .14 | $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$ | .13 |
| $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x-2}$ | .16 | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}$    | .15 |

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{x^2-25} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x-3} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} \quad .21$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3+x-2} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4} \quad .23$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-3x^2+5x-3} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{3x^3+16x^2+3x-10} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{5x-2x^2} \quad .4 \text{ דוגמה}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{x+9}}{5x-2x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \Rightarrow (x-0) \text{ מתחלקים ב-} (x-0) \text{ לפי משפט בזו המונה והמכנה}$$

כדי להיפטר מהשורש במונה, כופלים את המונה ואת המכנה בביטוי ה**צמוד** למונה:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3-\sqrt{x+9}}^{a-b}}{\overbrace{5x-2x^2}^{(a-b)(a+b)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}^{(a-b)(a+b)}}{\overbrace{(5x-2x^2)(3+\sqrt{x+9})}^{(a-b)(a+b)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3^2-(\sqrt{x+9})^2}^{a^2-b^2}}{\overbrace{(5x-2x^2)(3+\sqrt{x+9})}^{(a-b)(a+b)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-(x+9)}{\overbrace{(5x-2x^2)(3+\sqrt{x+9})}^{(a-b)(a+b)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{9} - x - \cancel{9}}{\overbrace{(5x-2x^2)(3+\sqrt{x+9})}^{(a-b)(a+b)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(5-2x)(3+\sqrt{x+9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{5 \cdot 6} = \boxed{-\frac{1}{30}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \quad .31$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad .34$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad .33$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1} \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1} \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-x}}{x-1} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3^{1+(1+x)}}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{2^{1+(1+x^2)}}{(1-x)(1+x)} \right) = \text{דוגמה 5.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+3x-2-2x-2x^2}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2+x+1}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(x+0.5)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)(x+0.5)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) .40$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) .39$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-x} \right) .42$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right) .41$$

### ב. חישוב גבול הפונקציה כאשר $x$ שואף לאינסוף

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3} = \frac{5}{-\infty} = \boxed{0} \text{ הערה.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} = \frac{5}{\infty} = \boxed{0} \text{ דוגמה 1.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} .43$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{5x^3} .46$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3x^3} .45$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left( 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = \infty \cdot (2 - 0 + 0 - 0) = \boxed{\infty} \text{ דוגמה 2.}$$

(הוצאת החזקה הגבוה ביותר מחוץ לסוגריים)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left( 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = -\infty \cdot (2 - 0 + 0 - 0) = \boxed{-\infty} \text{ הערה.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 4x^3 + 2x}{7x^4 + 3x^2 + 12} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \cdot \left( 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)}{x^4 \cdot \left( 7 + \frac{3}{x^2} + \frac{12}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (6 - 0 + 0)}{(7 + 0 + 0)} = \infty \cdot \frac{6}{7} = \boxed{\infty} \text{ דוגמה 3.}$$

(הוצאת במונה ובמכנה החזקה הגבוה ביותר מחוץ לסוגריים)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 4x^3 + 2x}{7x^4 + 3x^2 + 12} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{6x^{\cancel{5}}}{7x^{\cancel{4}}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{7} = \boxed{\infty} \text{ דרך שנייה. (לפי החזקות הדומיננטיות)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^5 - 4x^3 + 2x}{7x^4 + 3x^2 + 12} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{6x^{\cancel{5}}}{7x^{\cancel{4}}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{7} = \boxed{-\infty} \text{ הערה.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^4 - 4x^2 + 9}{12x^4 - 4x^3 + 9x}} = \sqrt{\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^4}{12x^4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}} \text{ דוגמה 4. (לפי החזקות הדומיננטיות)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1} .48$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2}{5x^4 + x^3} .47$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x} .50$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} .49$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x}{1 + x^4} .52$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6} .51$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 2x}{x^2 + 1} .54$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^4 - x^7}{x^2 + x^5} .53$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2} .56$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x}{x^3 + 1} .55$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}} .58$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x}}{1 - x} .57$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 4}{x + 3} - \frac{4x^3 - 2x}{2x^2 - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{2x^2}{x} \right] - \left[ \frac{4x^3}{2x^2} \right] \right) = [\infty - \infty] = \text{דוגמה 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 4}{x + 3} - \frac{4x^3 - 2x}{2x^2 - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 4) \cdot (2x^2 - 5) - (4x^3 - 2x) \cdot (x + 3)}{(x + 3)(2x^2 - 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 10x^2 - 8x^2 + 20 - 4x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 6x}{(x + 3)(2x^2 - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12x^3 + 4x^2 + 6x + 20}{2x^3 - 5x + 6x^2 - 15} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-12x^3}{2x^3} \right] = \boxed{-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3}{x^2 + 3} - 2x \right) .60$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x - 2} - x \right) .59$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{x - 1} \right) .62$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 2} - \frac{x^2}{x + 3} \right) .61$$

**תשובות :** 1.  $\infty$  (משני הצדדים) 2.  $\infty$  מימין,  $-\infty$  משמאל 3.  $\infty$  (משני הצדדים) 4.  $-\infty$  מימין,  $\infty$  משמאל 5.  $\infty$  מימין,  $-\infty$  משמאל 6.  $\infty$  מימין,  $-\infty$  משמאל 7.  $-\infty$  מימין,  $\infty$  משמאל 8.  $-\infty$  מימין,  $\infty$  משמאל

32.  $\frac{2}{3}$  22.  $\frac{1}{2}$  3.  $\frac{1}{2}$  21.  $-\frac{3}{2}$  27.  $\frac{1}{10}$  20.  $\frac{1}{10}$  19.  $\frac{1}{10}$  18.  $\frac{1}{10}$  17.  $\frac{1}{2}$  7.  $\frac{1}{2}$  16.  $\frac{1}{2}$  15.  $\frac{1}{2}$  14.  $\frac{1}{2}$  13.  $\frac{1}{10}$  11.  $\frac{1}{10}$  10.  $\frac{1}{10}$  9.  $-\frac{1}{10}$  8.  $\frac{8}{17}$  35.  $\frac{3}{4}$  34.  $\frac{1}{6}$  33.  $\frac{3}{8}$  32.  $\frac{2}{3}$  31.  $-\frac{1}{12}$  30.  $\frac{1}{4}$  29.  $\frac{1}{4}$  28.  $\frac{1}{2}$  27.  $\frac{1}{2}$  26.  $\frac{1}{68}$  25.  $\frac{1}{2}$  24.  $\frac{8}{17}$  23.  $\frac{1}{2}$  49. 0.48 0.47 0.46 0.45 0.44 0.43 -1.42  $\frac{1}{5}$  41.  $\frac{1}{4}$  40.  $\frac{1}{2}$  39.  $\frac{5}{6}$  38.  $-\frac{2}{3}$  37.  $\frac{1}{3}$  36.  $\frac{1}{2}$  62. 3.61 0.60 2.59 1.58 -1.57 -2.56  $-\infty$  55.  $\infty$  54.  $-\infty$  53.  $\infty$  52.  $-\frac{1}{3}$  51.  $\frac{2}{5}$  50.

## 50. נגזרת הפונקציה

### א. נגזרת הפונקציה עפ"י ההגדרה

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{נוסחה:}$$

**דוגמה 1.** נתונה הפונקציה:  $y = x^3$

$f(x) = x^3$  נסמן:  $y = f(x)$ , אז:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = \boxed{3x^2} \end{aligned}$$

תשובה:  $(x^3)' = 3x^2$

**דוגמה 2.** נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

$$g(x+h) = \frac{1}{x+h-2}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}\right)(x+h-2)(x-2)}{h(x+h-2)(x-2)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x-2) - (x+h-2)}{h(x+h-2)(x-2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{2} - \cancel{x} - h + \cancel{2}}{h(x+h-2)(x-2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x+h-2)(x-2)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x+0-2)(x-2)} = \boxed{\frac{-1}{(x-2)^2}} \quad \left(\frac{1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2} \quad \text{תשובה:}$$

$y = x^3 + x$  .5       $y = 2x^2 - 5x + 2$  .4       $y = 3x^2$  .3       $y = x^2 + x$  .2       $y = x^4$  .1

$f(x) = \frac{1}{x+1}$  .10       $f(x) = \frac{1}{x^2}$  .9       $y = \frac{1}{x}$  .8       $y = 5$  .7       $y = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$  .6

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  .15       $y = \sqrt{2x-3}$  .14       $f(x) = \sqrt{x+1}$  .13       $y = \sqrt{x}$  .12       $f(x) = \frac{x}{x+1}$  .11

$y = x^n$  .17       $y = x\sqrt{x}$  .16

**תשובות:**

$f'(x) = 3x^2 + 1$  .5       $y' = 4x - 5$  .4       $y' = 6x$  .3       $y' = 2x + 1$  .2       $y' = 4x^3$  .1

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$  .10       $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$  .9       $y' = -\frac{1}{x^2}$  .8       $y' = 0$  .7       $y' = 6x^2 - 6x - 5$  .6

$y' = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$  .14       $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$  .13       $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  .12       $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  .11

$y' = nx^{n-1}$  .17       $y' = 1.5\sqrt{x}$  .16       $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  .15

## ב. נגזרת הפונקציה (נוסחאות)

### 1. נגזרות של פונקציית הפולינום

$(k)' = 0$	נגזרת המספר
$(x^n)' = n x^{n-1}$	נגזרת של פונקציית חזקה $y = x^n$
$\left(\frac{x^n}{p}\right)' = \frac{(x^n)'}{p}$ $(k \cdot x^n)' = k \cdot (x^n)'$	נגזרת החזקה המוכפלת במספר
$(x^n \pm x^m)' = (x^n)' \pm (x^m)'$	נגזרת של סכום (הפרש) חזקות

**הנוסחאות :**

**גזור את הפונקציות הבאות :**

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad y = 3x^2 & 2. \quad y = -5x^4 & 3. \quad y = 6x^3 + 5x \\
 4. \quad y = 5x^2 - 2x & 5. \quad y = -2x^7 - x^5 + x & 6. \quad y = -\frac{1}{4}x^6 + x^3 + 7 \\
 7. \quad y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} & 8. \quad y = (2x-3)^2 & 9. \quad y = (x+1)(x^2-x+1) \\
 10. \quad y = x^2(x-1)^2 & 11. \quad y = (x+1)^3 & 12. \quad y = (x^2+x-1)^2 \\
 13. \quad y = \frac{x^4 - 3x^3 + 8x}{3x} & 14. \quad y = \frac{x^2 - x - 2}{x-2} &
 \end{array}$$

**חשב את הנגזרת של הפונקציות הבאות בנקודות  $x = -2$  ,  $x = 3$  :**

$$\begin{array}{lll}
 15. \quad y = x^2 - 3x & 16. \quad y = -3x + 2 & 17. \quad y = x^4 - 4x^3 \\
 18. \quad y = -\frac{1}{5}x^5 + 9x^2 & 19. \quad y = -x^6 + \frac{2}{7}x^7 & 20. \quad y = (x^2 - 4)^2
 \end{array}$$

**מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה (או הנקודות) בהן שווה הנגזרת של הפונקציה לערך הרשום לידן :**

$$\begin{array}{ll}
 21. \quad y = 4x^2 - 5x, \quad y' = 1 & 22. \quad y = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad y' = -\frac{3}{2} \\
 23. \quad y = x^3 - x^2 - 4x, \quad y' = -3 & 24. \quad y = x^3 + 5x, \quad y' = 5 \\
 25. \quad y = x^5 - 3x, \quad y' = 2 & 26. \quad y = x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2}, \quad y' = 0 \\
 27. \quad \text{הפונקציה } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (} a \neq 0 \text{) מקיימת: } f'(1) = f(1) \text{ וכן } f'(-1) = f(-1).
 \end{array}$$

מצא את ערכו של  $x$  עבורו  $f'(x) = 0$



דוגמה. מצא את הזווית שיוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  המשיק לגרף הפונקציה  $y = 2x^3 - 3x + 5$  בנקודה שבה  $x = -2$ .

נגזרת הפונקציה:  $y' = (2x^3 - 3x + 5)' = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 - 0 = 6x^2 - 3$  (גזירה)

שיפוע המשיק (ערך הנגזרת):  $m = y'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 3 = 21$  (הצבה  $x = -2$  בנגזרת  $y' = 6x^2 - 3$ )

זווית המבוקשת:  $m = \tan \alpha = 21$  (טנגנס הזווית שיוצר המשיק עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  שווה לשיפועו)

$(\text{SHIFT}, \tan, 21) \alpha = 87.27^\circ$

תשובה:  $87.27^\circ$

28. מצא את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה  $y = x^2 - 5x + 2$  בנקודות:

- א.  $(3, -4)$       ב.  $(4, -2)$       ג.  $y = 8$  (על הגרף)

29. מצא את הזווית שיוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  המשיקים לגרף הפונקציה  $y = 0.5x^2 - x$  בנקודות:

- א.  $(2, 0)$       ב.  $(0, 0)$       ג.  $(1, -0.5)$       ד.  $(3, 1.5)$

30. מצא את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים לגרף הפונקציה  $y = -x^2 + 3x - 2$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  בנקודות שבהן הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ .

31. מצא על גרף הפונקציה  $y = 2x^2 - 5x$  נקודה שהמשיק דרכה לגרף הפונקציה, הוא בעל שיפוע:

א. 3      ב. -1      ג. -5

32. נתונה הפונקציה  $y = x^3 - 2x^2 + 5$ . מצא את שעורי ה- $x$  של הנקודות שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

33. גרף הפונקציה  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$  חותך את ציר ה- $x$  ב-3 נקודות. מצא את שיפועי המשיקים בנקודות הנ"ל. מה ניתן לומר על המשיקים בשתי נקודות החיתוך הקיצוניות.

34. מצא על הפרבולה  $y = x^2 - 3x + 5$  את הנקודות שהמשיק דרכן לגרף הפרבולה יוצר זווית של  $45^\circ$  עם ציר ה- $x$ .

35. מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה  $y = x^3 - 4x$  שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה מקביל לישר  $y = -x + 5$ .

36. מצא נקודה על הפרבולה  $y = x^2 - 3x$ , שהמשיק דרכה לגרף הפרבולה מאונך למשיק אחר לגרף הפרבולה העובר דרך הנקודה  $(1, -2)$ .

תשובות: 1.  $6x$     2.  $-20x^3$     3.  $18x^2 + 5$     4.  $10x - 2$     5.  $-14x^6 - 5x^4 + 1$

6.  $-1.5x^5 + 3x^2$     7.  $x^2 + x$     8.  $8x - 12$     9.  $3x^2$     10.  $4x^3 - 6x^2 + 2x$     11.  $3(x+1)^2$

12.  $4x^3 + 6x^2 - 2x - 2$     13.  $x^2 - 2x$     14. 1    15.  $-7, 3$     16.  $-3, -3$     17.  $-80, 0$

18.  $-52, -27$     19.  $320, 0$     20.  $0, 60$     21.  $\frac{3}{4}$     22.  $\frac{1}{2}$     23.  $-\frac{1}{3}, 1$     24. 0    25.  $\pm 1$

26.  $-0.25, 0, 1$     27. -1    28. א. 1    ב. 3    ג.  $-7, 7$     29. א.  $45^\circ$     ב.  $135^\circ$     ג.  $0^\circ$     ד.  $63.43^\circ$

30.  $135^\circ, 45^\circ$     31. א.  $(2, -2)$     ב.  $(1, -3)$     ג.  $(0, 0)$     32.  $\frac{1}{3}, 1$     33.  $2, -1, 2$     הם מקבילים.

34.  $(1, 3), (2, 3)$     35.  $(-1, 3), (1, -3)$     36.  $(2, -2)$

## 2. הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות

$$\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)} \quad \text{הנוסחה :}$$

גזור את הפונקציות הבאות בעזרת הנוסחה ובדוק את תשובותיך ע"י פתיחת סוגריים וגזירת פולינום רגילה.

$$y = 3x(x+1) \quad .1 \quad y = x^2(x-1) \quad .2$$

$$y = (x+1)(x-1) \quad .3 \quad y = 2x^4(x^2-2x) \quad .4$$

$$y = (x^3+1)(x^2-x) \quad .5 \quad y = (2x^5+1)(x^2-3x-1) \quad .6$$

תשובות : 1.  $6x+3$  2.  $3x^2-2x$  3.  $2x$  4.  $12x^5-20x^4$  5.  $5x^4-4x^3+2x-1$

6.  $14x^6-36x^5-10x^4+2x-3$

## 3. הנגזרת של מנת שתי פונקציות

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}} \quad \text{הנוסחה :}$$

$$\left(\frac{3-2x-x^2}{x^4-1}\right)' = \frac{(3-2x-x^2)'(x^4-1) - (3-2x-x^2)(x^4-1)'}{(x^4-1)^2} = \frac{(-2-2x)(x^4-1) - (3-2x-x^2)4x^3}{(x^4-1)^2} \quad \text{דוגמה..}$$

גזור את הפונקציות הבאות בעזרת נוסחת המנה

$$y = \frac{x+2}{3-x} \quad .1 \quad y = \frac{x^2}{x+3} \quad .2 \quad y = \frac{1}{2x-1} \quad .3$$

$$y = \frac{x}{-x^2+5} \quad .4 \quad y = \frac{x^2-2}{x+1} \quad .5 \quad y = \frac{x^2-3}{x^2+2} \quad .6$$

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \quad .7 \quad y = \frac{x^3+x-1}{x+2} \quad .8 \quad y = \frac{x^2+5x+3}{2x^2-3x+1} \quad .9$$

$$y = \frac{1}{(x-1)^3} \quad .10 \quad y = \frac{x^8-7x^5+1}{x^8-7x^5} \quad .11 \quad y = \frac{3x^6-6x^5}{x^9-2x^8} \quad .12$$

גזור את הפונקציות הבאות באחת משתי הדרכים הבאות :

א. נוסחת נגזרת המנה. ב. גזירה בעזרת מעבר למעריך שלילי ושימוש בנוסחת נגזרת פולינום.

$$y = \frac{2}{x} \quad .13 \quad y = \frac{3}{x^2} \quad .14 \quad y = -\frac{1}{x^5} \quad .15$$

$$y = 2x^4 - \frac{2}{x^4} \quad .16 \quad y = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \quad .17 \quad y = \frac{x^6-2x^3}{x^6} \quad .18$$

$$y = \frac{-4+x^3}{x^5} \quad .19 \quad y = \frac{5x^4-3x^2-x}{x^2} \quad .20 \quad y = \frac{5x^6-4x^3+x^2+1}{6x^3} \quad .21$$

בתרגילים 22 – 25 פתור את המשוואה  $f'(x) = 0$  עבור כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad .22 \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \quad .23 \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \quad .24 \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2+x} \quad .25$$

$$.26 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{11x^7 - 8x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{6x^5 - 9x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 4x + 2} \text{ . חשב את } f'(0)$$

**מציאת שיפוע המשיק (ערך הנגזרת).**

.27 א. הוכח כי הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $y = \frac{1}{x}$  בנקודה  $(1,1)$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  הוא  $135^\circ$ .

ב. האם קיים משיק לגרף הפונקציה הנ"ל בנקודה כלשהיא היוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  ? נמק.

.28 מצא את הנקודות על גרף הפונקציה  $y = \frac{x-7}{x+2}$  שהמשיקים דרכן לגרף הפונקציה יוצרים זווית של  $45^\circ$  עם

הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

.29 מצא את הנקודות על גרף הפונקציה  $y = \frac{x+5}{x+1}$  שהמשיקים דרכן לגרף הפונקציה מאונכים לישר  $y - 4x + 3 = 0$ .

$$.30 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{2x^2+1}{x-2}$$

א. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, -3)$ .

ב. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצרים זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

.31 נתונה הפונקציה:  $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$  . מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצרים

זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

$$\text{השובות: } .1 \frac{5}{(3-x)^2} \quad .2 \frac{x^2+6x}{(x+3)^2} \quad .3 -\frac{2}{(2x-1)^2} \quad .4 \frac{x^2+5}{(5-x^2)^2} \quad .5 \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} \quad .6 \frac{10x}{(x^2+2)^2}$$

$$.7 \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \quad .8 \frac{2x^3+6x^2+3}{(x+2)^2} \quad .9 \frac{-13x^2-10x+14}{(2x^2-3x+1)^2} \quad .10 \frac{-3}{(x-1)^4} \quad .11 \frac{-8x^3+35}{(x^6-7x^3)^2} \quad .12 \frac{-9}{x^4}$$

$$.13 \frac{-2}{x^2} \quad .14 \frac{-6}{x^3} \quad .15 \frac{5}{x^6} \quad .16 \frac{8}{x^5} \quad .17 -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^4} \quad .18 \frac{6}{x^4} \quad .19 \frac{20}{x^6} - \frac{2}{x^3} \quad .20 10x + \frac{1}{x^2}$$

$$.21 \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{2x^4} \quad .22 0 \quad .23 \text{ אין פתרון} \quad .24 \pm\sqrt{3}, 0 \quad .25 -2 \quad .26 -2\frac{1}{2}$$

.27 ב. לא. לכל  $x$  הנגזרת שלילית ולכן לכל  $x$  הזווית קהה. .28  $(1, -2), (-5, 4)$  .29  $(-5, 0), (3, 2)$

.30 א. -7. ב.  $(-1, -1), (5, 17)$  .31  $(1, 1), (-1, -1)$

**4. הנגזרת של פונקציה מורכבת**

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)} \quad \text{הנוסחה:}$$

גזור את הפונקציות הבאות:

$(9-4x^2)^5)' = 5(9-4x^2)^4 \cdot (9-4x^2)' = 5(9-4x^2)^4 \cdot (-8x) = \boxed{-40x(9-4x^2)^4}$	<b>דוגמה 1.</b>
$\boxed{(t^5)' = 5t^4 \cdot t'}$	
$(3x^2-10x+3)^8)' = 8(3x^2-10x+3)^7 \cdot (3x^2-10x+3)' = 8(3x^2-10x+3)^7 \cdot (6x-10) = \boxed{16(3x-5)(3x^2-10x+3)^7}$	<b>דוגמה 2.</b>
$\boxed{(t^8)' = 8t^7 \cdot t'}$	

- |                                   |   |   |
|-----------------------------------|---|---|
| $y = (5-x^4)^8$ .3                | $y = (2x^3-1)^5$ .2                     | $y = (x^2-2)^2$ .1                      |
| $y = (x^2-4x+4)^6$ .6             | $y = (x^2-x+1)^9$ .5                    | $y = (x^5-2x^6)^7$ .4                   |
| $y = \frac{(x-2)^4}{(3-x)^3}$ .9  | $y = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^4$ .8 | $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ .7 |
| $y = (3x-9)^9(x+2)^6$ .12         | $y = (x+2)^3(4-x)^5$ .11                | $y = (ax^m+b)^n$ .10                    |
| $y = (x+2)^6(x^2-4)^9(x-2)^6$ .15 | $y = x^{10}(x-1)^{10}(x+1)^{10}$ .14    | $y = (x^4-3x^3)^4(x-3)^8$ .13           |

בתרגילים 16 – 20 חשב את ערך הנגזרת של הפונקציות הבאות בנקודה  $x = -1$ :

$y = x^9(x+6)^7(x+1)^8$  .18       $y = (x^4+1)^{-2}$  .17       $y = (x^3+2)^5$  .16

$y = \left(\left((x+1)^7+x\right)^9+2\right)^8$  .20       $y = \left((x^2-2)^5-2x^3\right)^5$  .19

21. הפונקציה  $f(x) = (x^n - 2x)^n$  מקיימת  $f'(1) = 15$ . מצא את  $n$ .

22. מצא את ערכי  $x$  עבורם נגזרת הפונקציה  $y = (x^2+11)^4(x-8)^6$  שווה לאפס.

**מציאת שיפוע המשיק (ערך הנגזרת).**

23. מצא נקודה על גרף הפונקציה  $y = (2x-5)^4$  שהמשיק דרכה לגרף הפונקציה, מקביל למשיק לגרף הפונקציה  $y = x^3 - x^2 + 1$  העובר דרך הנקודה  $(2,5)$ .

24. מצא את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $y = \sqrt{2x+1}$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , כאשר נקודת

ההשקה היא עבור: א.  $x = 0$     ב.  $x = 1$     ג.  $x = -\frac{1}{3}$     ד.  $x = -\frac{1}{2}$

25. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ , כאשר נקודת ההשקה היא:

א.  $x = 0$     ב.  $x = 3$     ג.  $x = \sqrt{2}$     ד.  $x = 1$

26. א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה  $y = \sqrt{x^2-6}$ , שהמשיק דרכן לגרף יוצר זווית של  $60^\circ$  עם ציר ה- $x$ .

ב. האם יש נקודה על גרף הפונקציה הנ"ל, שהמשיק דרכה לגרף יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ ? הוכח את תשובתך.

תשובות:

- $-32x^3(5-x^4)^7$  .3       $30x^2(2x^3-1)^4$  .2       $4x(x^2-2)$  .1  
 $12(x-2)^{11}$  .6       $9(x^2-x+1)^8(2x-1)$  .5       $7(x^5-2x^6)^6(5x^4-12x^5)$  .4  
 $\frac{(6-x)(x-2)^3}{(3-x)^4}$  .9       $\frac{4(x^2-1)(x^2+1)^3}{x^5}$  .8       $-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$  .7  
 $45x(3x-9)^8(x+2)^5$  .12       $(2-8x)(x+2)^2(4-x)^4$  .11       $amnx^{m-1}(ax^m+b)^{n-1}$  .10  
 $30x(x^2-4)^{14}$  .15       $10(x^3-x)^9(3x^2-1)$  .14       $12(x^2-3x)^{11}(2x-3)$  .13  
0 .18      1 .17      15 .16  
-3,5 .21      72 .20      -80 .19  
 $90^\circ$  .7       $60^\circ$  .ג       $30^\circ$  .ב       $45^\circ$  .א       $24$  .22  
(3,1) .23       $\frac{11}{7}, 3,8$  .22  
 $(3, \sqrt{3}), (-3, \sqrt{3})$  .א      26 .25      0 .ב      0,5 .ג       $\frac{2}{3}\sqrt{2}$  .ד      לא מוגדר .7

**5. נגזרות של שורשים**

$$\left(\sqrt[m]{x^k}\right)' = \left(x^{\frac{k}{m}}\right)' = \frac{k}{m} x^{\frac{k}{m}-1}$$

הנוסחה: (עבור  $k$  שלם,  $m$  טבעי ושוונה מ-1)

גזור את הפונקציות הבאות:

1. תרגיל 1

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

2. תרגיל 2

$$(x\sqrt{x})' = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 1,5\sqrt{x}$$

דרך שנייה.

$$(x\sqrt{x})' = (x)' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$$

3. דוגמה 3

$$\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x^2+3x-4}{x^{2,5}}\right)' = \left(\frac{x^2}{x^{2,5}} + \frac{3x}{x^{2,5}} - \frac{4}{x^{2,5}}\right)' = \left(x^{-0,5} + 3x^{-1,5} - 4x^{-2,5}\right)' =$$

$$= -0,5x^{-1,5} - 4,5x^{-2,5} + 10x^{-3,5} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{9}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{10}{x^3\sqrt{x}}$$

4. דוגמה 4

$$\left(\sqrt[4]{5-x-4x^2}\right)' = \left((5-x-4x^2)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(5-x-4x^2)^{\frac{1}{4}-1} \cdot (5-x-4x^2)' =$$

$$\left(t^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}t^{\frac{1}{4}-1} \cdot t' = \frac{1}{4}(5-x-4x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-1-8x) = \frac{-1-8x}{4\sqrt[4]{(5-x-4x^2)^3}}$$

$$\begin{array}{lll}
y = x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} & .3 & y = \sqrt[3]{x} - 2x^{\frac{3}{2}} & .2 & y = 4\sqrt{x} & .1 \\
y = \frac{x^4 - x^2 + 2}{x\sqrt{x}} & .6 & y = \frac{x^2}{x \cdot \sqrt[3]{x}} + x^2\sqrt{x} & .5 & y = \sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{4}} + x^2 \cdot \sqrt[3]{x} & .4 \\
y = \sqrt{x^3 - 5x} & .9 & y = -\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} & .8 & y = x^n \sqrt{x} & .7 \\
y = \frac{3}{\sqrt[3]{(2x-4)^2}} & .12 & y = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 2}} & .11 & y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} & .10 \\
y = (2x+1)\sqrt{(x^2-2)(2x+1)} & .15 & & .18 & .14 & y = x^2\sqrt{1-x} & .13 \\
y = \sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}} & .18 & y = \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}} & .17 & y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} & .16 \\
y = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} & .21 & y = \frac{\sqrt{x}}{x-1} & .20 & y = \sqrt{\frac{x^2-1}{2-x}} & .19 \\
y = \sqrt{x+\sqrt{x}} & .24 & y = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}} & .23 & y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2-x} & .22 \\
y = \sqrt[3]{f(x)} & .27 & y = \sqrt{f(x)} & .26 & y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & .25
\end{array}$$

**השובו:**

$$\begin{array}{lll}
-\frac{1}{3\sqrt{x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} & .3 & \frac{1}{3\sqrt{x^2}} - 3\sqrt{x} & .2 & \frac{2}{\sqrt{x}} & .1 \\
\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 0.5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{5}{2}} & .6 & \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} & .5 & \frac{5}{4}\sqrt{x} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} & .4 \\
\frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x}} & .9 & \frac{n}{mx^m\sqrt{x^n}} & .8 & \frac{(2n+1)x^n}{2\sqrt{x}} & .7 \\
-\frac{4}{\sqrt[3]{(2x-4)^5}} & .12 & -\frac{3x}{\sqrt{(3x^2-2)^3}} & .11 & \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^3}} & .10 \\
(x-1)(5x+6)\sqrt{\frac{2x+1}{x^2-2}} & .15 & (4x^2-1)\sqrt{x^2-1} & .14 & \frac{4x-5x^2}{2\sqrt{1-x}} & .13 \\
\frac{3}{(1-3x)\sqrt{9x^2-1}} & .18 & \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} & .17 & \frac{x^2-1}{2\sqrt{x^5+x^3}} & .16 \\
\frac{x-4}{2\sqrt{x-1}^3} & .21 & -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} & .20 & \frac{-x^2+4x-1}{2\sqrt{(x^2-1)(2-x)^3}} & .19 \\
\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} & .24 & \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}} & .23 & \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}(2-x)^2} & .22 \\
\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}} & .27 & \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} & .26 & \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} & .25
\end{array}$$

**6. נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות**

$(\cos x)' = -\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	: הנוסחאות
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	

גזור את הפונקציות הבאות :

$\left(\frac{\sin x}{3}\right)' = \frac{(\sin x)'}{3} = \frac{\cos x}{3}$ <b>1. דוגמה</b>
---

$(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$ <b>2. דוגמה</b>
---

$(\tan^2 x)' = 2 \tan x \cdot (\tan x)' = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$ <b>3. דוגמה</b>
--

$\left(\frac{\cos x}{1-\sqrt{\sin x}}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot (1-\sqrt{\sin x}) - \cos \sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{\sin x})'}{(1-\sqrt{\sin x})^2} =$ $= \frac{-\sin x \cdot (1-\sqrt{\sin x}) + \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{\sin x})'}{(1-\sqrt{\sin x})^2} = \frac{-\sin x \cdot (1-\sqrt{\sin x}) + \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} (\sin x)'}{(1-\sqrt{\sin x})^2} =$ $= \frac{-\sin x (1-\sqrt{\sin x})^{\cancel{1/\sqrt{\sin x}}} + \frac{\cos \sqrt{x} \cdot \cos x}{\cancel{2\sqrt{\sin x}}}}{(1-\sqrt{\sin x})^2 \cdot \cancel{1/2\sqrt{\sin x}}} = \frac{-\sin x (\sqrt{\sin x} - \sin x) + \cos \sqrt{x} \cdot \cos x}{2(1-\sqrt{\sin x})^2 \sqrt{\sin x}}$ <b>4. דוגמה</b>
--

- |   |   |                                     |
|---|---|-------------------------------------|
| $y = \tan 3x - 4x$ .3                             | $y = 8\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4}$ .2 | $y = \cos 2x$ .1                    |
| $y = x^2 \sin x$ .6                               | $y = x \cos x$ .5                             | $y = x^2 + \cot \frac{x}{5}$ .4     |
| $y = \sin(x^2)$ .9                                | $y = \cos^3 2x$ .8                            | $y = \sin^2 x$ .7                   |
| $y = x^2 \cos^2 4x$ .12                           | $y = x \tan^2 x$ .11                          | $y = \cot(x^3)$ .10                 |
| $y = \sqrt{\sin x}$ .15                           | $y = \sin^3 x \cos x$ .14                     | $y = (\sin x + \cos x)^2$ .13       |
| $y = \tan^2 \sqrt{x}$ .18                         | $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .17        | $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$ .16       |
| $y = \frac{\cos^2 x}{x^2}$ .21                    | $y = \frac{\sin x}{x}$ .20                    | $y = \frac{1}{\cos x}$ .19          |
| $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ .24 | $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ .23           | $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ .22 |

$$y = \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad .27$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \quad .26$$

$$y = \tan x - x \quad .25$$

$$y = \sqrt{\cos \sqrt{x}} \quad .30$$

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \quad .29$$

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos 2x} \quad .28$$

$$y = \left(\sin \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)^2 \quad .33$$

$$y = \sqrt[3]{\cos \frac{1}{x^2}} \quad .32$$

$$y = \frac{1}{\tan^3 3x} \quad .31$$

$$y = \sqrt{\frac{\cos x}{1 + \sin x}} \quad .36$$

$$y = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} \quad .35$$

$$y = \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin^2 x} \quad .34$$

$$y = \frac{2 \cot x}{1 + \cot^2 x} \quad .39$$

$$y = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x \quad .38$$

$$y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad .37$$

$$y = \tan f(x) \quad .42$$

$$y = \cos f(x) \quad .41$$

$$y = \sin f(x) \quad .40$$

**מציאת שיפוע המשיק (ערך הנגזרת).**

בתרגילים 43 – 48 נדרש שימוש ברדיאנים.

43. מצא את הזווית שהמשיק לגרף הפונקציה  $y = \sin x + \cos x$  יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$

בנקודות בהן: א.  $x = \frac{\pi}{2}$     ב.  $x = \frac{\pi}{4}$     ג.  $x = \frac{\pi}{6}$

44. מצא את שיעורי ה- $x$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$  של הנקודות שעל גרף הפונקציה  $y = x + 2\cos x$  כך ששיפוע המשיק דרכן הוא: א. 0    ב. 1    ג. 3

45. מצא את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $y = \tan x$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  בנקודות בהן:

א.  $x = 0$     ב.  $y = 1$     ג.  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

46. א. מצא את הזווית שיוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  המשיק לגרף הפונקציה  $y = \sin 2x + \cos x$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .  
 ב. מצא בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$  את הנקודה על גרף הפונקציה הנ"ל ששיפוע המשיק דרכה הוא -3.

47. לגרף הפונקציה  $y = \sqrt{\sin x + 1}$  העבירו משיקים ששיפועם  $\frac{1}{4}$ . מצא את שיעור ה- $y$  של נקודות ההשקה הנ"ל.

48. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות על גרף הפונקציה  $y = \sqrt{\sin^2 x + 2}$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

ששיפוע המשיק דרכן הוא  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

**תשובות:**

1.  $-2 \sin 2x$     2.  $-4 \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{4}$     3.  $\frac{3}{\cos^2 3x} - 4$

4.  $2x - \frac{1}{5 \sin^2 \frac{x}{5}}$     5.  $\cos x - x \sin x$     6.  $2x \sin + x^2 \cos x$

7.  $\sin 2x$     8.  $-3 \cos 2x \sin 4x$     9.  $2x \cos(x^2)$



$$2x \cos^2 4x - 4x^2 \sin 8x \quad .12$$

$$\frac{\sin^2 x + 2xtgx}{\cos^2 x} \quad .11$$

$$\frac{-3x^2}{\sin^2(x^3)} \quad .10$$

$$\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad .15$$

$$3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x \quad .14$$

$$2 \cos 2x \quad .13$$

$$\frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} \quad .18$$

$$-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \quad .17$$

$$-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad .16$$

$$-\frac{2 \cos x (x \sin x + \cos x)}{x^3} \quad .21$$

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad .20$$

$$\frac{\tan x}{\cos x} \quad .19$$

$$\frac{-2}{(\sin - \cos x)^2} \quad .24$$

$$\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \quad .23$$

$$\frac{1}{1 + \cos x} \quad .22$$

$$-\frac{2}{(x-1)^2} \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad .27$$

$$\cos^2 x \quad .26$$

$$\tan^2 x \quad .25$$

$$\frac{-\sin \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos \sqrt{x}}} \quad .30$$

$$-\sin 4x \quad .29$$

$$\frac{\tan 2x}{\cos 2x} \quad .28$$

$$-\frac{\sin\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)}{3\sqrt[3]{x^4}} \quad .33$$

$$\frac{2 \sin \frac{1}{x^2}}{3x^3 \sqrt[3]{\cos^2 \frac{1}{x^2}}} \quad .32$$

$$-\frac{9 \cos^2 3x}{\sin^4 3x} \quad .31$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}} \quad .36$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 2x}} \quad .35$$

$$\frac{-2 \sin^3 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \quad .34$$

$$2 \cos 2x \quad .39$$

$$\tan^4 x \quad .38$$

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \quad .37$$

$$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \quad .42$$

$$-\sin f(x) \cdot f'(x) \quad .41$$

$$\cos f(x) \cdot f'(x) \quad .40$$

$$0.93 \text{ א. } 1.11 \text{ ב. } \frac{\pi}{4} \text{ א. } \quad .45$$

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \text{ א. } \quad .44$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ א. } 2\pi, \pi, 0 \text{ ב. } \quad .43$$

$$0.955, \frac{\pi}{6} \quad .48$$

$$y = 0, y = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad .47$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ ב. } 1.11 \text{ א. } \quad .46$$

**7. נגזרת הפונקציה הלוגריתמית**

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad \text{הנוסחאות:}$$

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\boxed{\underbrace{[\ln(x^2 - 5x + 4)]}'}_{(\ln t)'} = \underbrace{\frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4}}_{\frac{1}{t} \cdot t'} = \boxed{\frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}} \quad \text{דוגמה 1.}$$

$$(\ln^2 x + 5 \ln x + 6)' = \underbrace{(\ln^2 x)'}_{(t^2)'=2t \cdot t'} + 5(\ln x)' + (6)' = 2 \ln x \cdot (\ln x)' + 5 \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{5}{x} = \boxed{\frac{2 \ln x + 5}{x}} \quad \text{דוגמה 2.}$$

### 3. תרגיל

$$\underbrace{(\log_5^3 \cos x)'}_{(t^3)'} = \underbrace{3 \log_5^2 \cos x \cdot (\log_5 \cos x)'}_{3t^2 \cdot (t)'} = 3 \log_5^2 \cos x \cdot \underbrace{\frac{\log_5 e \cdot p'}{\cos x^2}}_{-\sin x} = \boxed{-3 \log_5^2 \cos x \cdot \frac{\log_5 e \cdot \sin x}{\cos x^2}}$$

$$y = \ln(2x-1) \quad .3$$

$$y = \ln \frac{x}{3} \quad .2$$

$$y = \ln 5x \quad .1$$

$$y = \ln \frac{1}{x^3} \quad .6$$

$$y = \log_5 \sqrt{x} \quad .5$$

$$y = \ln x^4 \quad .4$$

$$y = \frac{1}{x^2} + \ln \frac{1}{x^2} \quad .9$$

$$y = \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x} \quad .8$$

$$y = \ln(x^3 - 4x) \quad .7$$

$$y = \log_3(4x+1)^2 \quad .12$$

$$y = \log_2 \sqrt[3]{x^2} \quad .11$$

$$y = \ln(\sqrt{x^2+1}) \quad .10$$

$$y = \ln x \sqrt{x-1} \quad .15$$

$$y = \frac{1}{\ln x} \quad .14$$

$$y = (\ln x)^3 \quad .13$$

$$y = x \ln x \quad .18$$

$$y = \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad .17$$

$$y = \ln \frac{x-1}{x} \quad .16$$

$$y = \frac{\ln x^2}{x} \quad .21$$

$$y = \frac{x}{\ln x} \quad .20$$

$$y = (x^3 + x) \ln x \quad .19$$

$$y = \ln^2 x^2 \quad .24$$

$$y = \sqrt{\ln x} \quad .23$$

$$y = \frac{1}{\ln x^4} \quad .22$$

$$y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} \quad .27$$

$$y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \quad .26$$

$$y = \ln^4 \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} \quad .25$$

$$y = \ln^3 \sin x \quad .30$$

$$y = \ln \cos x \quad .29$$

$$y = \sqrt{1 + \ln^2 x} \quad .28$$

$$y = \ln \frac{1}{1 + \cos x} \quad .33$$

$$y = \ln \sin x^3 \quad .32$$

$$y = \ln \sin^3 x \quad .31$$

בתרגילים 34 – 35 מצא את שיעורי הנקודות שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה הוא בעל שיפוע  $m$  או יוצר זווית  $\alpha$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  :

$$m = -2 \quad y = \frac{x}{\ln x} \quad .35$$

$$m = 3 \quad y = x \ln^2 x \quad .34$$

תשובות:

$\frac{\log_5 e}{2x} \quad .5$	$\frac{4}{x} \quad .4$	$\frac{2}{2x-1} \quad .3$	$\frac{1}{x} \quad .2$	$\frac{1}{x} \quad .1$
$\frac{x}{x^2+1} \quad .10$	$\frac{-2(1+x^2)}{x^3} \quad .9$	$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad .8$	$\frac{3x^2-4}{x^3-4x} \quad .7$	$\frac{-3}{x} \quad .6$
$\frac{3x-2}{2x(x-1)} \quad .15$	$-\frac{1}{x \ln^2 x} \quad .14$	$\frac{3 \ln^2 x}{x} \quad .13$	$\frac{8 \log_3 e}{4x+1} \quad .12$	$\frac{2 \log_2 e}{3x} \quad .11$
$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \quad .20$	$(3x^2+1) \ln x + x^2 + 1 \quad .19$	$\ln x + 1 \quad .18$	$\frac{4x}{x^4-1} \quad .17$	$\frac{1}{x(x-1)} \quad .16$

$$\frac{1}{1-4x^2} \quad .25 \qquad \frac{4 \ln x^2}{x} \quad .24 \qquad \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \quad .23 \qquad \frac{-4}{x \ln^2 x^4} \quad .22 \qquad \frac{2 - \ln x^2}{x^2} \quad .21$$

$$3 \cot x \ln^2 \sin x \quad .30 \qquad -\tan x \quad .29 \qquad \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}} \quad .28 \qquad \frac{2}{x(1-\ln x)^2} \quad .27 \qquad \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad .26$$

$$\left(\sqrt{e}, 2\sqrt{e}\right), \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \quad .35 \qquad (e, e), (e^{-3}, 9e^{-3}) \quad .34 \qquad \tan \frac{x}{2} \quad .33 \qquad 3x^2 \cot x^3 \quad .32 \qquad 3 \cot x \quad .31$$

**8. נגזרת הפונקציה המערכית**

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x} \quad \text{הנוסחהות :}$$

גזור את הפונקציות הבאות :

**1. דוגמה**

$$(e^{2x} - 2e^x - 3)' = (e^{2x})' - (2e^x)' - (3)' = 2e^{2x} - 2e^x - 0 = \boxed{2e^x(e^x - 1)}$$

$$\boxed{(e^{2x})' = \underbrace{e^{2x}}_{e^{2 \cdot x}} \cdot \underbrace{(2x)'}_{e^{2 \cdot 1}} = 2e^{2x}}$$

**2. דוגמה**

$$\underbrace{(e^{x^2-x-2})'}_{(e^t)'} = \underbrace{e^{x^2-x-2}}_{e^{t'}} \cdot \underbrace{(x^2-x-2)'}_{e^{t'}} = \boxed{e^{x^2-x-2} \cdot (2x-1)}$$

**3. תרגיל**

$$\left(\frac{e^{4-x^2}}{x^3-8}\right)' = \frac{\overbrace{(e^{4-x^2})'}^{e^{4-x^2} \cdot (-2x)} \cdot (x^3-8) - e^{4-x^2} \cdot \overbrace{(x^3-8)'}^{3x^2}}{(x^3-8)^2} = \frac{e^{4-x^2}(-2x) \cdot (x^3-8) - e^{4-x^2} \cdot 3x^2}{(x^3-8)^2} = \boxed{\frac{e^{4-x^2}(-2x^4+16x-3x^2)}{(x^3-8)^2}}$$

**4. תרגיל**

$$\left(\sqrt[3]{10^{x^3-3x^2-9x}}\right)' = \underbrace{\left(10^{\frac{x^3-3x^2-9x}{3}}\right)'}_{(10^t)'} = \underbrace{10^{\frac{x^3-3x^2-9x}{3}} \cdot \ln 10}_{10^t \ln 10 (t)'} \cdot \left(\frac{x^3-3x^2-9x}{3}\right)' =$$

$$= 10^{\frac{x^3-3x^2-9x}{3}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{3x^2-6x-9}{3} = \boxed{10^{\frac{x^3-3x^2-9x}{3}} \cdot \ln 10 \cdot (x^2-2x-3)}$$

$y = 5^x \quad .3$	$y = e^{-2x+1} \quad .2$	$y = e^{3x} \quad .1$
$y = e^{\sqrt{x}} \quad .6$	$y = \sqrt{e^x} \quad .5$	$y = 2^{-x^2} \quad .4$
$y = xe^{x^2-2x} \quad .9$	$y = \frac{e^{-x}}{x} \quad .8$	$y = xe^x \quad .7$
$y = (x^2 - 2x + 3)e^x \quad .12$	$y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad .11$	$y = x^2 e^{-x^2} \quad .10$

$$y = \frac{10^x}{1-10^{-x}} \quad .15 \qquad y = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \quad .14 \qquad y = \frac{1+e^x}{1-e^x} \quad .13$$

$$y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) \quad .18 \qquad y = \ln(e^{-x} + xe^{-x}) \quad .17 \qquad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad .16$$

$$y = \ln(e^{x^2-x}) \quad .21 \qquad y = e^{-\cos x^2} \quad .20 \qquad y = e^{\sin x} \cos x \quad .19$$

**מצא** את שיפועי גרף הפונקציה (שיפוע המשיק) בנקודה שעל הגרף :

$$\left(1, \frac{1}{e}\right) \quad y = xe^{-x} \quad .23 \qquad y = 1 \quad y = \ln x \quad .22$$

$$\left(x = \frac{\pi}{2}\right) \quad y = e^{\cos x} \quad .25 \qquad (e, e^2) \quad y = x^2 \ln x \quad .24$$

$$y = 0 \quad y = \ln \frac{e^{-x}+1}{e^x+1} \quad .27 \qquad x = 0 \quad y = \ln \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} \quad .26$$

בתרגילים 28 – 30 מצא את שיעורי הנקודות שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה הוא בעל שיפוע  $m$  או יוצר זווית  $\alpha$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  :

$$m = 4 \quad y = e^x - 3e^{-x} \quad .29 \qquad \alpha = 0 \quad y = x^2 e^x \quad .28$$

$$m = 0 \quad y = e^x \sin x \quad .31 \qquad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad y = \sqrt{e^x} \quad .30$$

גזור את הפונקציות הבאות:  $y = e^{f(x)}$  .32  $y = \ln f(x)$  .33  $y = a^{f(x)}$  .34

**תשובות:**

$$\frac{1}{2}\sqrt{e^x} \quad .5 \qquad 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2 \quad .4 \qquad 5^x \ln 5 \quad .3 \qquad -2e^{-2x+1} \quad .2 \qquad 3e^{3x} \quad .1$$

$$2xe^{-x^2}(1-x^2) \quad .10 \qquad e^{x^2-2x}(2x^2-2x+1) \quad .9 \qquad -\frac{e^{-x}(1+x)}{x^2} \quad .8 \qquad e^x(1+x) \quad .7 \qquad \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad .6$$

$$\frac{(10^x-2)\ln 10}{(1-10^{-x})^2} \quad .15 \qquad \frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2} \quad .14 \qquad \frac{2e^x}{(1-e^x)^2} \quad .13 \qquad e^x(x^2+1) \quad .12 \qquad e^{\frac{1}{x}}(2x-1) \quad .11$$

$$2xe^{-\cos x^2} \sin x^2 \quad .20 \qquad e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) \quad .19 \qquad \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \quad .18 \qquad \frac{-x}{1+x} \quad .17 \qquad \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad .16$$

$$-1 \quad .25 \qquad 3e \quad .24 \qquad 0 \quad .23 \qquad \frac{1}{e} \quad .22 \qquad 2x-1 \quad .21$$

$$(\ln 12, \sqrt{12}) \quad .30 \qquad (0, -2), (\ln 3, 2) \quad .29 \qquad (0, 0), (-2, 4e^{-2}) \quad .28 \qquad -1 \quad .27 \qquad -\frac{1}{4} \quad .26$$

$$\ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) \quad .34 \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \quad .33 \qquad e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad .32 \qquad x = \frac{3}{4}\pi + \pi k \quad .31$$

## 51. משיק ונורמל לגרף הפונקציה

	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p style="text-align: center;"><b>ערך הנגזרת</b></p> <p>של הפונקציה <math>y = f(x)</math> בנקודה שבה <math>x = x_1</math></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 45%;"> <p style="text-align: center;"><b>שיפוע המשיק</b></p> <p>לגרף הפונקציה <math>y = f(x)</math> בנקודה שבה <math>x = x_1</math></p> </div> </div>
$y - y_1 = m(x - x_1)$ : משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(x_1, y_1)$ ושיפועו $m$	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)</math> </div> : $(x_1, y_1)$ בנקודה $y = f(x)$ לגרף הפונקציה	
$(x, y)$ - נקודת ההשקה - $(x, y)$ נקודה כלשהי על המשיק	
נורמל הוא ישר המאונך למשיק בנקודת ההשקה.	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)</math> </div> : $(x_1, y_1)$ בנקודה $y = f(x)$ לגרף הפונקציה <b>משוואת הנורמל</b>	

**דוגמה 1.** מצא את משוואות המשיק והנורמל לגרף הפונקציה  $y = 3x^2 - 2x - 1$  בנקודה שבה  $x = -2$ .

<p>ערך הפונקציה: <math>y(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 15</math> (הצבה <math>x = -2</math> בפונקציה <math>y = 3x^2 - 2x - 1</math>)</p> <p>נגזרת הפונקציה: <math>y' = (3x^2 - 2x - 1)' = 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 6x - 2</math> (גזירה)</p> <p>שיפוע המשיק (ערך הנגזרת): <math>m = y'(-2) = 6 \cdot (-2) - 2 = -14</math> (הצבה <math>x = -2</math> בנגזרת <math>y' = 6x - 2</math>)</p> <p>משוואת המשיק: <math>(m = -14, x_1 = -2, y_1 = 15)</math> <math>y - y_1 = m(x - x_1)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>y - 15 = -14(x + 2)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>y = -14x - 28 + 15</math></p> <p>משוואת הנורמל: <math>(m = -14, x_1 = -2, y_1 = 15)</math> <math>y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>y - 15 = \frac{1}{14}(x + 2)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>y = \frac{1}{14}x + \frac{1}{7} + 15</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><b>תשובה:</b> <math>y = \frac{1}{14}x + 15\frac{1}{7}</math>, <math>y = -14x - 13</math></p>	
--	--

**דוגמה 2.** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = 2x^2 - 2x - 1$  בנקודה שבה  $y = -1.5$ .

<p>משוואה: <math>2x^2 - 2x - 1 = -1.5</math> (השוואת הפונקציה ל-1.5-)</p> <p style="margin-left: 40px;"><math>2x^2 - 2x + 0.5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0.5</math></p> <p>נגזרת הפונקציה: <math>y' = (2x^2 - 2x - 1)' = 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 4x - 2</math> (גזירה)</p> <p>שיפוע המשיק (ערך הנגזרת): <math>m = y'(0.5) = 4 \cdot 0.5 - 2 = 0</math> (הצבה <math>x = 0.5</math> בנגזרת <math>y' = 4x - 2</math>)</p> <p>משוואת המשיק: <math>(m = 0, x_1 = 0.5, y_1 = -1.5)</math> <math>y - y_1 = m(x - x_1)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>y + 1.5 = 0 \cdot (x - 0.5)</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><b>תשובה:</b> <math>y = -1.5</math></p>	
--	--

**דוגמה 3.** נתונה הפונקציה  $y = 3x^2 - 2x - 1$ . מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא 7.

נגזרת הפונקציה:  $y' = (3x^2 - 2x - 1)' = 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 6x - 2$  (גזירה)  
 משוואה:  $6x - 2 = 7$  (השוואת הנגזרת ל-7)  $\Rightarrow m = y' = 7$   
 $6x = 7 + 2 \Rightarrow 6x = 9 \Rightarrow x = 1.5$   
 ערך הפונקציה:  $y(1.5) = 3 \cdot 1.5^2 - 2 \cdot 1.5 - 1 = 2.75$  (הצבה ב- $x = 1.5$  בפונקציה  $y = 3x^2 - 2x - 1$ )  
 משוואת המשיק:  $y - y_1 = m(x - x_1)$  (הצבה  $m = 7, x_1 = 1.5, y_1 = 2.75$ )  
 $y - 2.75 = 7(x - 1.5)$   
 $y = 7x - 10.5 + 2.75$   
**תשובה:**  $y = 7x - 7.75$

**דוגמה 4.** לשתי הפונקציה  $y = x^2 + 7x - 4$  ו- $y = x^3 + 3x^2$  יש נקודה משותפת שבה עובר משיק משותף. מצא את נקודת ההשקה המשותפת ואת משוואת המשיק המשותף.

נסמן:  $f(x) = x^3 + 3x^2$  ו- $g(x) = x^2 + 7x - 4$   
 1. נגזרות הפונקציות:  $f'(x) = (x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$   
 $g'(x) = (x^2 + 7x - 4)' = 2x + 7$   
 2. מערכת משוואות במשתנה אחד:  $f'(x) = g'(x)$  וגם  $f(x) = g(x)$   
 $3x^2 + 6x = 2x + 7$   
 $3x^2 + 4x - 7 = 0$   
 $(a = 3, b = 4, c = -7)$   
 $x = 1$  או  $x = -2\frac{1}{3}$   
 $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$   
 $\left[ \begin{array}{l} \xrightarrow{x=1} 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ \xrightarrow{x=-2\frac{1}{3}} \left(-2\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right)^2 - 7 \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) + 4 = 0 \Rightarrow 18\frac{14}{27} = 0 \end{array} \right.$   
 3. נקודת ההשקה המשותפת:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$   
 $f(x) = x^3 + 3x^2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 4 \Rightarrow$   
 4. שיפוע המשיק:  $m = g'(1) = 2 \cdot 1 + 7 = 9$  (או  $m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9$ )  
 משוואת המשיק:  $y - y_1 = m(x - x_1)$  (הצבה  $m = 9, x_1 = 1, y_1 = 4$ )  
 $y - 4 = 9(x - 1)$   
 $y = 9x - 5$   
**תשובה:**  $(1, 4), y = 9x - 5$

1. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x^2 - x$  בנקודות: א.  $(1, 0)$  ב.  $(2, 2)$  ג.  $(0, 0)$

2. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x^3 - 5x^2 + x + 2$  בנקודות:

א.  $(0, 2)$  ב.  $(1, -1)$  ג.  $(-1, -5)$

3. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $y = -x^2 + 5x - 4$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

4. נתונה הפונקציה  $y = x^2 - 3x + 2$ . מצא את נקודת ההשקה ומשוואת המשיק לגרף הפונקציה אם נתון שיפוע

המשיק הוא: א. -1 ב. -3 ג. 5

5. מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $y = 2x^2 - 9x + 5$  המקביל לישר  $y + x = 2$ .
6. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $y = x^3 + x + 2$  המקבילים לישר  $y = 4x + 5$ .
7. מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $y = -x^2 + 7x$  המאונך לישר  $x - 5y = 3$ .
8. מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $y = x^2 - 3x$  המקביל לישר העובר דרך הנקודות  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$ .
9. הוכח שהמשיק לגרף הפונקציה  $y = x^3 - 3x^2 + x - 2$  בנקודה  $(2, -4)$  מקביל למשיק לגרף הפונקציה  $y = x^4 - x^2 - x$  בנקודה  $(1, -1)$  ומצא גם את משוואות המשיקים.
10. א. מצא את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $y = x^3 - 3x^2 - 5x$  שהשיפוע שלהם 4.  
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה הנ"ל המקביל לישר העובר דרך הנקודות  $(3, 10)$ ,  $(4, 2)$ .
11. המשיק לגרף הפונקציה  $y = \frac{1}{2}x^2$  בנקודה  $x = 2$  מאונך למשיק אחר של הפונקציה. מצא את משוואת המשיק האחר.
12. א. מצא את נקודת ההשקה שבה הישר  $y = 3x + 16$  משיק לגרף העקומה  $f(x) = x^3 - 9x$ .  
 ב. מצא משיק נוסף לגרף העקומה הנ"ל המקביל לישר הנ"ל.
13. ישר מסוים ששיפועו 4 משיק לגרף הפונקציה  $y = x^4 - 8x^2 + 4x + 10$  בשתי נקודות שונות.  
 א. מצא את משוואת הישר ואת נקודות ההשקה. ב. מצא ישר נוסף ששיפועו 4 והוא משיק לגרף הפונקציה הנ"ל.
14. מצא על גרף הפונקציה  $y = x^4 - 2x^2 + x + 3$  נקודה, שהמשיק דרכה לגרף הפונקציה מתלכד עם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(1, 3)$ .
15. משוואת הנורמל לפונקציה  $y = x^3 - 2x^2 + 1$  בנקודה מסוימת היא  $4y + x = 6$ . מצא את הנקודה.
16. מצא שני ישרים שונים המקבילים זה לזה שאחד מהם משיק לגרף הפונקציה  $y = 3x^2 - 4x$ , השני משיק לגרף הפונקציה  $y = 2x^3 - 4x$  וכך שהישר העובר דרך שתי נקודות ההשקה מאונך לציר ה-x.
17. מצא את משוואת הישר המשיק לגרפים של הפונקציות  $y = 4x^3 + x$  ו-  $y = 3x^4 + x + 1$  באותה נקודה ומצא את נקודת ההשקה המשותפת.
18. הפונקציות  $y = x^3 - x^2 - 2x + 16$  ו-  $y = 3x^2 + x - 2$  משיקות זו לזו בנקודה מסוימת וחותכות זו את זו בנקודה אחרת.  
 א. מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק המשותף.  
 ב. מצא את נקודת החיתוך אם נתון שסכום שיפועי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודה זו הוא 3.

בתרגילים 19 – 28 מצא את משוואת המשיק והנורמל לקווים הנתונים דרך הנקודה שעליהם:

$$(2, 4) \quad y = \frac{8}{x} \quad .20 \qquad (1, 2) \quad y = -x^2 + 3x \quad .19$$

$$(-1, 1) \quad y = \frac{x+3}{1-x} \quad .22 \qquad (1, -1) \quad y = x^3 - 2 \quad .21$$

$$(2, 1) \quad y = \frac{8}{4+x^2} \quad .24 \qquad (2, 2) \quad y = \frac{3x}{x+1} \quad .23$$

$$(1, 2) \quad y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad .26 \qquad (4, 4) \quad y = \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} \quad .25$$

$$(2, 1) \quad y = 1 + \sqrt{x-2} \quad .28 \qquad (-2, -4) \quad y = \frac{x^2}{x+1} \quad .27$$

בתרגילים 29 – 31 נדרש שימוש ברדיאנים.

29. מצא משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = \cos^2 x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$  המקביל לישר  $y = -x$

30. נתונות הפונקציות  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x^2 + \cos^2 x$

א. מצא בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$  את שיעורי ה- $x$  של נקודות המפגש בין הפונקציות.  
 ב. הוכח כי בנקודות שמצאת הפונקציות משיקות זו לזו ומצא את משוואות המשיקים.

31. נתונה הפונקציה  $y = \cos 2x + \cos x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. מצא את משוואות המשיקים בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. האם לפונקציה יש משיק ששיפועו  $-3$ ?

בתרגילים 32 – 39 מצא את משוואות המשיקים לקווים הנתונים דרך הנקודות שעליהם:

$$(0 \leq x \leq \pi) \quad y = 0 \quad y = \sin 2x \quad .33 \qquad (0,1) \quad y = \sqrt{3x^3 + 1} \quad .32$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad y = \ln \sqrt{\sin x} - \ln \sqrt{\cos x} \quad .35 \qquad y = 1 \quad y = e^{x^2 - 2x} \quad .34$$

$$(0 \leq x \leq \pi) \quad y = \frac{1}{2} \quad y = \sin^2 x + \cos 2x \quad .37 \qquad y = 0 \quad y = x^4 - 5x^2 + 4 \quad .36$$

$$y = 1 \quad y = x + \sqrt[3]{x-1} \quad .39 \qquad x = 1 \quad y = x^{x+1} \quad .38$$

**תשובות:**

א. 1.  $y = x - 1$ . ב.  $y = 3x - 4$ . ג.  $y = -x$ . ד. 2. א.  $y = x + 2$ . ב.  $y = -6x + 5$ . ג.  $y = 14x + 9$

3. א.  $y = 3x - 3$ ,  $y = -3x + 12$ ,  $y = 5x - 4$ . ב.  $(1,0)$ ,  $(0,2)$ . ג.  $y = -3x + 2$

ג.  $(4,6)$ ,  $y = 5x - 14$ . ד. 5.  $y = -x - 3$ . 6.  $y = 4x$ ,  $y = 4x + 4$ . 7.  $y = -5x + 36$ . 8.  $y = 3x - 9$

9. א.  $y = x - 2$ ,  $y = x - 6$ . 10. א.  $(-1,1)$ ,  $y = 4x + 5$ ,  $(3,-15)$ ,  $y = 4x - 27$ . ב.  $y = -8x + 1$

11. א. 12.  $(-2, 10)$ . ב.  $y = 3x - 16$ . 13. א.  $(-2, -14)$ ,  $(2,2)$ ,  $y = 4x - 6$ . ב.  $y = 4x + 10$

14.  $(-1,1)$ ,  $(y = x + 2)$ . 15.  $(2,1)$ . 16.  $y = 2x - 3$ ,  $y = 2x - 4$ . 17.  $(1,5)$ ,  $y = 13x - 8$

18. א.  $(3,28)$ ,  $y = 19x - 29$ . ב.  $(-2,8)$ . 19.  $y = x + 1$ ,  $y = -x + 3$ . 20.  $y = -2x + 8$ ,  $y = 0.5x + 3$

21.  $y = 3x - 4$ ,  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ . 22.  $y = x + 2$ ,  $y = -x$ . 23.  $y = -3x + 8$ ,  $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

24.  $y = -0.5x + 2$ ,  $y = 2x - 3$ . 25.  $y = 2.5x - 6$ ,  $y = -0.4x + 5$ . 26.  $y = 1.5x + 0.5$ ,  $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

27.  $x = -2$ ,  $y = -4$ . 28.  $x = 2$ ,  $y = 1$ . 29.  $y = -x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ . 30. א.  $2\pi$ ,  $\pi$ ,  $0$

31. א.  $y = 4\pi x + 1 - 4\pi^2$ ,  $y = 2\pi x + 1 - \pi^2$ ,  $y = 1$ . ב.  $y = 0$ ,  $y = -\frac{3}{2}\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ . ג. ל. 32.  $y = 1$

33.  $y = 2x$ ,  $y = -2x + \pi$ ,  $y = 2x - 2\pi$ . 34.  $y = -2x + 1$ ,  $y = 2x - 3$ . 35.  $y = x - \frac{\pi}{4}$

36.  $y = -6x + 6$ ,  $y = 6x + 6$ ,  $y = -12x - 24$ ,  $y = 12x - 24$ . 37.  $y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ,  $y = x - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$

38.  $y = 2x - 1$ . 39.  $x = 1$



## 52. כלל לופיטל

משפט. אם  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{0}{0}$  או  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  והגבול  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$  קיים, אז  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

חשב את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^2-4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)'}{(x^2-4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{1. דוגמה}$
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4-1}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2-1)'}{(\sqrt{x^4-1})'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4-1}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x \cdot \cancel{2} \sqrt{x^4-1}}{\cancel{4} x^3} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{2. דוגמה}$
$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{3. דוגמה}$

מצא את הגבולות הבאים:

- |  |   |
|--|---|
| <p>2. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^2 + x - 14}</math></p> <p>4. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}</math></p> <p>6. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}</math></p> <p>8. <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{3+2x}}{\sqrt{x+2} - 1}</math></p> <p>10. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}</math></p> <p>12. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \ln x - 1}{e^x - e}</math></p> <p>14. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^4}</math></p> <p>16. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)</math></p> <p>18. <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x</math></p> <p>20. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}</math></p> <p>22. <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{e^{2x} - (x+1)^2}</math></p> | <p>1. <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 + 3x - 8}</math></p> <p>3. <math>\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad (a &gt; 0)</math></p> <p>5. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{5x}</math></p> <p>7. <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5+2x}}{x^2 - 4}</math></p> <p>9. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2}</math></p> <p>11. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}</math></p> <p>13. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}</math></p> <p>15. <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}</math></p> <p>17. <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)</math></p> <p>19. <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x</math></p> <p>21. <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}</math></p> |
|--|---|

- תשובות:** 1.  $\frac{4}{13}$  2. 0 3.  $\frac{m}{n} a^{m-n}$  4.  $\frac{16}{13}$  5.  $\frac{3}{5} \ln 2$  6. 2.6 7.  $-\frac{1}{12}$  8. -2.8 9. 2.9 10. 0.10
11. 0 12.  $\frac{3}{e}$  13. 0.4 14.  $\infty$  15. 0.15 16.  $\frac{1}{2}$  17. 0.17 18. 0.18 19. 0.19 20.  $\frac{9}{4}$  21.  $\frac{1}{6}$  22.  $-\frac{1}{2}$

## 53. אסימפטוטות

### אסימפטוטה אנכית

1. מציאת תחום ההגדרה.
2. מציאת הגבול (משני הצדדים) בנקודות, בהן פונקציה אינה מוגדרת, אך בסביבתה או בחצי סביבתה פונקציה מוגדרת.
  - א. אם הגבול הוא אינסוף - יש אסימפטוטה אנכית.
  - ב. אם הגבול הוא מספר כלשהוא אז יש "חור" בפונקציה בגובה הגבול.

### אסימפטוטה אופקית

- מציאת גבול הפונקציה, כאשר  $x$  שואף לאינסוף  $(\pm\infty)$ .
- א. אם הגבול הוא אינסוף - אין אסימפטוטה אופקית.
- ב. אם הגבול הוא מספר כלשהוא אז יש אסימפטוטה אופקית בגובה הגבול.

**מצא** את אסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות הבאות :

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

נסמן:  $t = x^2$  ונקבל:  $t^2 - 8t - 9 = 0$

$$t_1 = 9, t_2 = -1$$

$$x^2 = 9 \quad x^2 = -1$$

$$x = \pm 3 \quad \emptyset$$

**דוגמה 1.**  $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 8x^2 - 9}$

תחום ההגדרה:  $x^4 - 8x^2 - 9 \neq 0$

$x \neq -3 \text{ וגם } x \neq 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 8x^2 - 9} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

הישר  $x = -3$  הוא אסימפטוטה אנכית

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 8x^2 - 9} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

גרף הפונקציה שואף לנקודה  $\left(3, \frac{1}{15}\right)$

(חור" בגרף)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 8x^2 - 9} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{(x^4 - 8x^2 - 9)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 2}{4x^3 - 16x} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \Rightarrow \left(3, \frac{1}{15}\right)$$

הישר  $y = 0$  הוא אסימפטוטה אופקית

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x^2} \right] = 0$$

**דוגמה 2.**  $y = \frac{2x - 3}{e^x + 5}$

תחום ההגדרה:  $e^x + 5 \neq 0$

$\mathbb{R}$  (לכל  $x : e^x > 0$ ) פונקציה מוגדרת לכל המספרים, לכן אין אסימפטוטה אנכית

הישר  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{e^x + 5} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{e^x + 5} = \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 3)'}{(e^x + 5)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{e^x + 5} = \left[ \frac{-\infty}{5} \right] = -\infty \end{cases}$$

כאשר  $x \rightarrow +\infty$  . כאשר  $x \rightarrow -\infty$  אין אסימפטוטה אופקית.

$$y = \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 + 1}}{x^3 + 27} \quad \text{דוגמה 3.}$$

תחום ההגדרה:  $x^3 + 27 \neq 0$  וגם  $4x^6 + 3x^2 + 1 \geq 0$   
 $x^3 \neq -27$   
 לכל  $x$  ( $x^6 \geq 0, x^2 \geq 0, 1 > 0$ )

$$\boxed{x \neq -3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 + 1}}{x^3 + 27} = \frac{\sqrt{4402}}{0^+} = +\infty$$

הישר  $\boxed{x = -3}$  הוא אסימפטוטה אנכית

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 + 1}}{x^3 + 27} = \frac{\sqrt{4402}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 + 1}}{x^3 + 27} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{4x^6}}{x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2|x^3|}{x^3} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^3}{x^3} \right] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-2x^3}{x^3} \right] = -2 \end{cases}$$

הישר  $\boxed{y = 2}$  היא אסימפטוטה אופקית (ימנית), כאשר  $x \rightarrow +\infty$ .

הישר  $\boxed{y = -2}$  היא אסימפטוטה אופקית (שמאלית), כאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

$$y = \frac{1-3x^2}{x^2+2} \quad .3$$

$$y = \frac{x^2}{x^2+x+1} \quad .2$$

$$y = \frac{x}{1+x^2} \quad .1$$

$$y = \frac{x}{x-2} \quad .6$$

$$y = \frac{1}{x-5} \quad .5$$

$$y = \frac{2x^4+x}{(-x^2-2)^2} \quad .4$$

$$y = \frac{x+1}{2x-x^2} \quad .9$$

$$y = \frac{2x^2}{1-x^2} \quad .8$$

$$y = \frac{x}{(x-3)^2} \quad .7$$

$$y = \frac{x}{x^3+1} \quad .12$$

$$y = \frac{x^4+1}{x^2} \quad .11$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-x} \quad .10$$

$$y = e^{\frac{1}{x}} \quad .15$$

$$y = e^x \quad .14$$

$$y = \frac{x^2}{1-\sqrt{x}} \quad .13$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi) y = e^{\tan x} \quad .18$$

$$y = \ln^2 x - \ln x \quad .17$$

$$y = \ln x + \frac{1}{\ln x} \quad .16$$

$$y = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \quad .21$$

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-x} \quad .20$$

$$y = \frac{\ln(2-x^2)}{x} \quad .19$$

$$y = \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^4}} \quad .24$$

$$y = \frac{e^x-x}{x^2-4} \quad .23$$

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2-3}} \quad .22$$

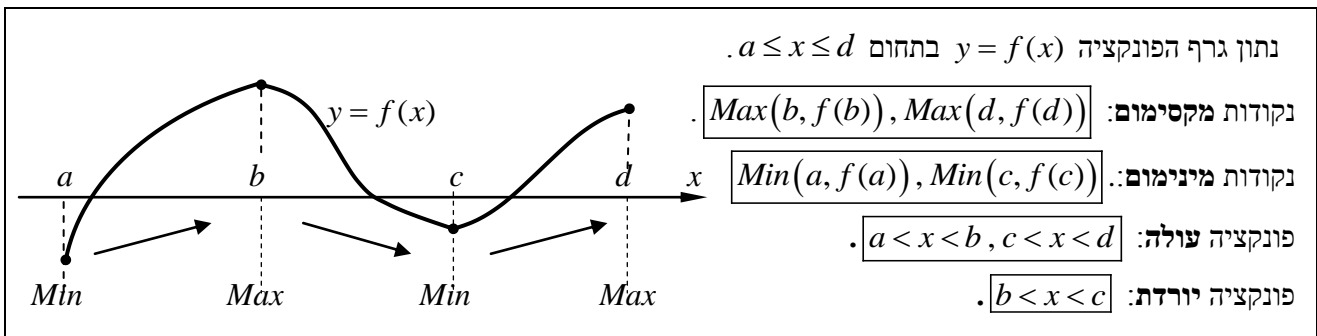
**תשובות:**

- $x=3, y=0$  .7  $x=2, y=1$  .6  $x=5, y=0$  .5  $y=2$  .4  $y=-3$  .3  $y=1$  .2  $y=0$  .1  
 $x=0$  .11  $x=0, x=1, y=0$  .10  $x=2, x=0, y=0$  .9  $x=-1, x=1, y=-2$  .8  
 $x=0$  .17  $x=1, x=0$  .16  $x=0, y=1$  .15  $(x \rightarrow -\infty) y=0$  .14  $x=1$  .13  $x=-1, y=0$  .12  
 $y=0$  .21  $x=0, y=1$  .20  $x=0, x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}$  .19  $x=0.5\pi, x=1.5\pi$  .18  
 $x = \pm\sqrt{2}$  .24  $(x \rightarrow -\infty) y=0, x = \pm 2$  .23  $(x \rightarrow -\infty) y=-3, (x \rightarrow \infty) y=3, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$  .22

## 54. התנהגות הפונקציה – עלייה, ירידה. נקודות קיצון.

קשר בין סימני הנגזרת לבין התנהגות הפונקציה	
$y' < 0$ : נגזרת שלילית $\Downarrow$ $y \searrow$ : פונקציה יורדת	$y' > 0$ : נגזרת חיובית $\Downarrow$ $y \nearrow$ : פונקציה עולה

מציאת נקודות הקיצון בעזרת הנגזרת		
$y' = 0$ $+$ $-$  עלייה      ירידה <b>Max</b>	$y' = 0$ $-$ $+$  ירידה      עלייה <b>Min</b>	סימני הנגזרת $y'$ : התנהגות הפונקציה $y$ : נקודות קיצון של הפונקציה:
נקודת אפס של הנגזרת היא <b>נקודת קיצון</b> , אם בנקודה זו התנהגות הפונקציה משתנה (סימן הנגזרת משתנה).		



מינימום מוחלט של פונקציה $y = f(x)$ (אם הוא קיים) הוא ערך הפונקציה הקטן ביותר (ערך מינימלי של הפונקציה).			
מקסימום מוחלט של פונקציה $y = f(x)$ (אם הוא קיים) הוא ערך הפונקציה הגדול ביותר (ערך מקסימלי של הפונקציה).			
<b>דוגמא 1.</b>  מינימום מוחלט לא קיים. מקסימום מוחלט הוא 4.	<b>דוגמא 2.</b>  מינימום מוחלט הוא -1. מקסימום מוחלט הוא 4.	<b>דוגמא 3.</b>  מינימום מוחלט הוא -1. מקסימום מוחלט לא קיים.	<b>דוגמא 4.</b>  מינימום מוחלט הוא -1. מקסימום מוחלט הוא 4.

מצא את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה של פונקציות הבאות.

דוגמה 1.  $y = x^3 - 2x^2 + x$  (פונקציית פולינום, ממעלה שלישית)

נגזרת:  $y' = (x^3 - 2x^2 + x)' = (x^3)' - (2x^2)' + (x)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = \boxed{3x^2 - 4x + 1}$

אפסי הנגזרת:  $y' = 0$

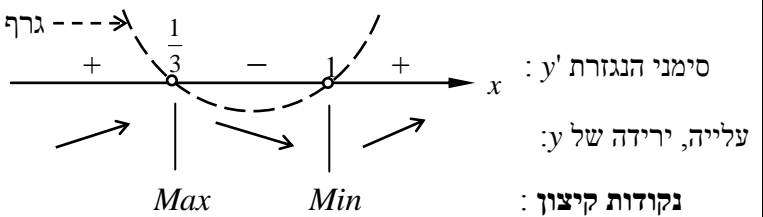
$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(a=3, b=-4, c=1)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \end{cases}$$

גוף הנגזרת  $3x^2 - 4x + 1$  -----

$y' = 3x^2 - 4x + 1$ $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 > 0$ $y'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 1 = -0.25 < 0$ $y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$
---



תשובה: נקודות קיצון:  $Max\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), Min(1, 0)$ .

תחומי העלייה:  $x < \frac{1}{3}, x > 1$ .

תחומי הירידה:  $\frac{1}{3} < x < 1$ .

דוגמה 2.  $y = \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6}$  (פונקציה רציונלית)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

תחום ההגדרה.  $x^2 + x - 6 \neq 0$

$$\boxed{x \neq -3, x \neq 2}$$

נגזרת הפונקציה:

$$y' = \left( \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} \right)' = \left( \frac{-x^2-x+6-4}{x^2+x-6} \right)' = \left( -1 - \frac{4}{x^2+x-6} \right)' = 0 + \frac{4 \cdot (x^2+x-6)'}{(x^2+x-6)^2} = \frac{4 \cdot (2x+1-0)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{4(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

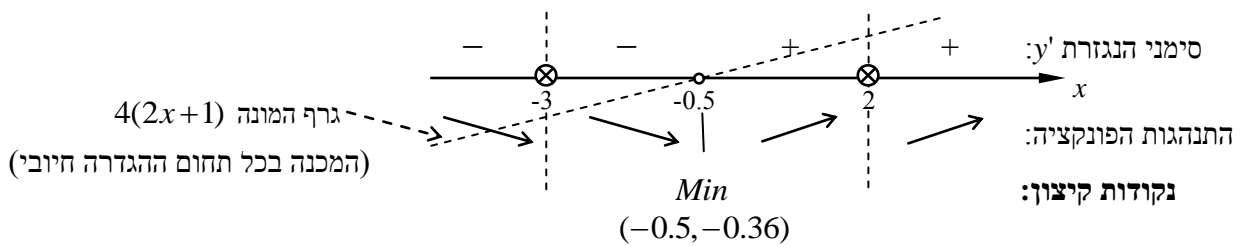
אפסי הפונקציה:  $y' = 0$

$$\frac{4(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = 0$$

$$2x+1=0$$

$$2x = -1 \quad /:2$$

$$\begin{cases} x = -0.5 \\ y = \frac{2+0.5-0.25}{0.25-0.5-6} = -0.36 \end{cases}$$

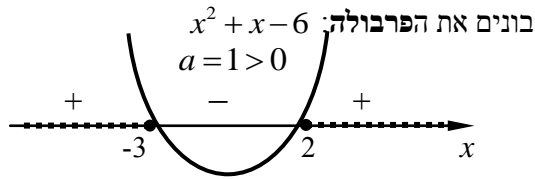


תשובה: נקודות קיצון:  $Min(-0.5, -0.36)$ .

עלייה:  $-0.5 < x < 2, x > 2$ .

ירידה:  $x < -3, -3 < x < -0.5$ .

דוגמה 3.  $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$  (פונקציה אי רציונלית).



תחום ההגדרה:  $x^2 + x - 6 \geq 0$   
 אפסי הפרבולה:  
 $x^2 + x - 6 = 0$   
 $x_2 = -3, x_1 = 2$   
 $x \leq -3, x \geq 2$

נגזרת הפונקציה:  
 $y' = (\sqrt{x^2 + x - 6})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}} \cdot (x^2 + x - 6)' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}}$

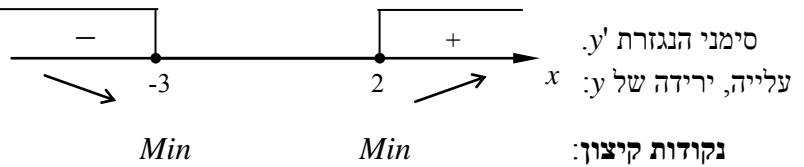
אפסי הנגזרת:  $y' = 0$   
 $\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$   
 $2x + 1 = 0$   
 $2x = -1$   
 $x = -0.5$

לא שייך לתחום ההגדרה, אין אפסי הנגזרת

$$y = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{2 \cdot 3 + 1}{2\sqrt{3^2 + 3 - 6}} > 0$$

$$x = -4 \rightarrow \frac{2 \cdot (-4) + 1}{2\sqrt{(-4)^2 + (-4) - 6}} < 0$$



תשובה:  $Min(-3, 0), Min(2, 0)$

תחומי עלייה:  $x > 2$

תחומי ירידה:  $x < -3$

הערה. בנקודות  $(2, 0)$  ו- $(-3, 0)$  הנגזרת לא קיימת, כלומר שיפוע המשיק לא קיים, לכן המשיקים הם ישרים אנכיים.

דוגמה 4.  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$  (פונקציה לוגריתמית)

תחום ההגדרה.  $x^2 + 4 > 0$

כל המספרים

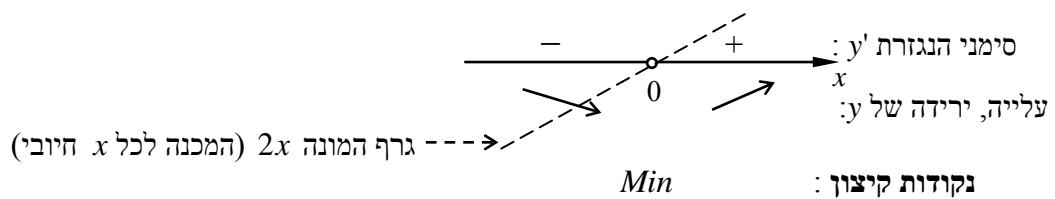
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow y' = \ln(x^2 + 4) = \frac{1}{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4)'$$

$$\frac{2x}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$y = f(0) = \ln(0^2 + 4) = \ln 4 = 1.39$$



תשובה:  $Min(0, \ln 4)$

תחום עלייה:  $x > 0$ ,

תחום ירידה:  $x < 0$ .



דוגמה 5.  $y = \frac{e^x}{(e^x + 2)^2}$  (פונקציה מערכית)

תחום ההגדרה:  $\mathbb{R}$  (כל המספרים)

נגזרת:  $y' = \left( \frac{e^x}{(e^x + 2)^2} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x + 2)^2 - e^x((e^x + 2)^2)'}{(e^x + 2)^2}$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 2)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 2)(e^x + 2)'}{(e^x + 2)^4}$$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 2)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 2)e^x}{(e^x + 2)^4}$$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 2)(e^x + 2 - 2e^x)}{(e^x + 2)^4}$$

$$y' = \frac{e^x(e^x + 2)(2 - e^x)}{(e^x + 2)^4}$$

אפסי הנגזרת:  $\frac{e^x(e^x + 2)(2 - e^x)}{(e^x + 2)^4} = 0$

$(x \text{ לכל } \frac{e^x(e^x + 2)}{(e^x + 2)^4} > 0) \quad 2 - e^x = 0$

$$e^x = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \ln 2 = 0.69 \\ y = \frac{2}{(2+2)^2} = 0.125 \end{array} \right.$$

$$y = \frac{2}{(2+2)^2} = 0.125$$

$$\left. \begin{array}{l} y'(0) = \frac{e^0(e^0 + 2)(2 - e^0)}{(e^0 + 2)^4} > 0 \\ y'(1) = \frac{e^1(e^1 + 2)(2 - e^1)}{(e^1 + 2)^4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{Max(\ln 2, 0.125)} \text{ נקודות קיצון:}$$

**תשובה:**  $Max(\ln 2, 0.125)$ .

עלייה:  $x < \ln 2$

ירידה:  $x > \ln 2$ .

**דוגמה 6.**  $y = \sin^4 x - \cos^4 x + 1$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$  (פונקציה טריגונומטרית).

נגזרת הפונקציה:  $y' = (\sin^4 x - \cos^4 x + 1)' = (\sin^4 x)' - (\cos^4 x)' + 0$

$$y' = 4 \sin^3 x (\sin x)' - 4 \cos^3 x (\cos x)'$$

$$y' = 4 \sin^3 x \cos x + 4 \cos^3 x \sin x$$

$$y' = 4 \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$y' = 2 \cdot 2 \sin x \cos x \cdot 1$$

$$y' = 2 \sin 2x$$

אפסי הנגזרת:  $y' = 0$

$$2 \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

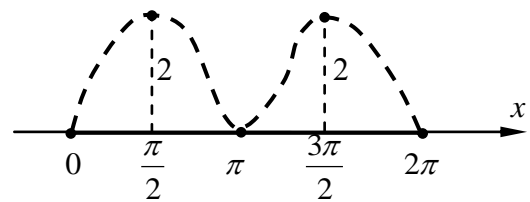
$$2x = 180^\circ k = \pi k \quad /:2$$

$$(0^\circ \leq x \leq 360^\circ) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad x = 90^\circ k = \frac{\pi k}{2}$$

$k$	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x$	...	<del><math>90^\circ</math></del>	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$	<del><math>450^\circ</math></del>	...

בונים סקיצת של גרף הפונקציה לפי נקודות בקצוות הקטע ונקודות האפס של הנגזרת השייכות לתחום הנתון:

$x$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin^4 x - \cos^4 x + 1$	0	2	0	2	0



**תשובה:**  $Min(0,0)$ ,  $Max\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ ,  $Min(\pi, 0)$ ,  $Max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ ,  $Min(2\pi, 0)$

פונקציה עולה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

פונקציה יורדת:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

**הערה.**  $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x \cdot 1 = -\cos 2x$

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)' = (-\cos 2x)' = 2 \sin 2x \cdot (2x)' = 4 \sin 2x$$

מצא את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה של פונקציות הבאות.

תרגילים.

$$y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \frac{1}{2} \quad .2$$

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x \quad .1$$

$$y = x^3(6x^2 - 9x - 22) \quad .4$$

$$y = x(27 - x^2) \quad .3$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x} \quad .6$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{9}{x} \quad .5$$

$$y = \frac{3(x-3)}{(x+3)(x^2 - 5x + 6)} \quad .8$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \quad .7$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{9-x} \quad .10$$

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \quad .9$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 4}{\ln x} \quad .12$$

$$f(x) = \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} \quad .11$$

$$y = \frac{e^{2x} + 4e^x + 3}{(e^x - 3)^2} \quad .14$$

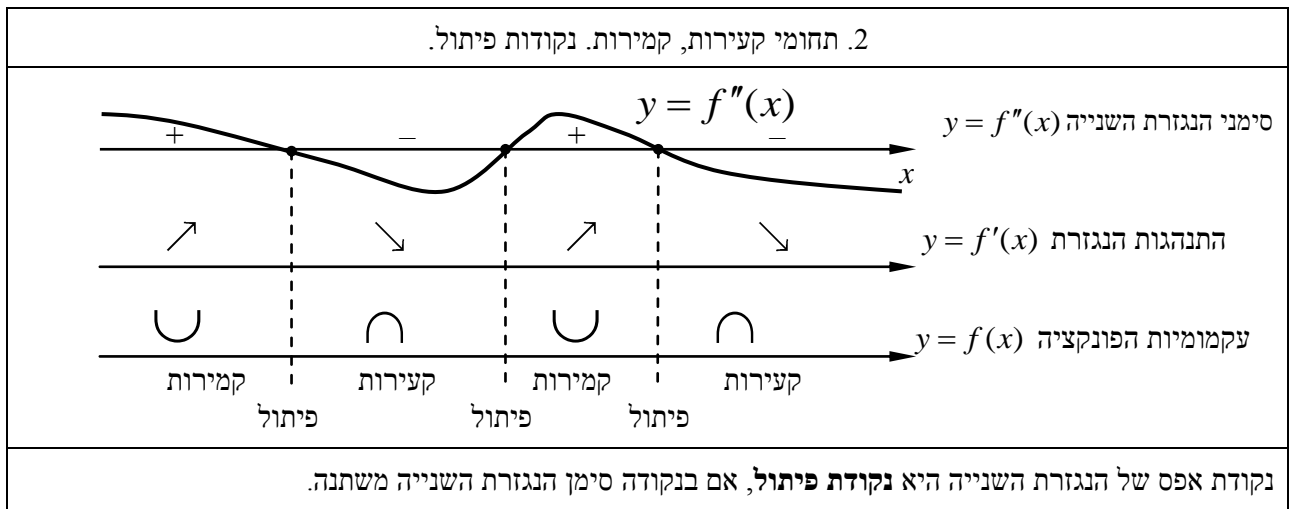
$$y = (x^2 - 3)e^x \quad .13$$

$$-\pi \leq x \leq \pi \quad \text{בתחום} \quad y = \tan^2 x - 3 \quad .16 \quad .0 \leq x \leq \pi \quad \text{בתחום} \quad y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x \quad .15$$

1.  $Max\left(-1\frac{2}{3}, -1\frac{23}{27}\right), Min(-1, -2)$ . עולה:  $x > -1$  או  $x < -1\frac{2}{3}$ , יורדת:  $-1\frac{2}{3} < x < -1$ .
2.  $Max(2, 0.5)$ . עלייה:  $x > 2$ , ירידה:  $x < 2$ .
3.  $Min(-3, -54), Max(3, 54)$ . עולה:  $-3 < x < 3$ , יורדת:  $x < -3$  או  $x > 3$ .
4.  $Max(-1, 7), Min(2.2, -135.87)$ . עלייה:  $x > 2.23$ ,  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 2.2$ .
5.  $Max(-6, -3), Min(6, 3)$ . עלייה:  $x > 6$  או  $x < -6$ , ירידה:  $0 < x < 6$  או  $-6 < x < 0$ .
6.  $Min(1.15, 7.85), Max(7.85, 1.15)$ . העלייה:  $2 < x < 7.85$  או  $1.15 < x < 2$ . הירידה:  $x > 7.85$  או  $0 < x < 1.15$  או  $x < 0$ .
7. **אינן** נקודות קיצון. תחומי עלייה: **אינן**. תחומי ירידה:  $x < -1 \vee -1 < x < 4 \vee x > 4$ .
8.  $Max(-0.5, -0.48)$ . עלייה:  $-3 < x < -0.5$  או  $x < -3$ . ירידה:  $x > 3$  או  $2 < x < 3$  או  $-0.5 < x < 2$ .
9. **אינן** נקודות קיצון. תחומי עלייה:  $x > 1$ . תחומי ירידה:  $x < -1$ .
10.  $Min(0, 0), Max(7.2, 69.55)$ . תחומי עלייה:  $0 < x < 7.2$ , תחומי ירידה:  $x < 0, 7.2 < x < 9$ .
11.  $Max\left(\frac{e+1}{3}, \frac{1}{e}\right)$ . תחומי עלייה:  $\frac{1}{3} < x < \frac{e+1}{3}$ , תחומי ירידה:  $x > \frac{e+1}{3}$ .
12.  $Max\left(\frac{1}{e^2}, -4\right), Min(e^2, 4)$ . תחומי עלייה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1, x > e^2$ , תחומי ירידה:  $1 < x < e^2, 0 < x < \frac{1}{e^2}$ .
13.  $Max(-3, 6e^{-3}), Min(1, -2e)$ . תחומי עלייה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , תחומי ירידה:  $-3 < x < 1$ .
14. **אינן** נקודות קיצון. תחום עלייה:  $x < \ln 3$ , תחום ירידה:  $x > \ln 3$ .
15.  $Min(0, 1), Max\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), Min\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right), Max(\pi, 1)$ . תחומי העלייה:  $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי הירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ .
16.  $Min(-\pi, -3), Min(0, -3), Min(\pi, -3)$ . תחומי העלייה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ , תחומי הירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  או  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ .

## 55. עקמומיות של הפונקציה – קעירות, קמירות, נקודות פיתול.

1. קשר בין סימני הנגזרת השנייה $y'' = (y')'$ , בין התנהגות הנגזרת $y'$ לבין עקמומיות של הפונקציה $y$ .	
$y'' < 0$ : נגזרת שנייה שלילית $\Downarrow$ $y' \searrow$ : נגזרת יורדת $\Downarrow$ פונקציה קעורה כלפי מטה: $y \cap$ (קעירות)	$y'' > 0$ : נגזרת שנייה חיובית $\Downarrow$ $y' \nearrow$ : נגזרת עולה $\Downarrow$ פונקציה קעורה כלפי מעלה: $y \cup$ (קמירות)



**מצא** את תחומי הקמירות והקעירות ואת נקודות הפיתול של הפונקציות הבאות :

**דוגמה 1.**  $y = x^4 - 8x^2$ .

תחום ההגדרה. כל המספרים

נגזרת:  $y' = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x$

נגזרת שנייה:  $y'' = (y')' = (4x^3 - 16x)' = 12x^2 - 16$

אפסי הנגזרת השנייה:  $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm 1.15 \rightarrow y = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8 \cdot \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = -8 \cdot \frac{8}{9} = -8.89$

סמני הנגזרת השנייה  $y''$ :

עקמומיות הפונקציה  $y$ :

**נקודות פיתול:**  $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -8\frac{8}{9}\right)$   $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -8\frac{8}{9}\right)$

תחומי קמירות  $\cup$ :  $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$

תחומי קעירות  $\cap$ :  $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$

דוגמה 2.  $y = \frac{x}{4} + \frac{9}{x}$ .

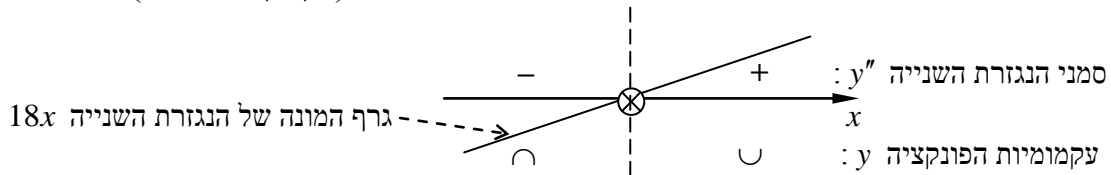
תחום ההגדרה:  $x \neq 0$

נגזרת:  $y' = \left(\frac{x}{4} + \frac{9}{x}\right)' = \left(\frac{x}{4}\right)' + \left(\frac{9}{x}\right)' = \frac{x'}{4} + \left(-\frac{9}{x^2}\right) = \frac{1 \cdot x^2}{4} - \frac{9 \cdot 4}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{4x^2}$

נגזרת שנייה:  $y'' = \left(\frac{x^2 - 36}{4x^2}\right)' = \frac{(x^2 - 36)' \cdot 4x^2 - (x^2 - 36) \cdot (4x^2)'}{(4x^2)^2} = \frac{2x \cdot 4x^2 - (x^2 - 36) \cdot 8x}{16x^4} = \frac{288x}{16x^4} = \frac{18x}{x^4}$

אפסי הנגזרת השנייה:  $y'' = 0 \Leftrightarrow 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

לא בתחום ההגדרה (אין נקודות פיתול)



תחום הקמירות:  $x > 0$  . תחום הקערות:  $x < 0$ .

1.  $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 12x^2$  . 2.  $y = \frac{x^2}{x-1}$  . 3.  $y = \frac{x^2-1}{x^2+3}$  . 4.  $y = x\sqrt{4-x^2}$  . 5.  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

6.  $y = \frac{x}{x-\sqrt{x}}$  . 7.  $y = \sin 2x - 2\sin x$  ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  . 8.  $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x$  ,  $0 \leq x \leq 2\pi$

9.  $y = (x^2+1)e^x$  . 10.  $y = \frac{x}{\ln x+1}$  . 11.  $y = x \ln x - x^2$

**תשובות:** 1. קמירות:  $2 < x < 4$  קעירות:  $x < 2$  או  $x > 4$  .  $(4, -64)$  ,  $(2, -28)$

2. קמירות:  $x > 1$  קעירות:  $x < 1$  . אין נקודות פיתול.

3. קמירות:  $-1 < x < 1$  קעירות:  $x > 1$  או  $x < -1$  .  $(1, 0)$  ,  $(-1, 0)$

4. קמירות:  $-2 < x < 0$  קעירות:  $0 < x < 2$  .  $(0, 0)$

5. קמירות:  $0 < x < 3$  קעירות:  $x > 3$  .  $\left(3, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

6. קמירות:  $0 < x < \frac{1}{9}$  או  $x > 1$  קעירות:  $\frac{1}{9} < x < 1$  .  $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{2}\right)$

7. קמירות:  $1.32 < x < \pi$  או  $4.97 < x < 2\pi$  קעירות:  $0 < x < 1.32$  או  $\pi < x < 4.97$

$(4.97, 1.45)$  ,  $(\pi, 0)$  ,  $(1.32, -1.45)$

8. קמירות:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$  קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{6}$  או  $\frac{7\pi}{6} < x < 2\pi$  .  $\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)$  ,  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

9. קמירות:  $x < -3$  או  $x > -1$  קעירות:  $-3 < x < -1$  .  $\left(-3, \frac{10}{e^3}\right)$  ,  $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$

10. קמירות:  $\frac{1}{e} < x < e$  קעירות:  $0 < x < \frac{1}{e}$  או  $x > e$  .  $\left(e, \frac{e}{2}\right)$

11. קמירות:  $0 < x < \frac{1}{2}$  קעירות:  $x > \frac{1}{2}$  .  $\left(\frac{1}{2}, -0.6\right)$

## 56. חקירת הפונקציה

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:  
 א. תחום הגדרה. ב. נקודות חיתוך עם הצירים. ג. נקודות קיצון. ד. תחומי עלייה וירידה.  
 ה. תחומי קמירות וקעורות ונקודות פיתול. ו. אסימפטוטות מאונכות לצירים. ז. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

דוגמה 1.  $y = x^3 - 2x^2 + x$  (ללא סעיף ו').

א. תחום ההגדרה. כל המספרים

ב. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה-y:  $x=0$   $\Leftarrow y=0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$  (0,0)

עם ציר ה-x:  $y=0$   $\Leftarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

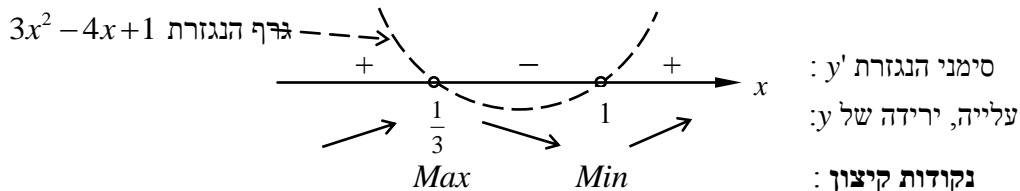
$$x = 1$$

(0,0), (1,0)

ג. נקודות קיצון. נגזרת:  $y' = (x^3 - 2x^2 + x)' = (x^3)' - (2x^2)' + (x)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$

אפסי הנגזרת:  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$  ( $a=3, b=-4, c=1$ )

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$$



$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$$

$$(1, 0)$$

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

תחומי ירידה:

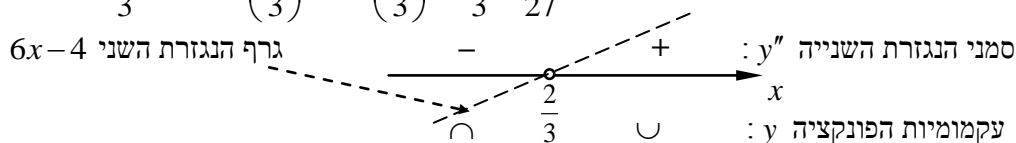
$$x < \frac{1}{3} \quad \text{או} \quad x > 1$$

תחומי עלייה:

ה. עקמומיות ונקודות פיתול. נגזרת שנייה:  $y'' = (y')' = (3x^2 - 4x + 1)' = 6x - 4$

אפסי הנגזרת השנייה:  $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow 6x = \frac{4}{3}$

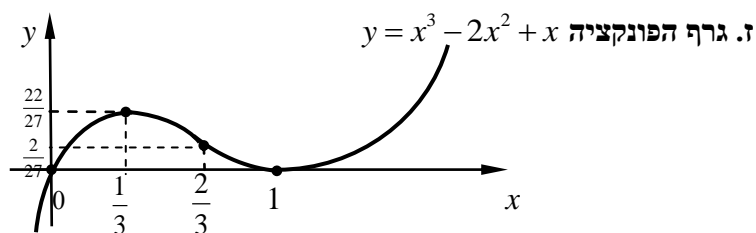
$$x = \frac{2}{3} \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27} = 0.07$$



$$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$$

תחומי קעורות:  $x < 1$

תחומי קמירות:  $x > 1$



דוגמה 2.  $y = \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6}$  (ללא סעיף ה').

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

א. תחום ההגדרה:  $x^2 + x - 6 \neq 0$

$$\boxed{x \neq -3, x \neq 2}$$

$$\boxed{(0, -0.5)}$$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים: עם ציר ה-y:  $x=0: y = \frac{2}{0^2+0-6} = -\frac{1}{3}$

$$\frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} = 0 \Leftrightarrow y=0: x \text{ עם ציר ה-x}$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$\boxed{(1, 0), (-2, 0)}$$

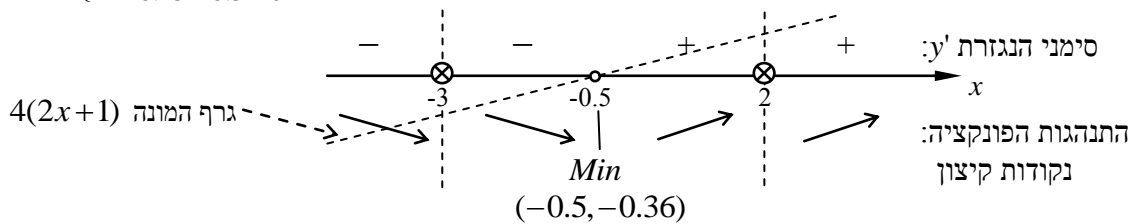
$$x_1 = 1, x_2 = -2$$

ג. נקודות קיצון. נגזרת הפונקציה:

$$y' = \left( \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} \right)' = \left( \frac{-x^2-x+6-4}{x^2+x-6} \right)' = \left( -1 - \frac{4}{x^2+x-6} \right)' = 0 + \frac{4 \cdot (x^2+x-6)'}{(x^2+x-6)^2} = \frac{4 \cdot (2x+1-0)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{4(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

$$2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = 0 \text{ אפסי הנגזרת:}$$

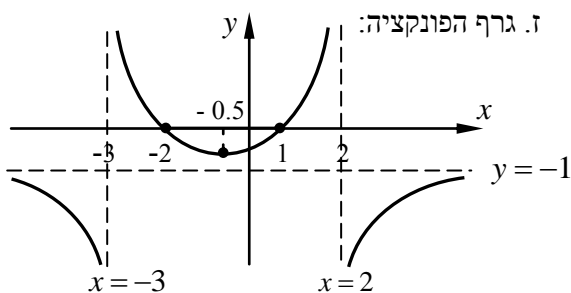
$$\begin{cases} x = -0.5 \\ y = \frac{2+0.5-0.25}{0.25-0.5-6} = -0.36 \end{cases}$$



1. אסימפטוטות. הישר  $x=2$  הוא אסימפטוטה אנכית  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} = \frac{-4}{0} = \infty$

הישר  $x=-3$  הוא אסימפטוטה אנכית  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} = \frac{-4}{0} = \infty$

הישר  $y=-1$  הוא אסימפטוטה אופקית  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x-x^2}{x^2+x-6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{-x^2}{x^2} \right] = -1$



תשובה: א. תחום ההגדרה:  $x \neq -3, x \neq 2$   
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -\frac{1}{3}), (1, 0), (-2, 0)$   
 ג. נקודות קיצון: Min  $(-0.5, -0.36)$

ד. תחומי עלייה:  $x < -3, -3 < x < -0.5$

תחומי ירידה:  $-0.5 < x < 2, x > 2$

1. אסימפטוטות:  $x = -3, x = 2, y = -1$



דוגמה 3.  $f(x) = x^2\sqrt{9-x}$  (ללא סעיף ו').

א. תחום ההגדרה.  $9-x \geq 0$

$$-x \geq -9 \quad /:(-1)$$

$$\boxed{x \leq 9}$$

יש למצוא את ערך הפונקציה בקצה של תחום ההגדרה  $f(9) = 9^2 \cdot \sqrt{9-9} = 0$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה-y:  $x=0$   $f(0) = 0^2 \cdot \sqrt{9-0} = 0$   $\leftarrow$   $\boxed{(0,0)}$

עם ציר ה-x:  $y=0$

$$x^2\sqrt{9-x} = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{או} \quad \sqrt{9-x} = 0$$

$$x = 9 \quad \quad \quad x = 9$$

$$\boxed{(0,0), (9,0)}$$

ג. התנהגות הפונקציה ונקודות קיצון.

נגזרת הפונקציה:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sqrt{9-x} + x^2 (\sqrt{9-x})' = 2x \cdot \sqrt{9-x} + x^2 \cdot \frac{(9-x)'}{2\sqrt{9-x}} = 2x \cdot \sqrt{9-x} + x^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}$$

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (9-x) - x^2}{2\sqrt{9-x}} = \frac{36x - 4x^2 - x^2}{2\sqrt{9-x}} = \frac{36x - 5x^2}{2\sqrt{9-x}}$$

$$\frac{36x - 5x^2}{2\sqrt{9-x}} = 0 \quad \leftarrow \quad y' = 0 \quad \text{אפסי הנגזרת:}$$

$$36x - 5x^2 = 0$$

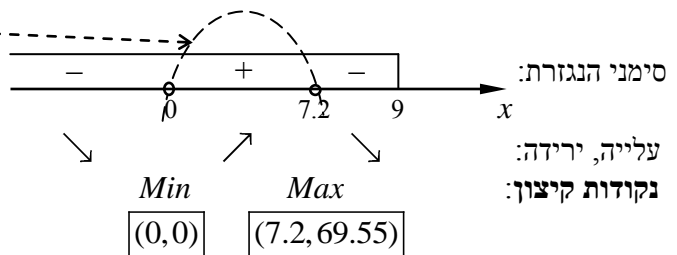
$$x(36 - 5x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{או} \quad 36 - 5x = 0$$

$$\begin{cases} x = 7.2 \\ y = 58.84\sqrt{1.8} = 69.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7.2 \\ y = 58.84\sqrt{1.8} = 69.55 \end{cases}$$

גרף המונה של הנגזרת  $36x - 5x^2$



ד. תחומי עלייה:  $\boxed{0 < x < 7.2}$

תחומי ירידה:  $\boxed{x < 0, 7.2 < x < 9}$

ה. עקמומיות ונקודות פיתול של הפונקציה.

נגזרת שנייה של הפונקציה:

$$y'' = \left( \frac{36x - 5x^2}{2\sqrt{9-x}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(36x - 5x^2)' \cdot \sqrt{9-x} - (36x - 5x^2)(\sqrt{9-x})'}{(\sqrt{9-x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(36 - 10x) \cdot \sqrt{9-x} - (36x - 5x^2) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{(\sqrt{9-x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(36 - 10x) \cdot \sqrt{9-x} - (36x - 5x^2) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{(\sqrt{9-x})^2} \cdot \frac{2\sqrt{9-x}}{2\sqrt{9-x}}$$

$$y'' = \frac{2(36 - 10x)(9 - x) + (36x - 5x^2)}{4(9 - x)\sqrt{9 - x}} = \frac{15x^2 - 216x + 648}{4(9 - x)\sqrt{9 - x}}$$

$$\frac{15x^2 - 216x + 648}{4(9 - x)\sqrt{9 - x}} = 0 \quad y'' = 0 \quad \text{אפסי הנגזרת השנייה:}$$

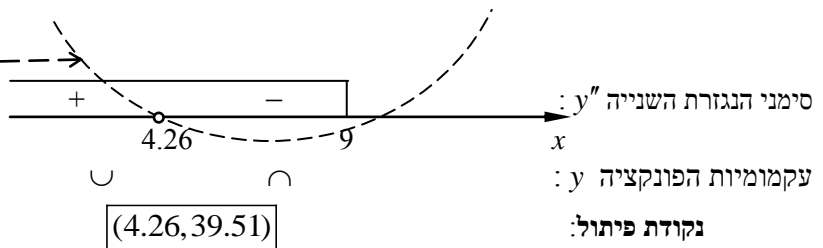
$$(a = 15, b = -216, c = 648) \quad 15x^2 - 216x + 648 = 0$$

$$x_1 = 10.14, x_2 = 4.26 \rightarrow y = 4.26^2 \sqrt{9 - 4.26} = 39.51$$

(10.14 > 9)

לא בתחום ההגדרה

גרף הפרבולה  $15x^2 - 216x + 648$



סימני הנגזרת השנייה  $y''$ :

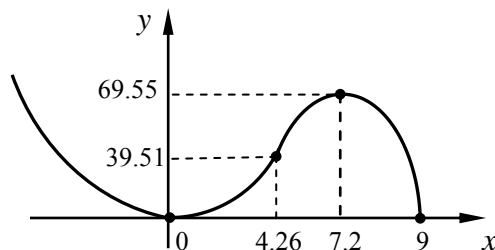
עקמומיות הפונקציה  $y$ :

נקודת פיתול:

$$4.26 < x < 9 \quad \text{קערות כלפי מטה} \quad \cap$$

$$x < 4.26 \quad \text{קערות כלפי מעלה} \quad \cup$$

ז. גרף הפונקציה



דוגמה 4.  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x}$

א. תחום ההגדרה: כל המספרים ( $e^x > 0$  לכל  $x$ )

ב. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה-y:  $x=0$ ,  $y = \frac{0^2 - 6 \cdot 0 + 9}{e^0} = \frac{9}{1} = 9$ ,  $(0, 9)$

עם ציר ה-x:  $y=0$ ,  $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x} = 0$

$(3, 0)$   $x=3$

ג. התנהגות הפונקציה ונקודות קיצון.

נגזרת:

$$y' = \left( \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x} \right)' = \frac{(2x - 6)e^x - (x^2 - 6x + 9)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - 6 - x^2 + 6x - 9}{e^x} = \frac{-x^2 + 8x - 15}{e^x}$$

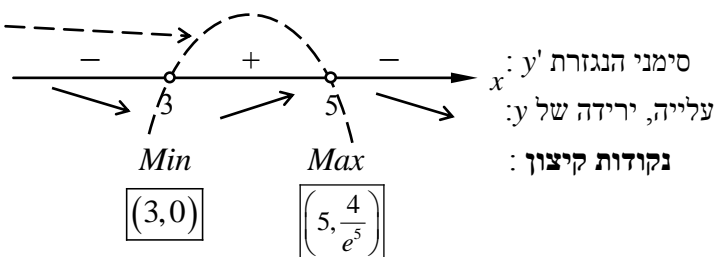
אפסי הנגזרת:  $y' = 0$

$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y = \frac{9-18+9}{e^3} = 0 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x=5 \\ y = \frac{25-30+9}{e^5} = \frac{4}{e^5} = 0.03 \end{cases}$$

גרף המונה של הנגזרת:  $-x^2 + 8x - 15$



ד. תחומי עלייה:  $3 < x < 5$

תחומי ירידה:  $x < 3$  או  $x > 5$

ה. תחומי קמירות, קערות ונקודות פיתול.

נגזרת שנייה של הפונקציה:

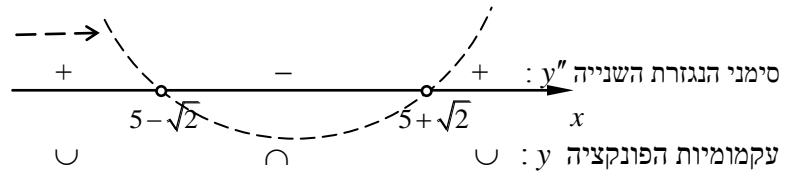
$$y'' = \left( \frac{-x^2 + 8x - 15}{e^x} \right)' = \frac{(-2x + 8)e^x - (-x^2 + 8x - 15)e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(x^2 - 10x + 23)}{(e^x)^2} = \frac{x^2 - 10x + 23}{e^x}$$

אפסי הנגזרת השנייה:  $y'' = 0$

$$x^2 - 10x + 23 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 + \sqrt{2} = 6.41 \\ y_1 = 0.01 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5 - \sqrt{2} = 3.59 \\ y_2 = 0.02 \end{cases}$$

גרף המונה  $x^2 - 10x + 23$



$$(5 - \sqrt{2}, 0.01)$$

$$(5 + \sqrt{2}, 0.02)$$

נקודות פיתול:

$$5 - \sqrt{2} < x < 5 + \sqrt{2} : \cap \text{ קערות כלפי מטה}$$

$$x < 5 - \sqrt{2} \vee x > 5 + \sqrt{2} : \cup \text{ קערות כלפי מעלה}$$

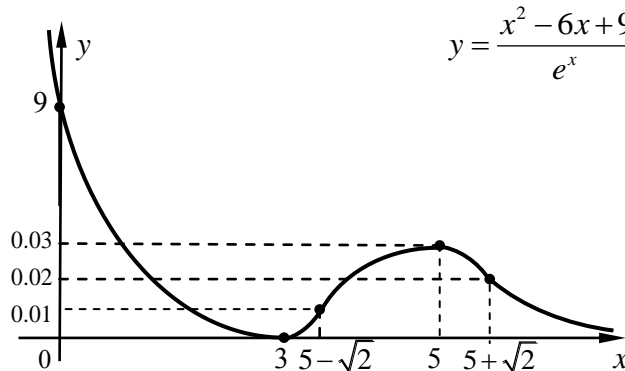
1. אסימפטוטות.

איך אסימפטוטה אנכית (תחם ההגדרה:  $\mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x} = \frac{\infty}{0} = \infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty \text{ אף אסימפטוטה אופקית כאשר}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 6x + 9)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 6)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

הוא אסימפטוטה אופקית כאשר  $x \rightarrow +\infty$   $y = 0$



1. גרף הפונקציה  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{e^x}$

דוגמה 5. נתונה בפונקציה  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$  (ללא סעיף ו').

א. תחום ההגדרה.  $x^2 + 4 > 0$

$\mathbb{R}$  (לכל  $x : x^2 \geq 0$ )

$(0, \ln 4)$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה- $y$ :  $x = 0 \iff f(0) = \ln 4 = 1.39$

עם ציר ה- $x$ :  $y = 0 \iff \ln(x^2 + 4) = 0$

$$x^2 + 4 = 1$$

$$x^2 = -3$$

אין פתרונות

אין

ג. התנהגות הפונקציה ונקודות קיצון.

נגזרת:  $y' = \ln(x^2 + 4) = \frac{1}{x^2 + 4} \cdot (x^2 + 4)'$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

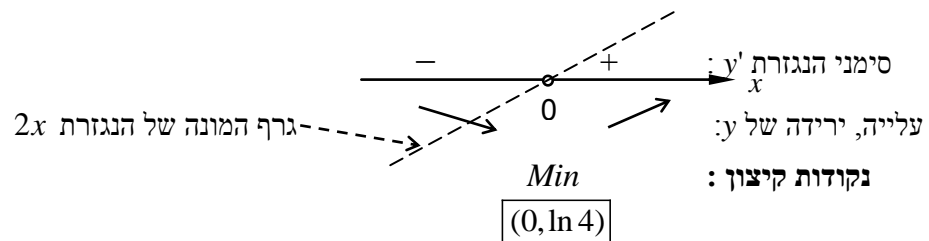
אפסי הנגזרת:  $f'(x) = 0$

$$\frac{2x}{x^2 + 4} = 0$$

$$2x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(0) = \ln(0^2 + 4) = \ln 4 = 1.39 \end{cases}$$



ד. תחומי עלייה:  $x > 0$

תחומי ירידה:  $x < 0$

ה. תחומי קמירות, קערות ונקודות פיתול.

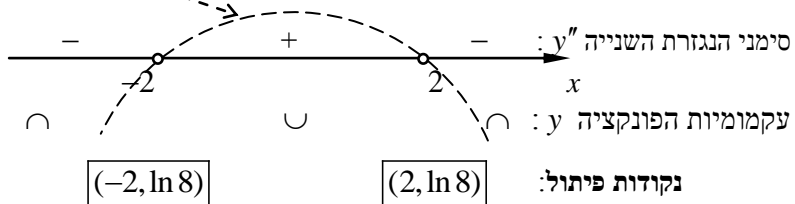
נגזרת שנייה של הפונקציה:  $y'' = \left( \frac{2x}{x^2 + 4} \right)' = \frac{2 \cdot (x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-2x^2 + 8}{(x^2 + 4)^2}$

אפסי הנגזרת השנייה:  $y'' = 0$

$$-2x^2 + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = \ln 8 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = \ln 8 = 2.08 \end{cases}$$

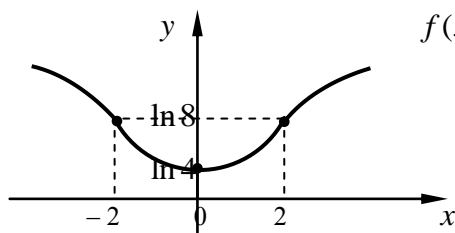
גרף המונה של הנגזרת השנייה:  $-2x^2 + 8$



קערות כלפי מטה  $\cap$ :  $x < -2 \vee x > 2$

קערות כלפי מעלה  $\cup$ :  $-2 < x < 2$

1. גרף הפונקציה  $f(x) = \ln(x^2 + 4)$



דוגמה 6. נתונה הפונקציה  $f(x) = 8\sin^2 x - \cos 4x$  בתחום  $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$  (ללא סעיף ו').

א. תחום ההגדרה.  $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

ערכי הפונקציה בקצוות הקטע:  $f(0) = 8\sin^2 0 - \cos 0 = -1$   
 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 8\sin^2 \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{10\pi}{3} = 2.5$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה-y:  $x = 0 \iff f(0) = 8\sin^2 0 - \cos 0 = -1 \implies (0, -1)$

עם ציר ה-x:  $y = 0 \iff 8\sin^2 x - \cos 4x = 0$   
 $8 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - (\cos^2 2x - 1) = 0$   
 $4 - 4\cos 2x - \cos^2 2x + 1 = 0$   
 $4\cos^2 2x + 4\cos 2x - 5 = 0$   
 $(a = 4, b = 4, c = -5)$   
 $\cos 2x = -1.725$  או  $\cos 2x = 0.727$

$2x = \pm 0.757 + 2\pi k$   
 $x = \pm 0.378 + \pi k$

$(0.378, 0)$   $x = 0.378 \left( 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \right)$

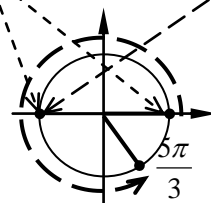
ג. התנהגות הפונקציה ונקודות קיצון.

נגזרת הפונקציה:  $f'(x) = (8\sin^2 x - \cos 4x)' = 16\sin x \cdot (\sin x)' - (-\sin 4x) \cdot (4x)' = 16\sin x \cdot \cos x + 4\sin 4x$

אפסי הנגזרת:  $16\sin x \cdot \cos x + 4\sin 4x = 0$   
 $8\sin 2x + 8\sin 2x \cos 2x = 0$   
 $8\sin 2x(1 + \cos 2x) = 0$   
 $\sin 2x = 0$  או  $1 + \cos 2x = 0$   
 $\cos 2x = -1$

$0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

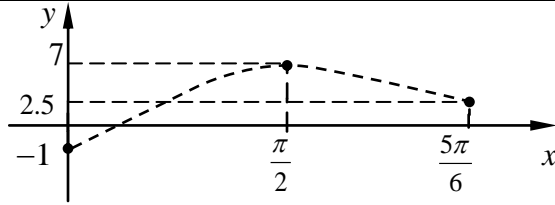
$0 \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3}$



$\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$

$2x = \pi$  או  $2x = 0$   
 $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = 8\sin^2 \frac{\pi}{2} - \cos 2\pi = 7 \end{cases}$   $\begin{cases} x = 0 \\ y = 8\sin^2 0 - \cos 0 = -1 \end{cases}$

מספיק לסמן את הנקודות בהן הנגזרת שווה ל-0 וקצוות הקטע הנתון:  $(0, -1)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$ ,  $\left(\frac{5\pi}{6}, 2.5\right)$  ולחבר אותן.



נקודות קיצון:  $Min(0, -1)$   $Max\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$   $Min\left(\frac{5\pi}{6}, 2.5\right)$

ד. תחומי העלייה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי הירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$

ה. תחומי קמירות, קערות ונקודות פיתול.

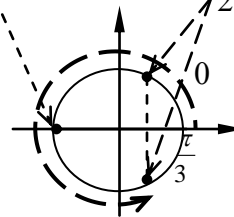
נגזרת שנייה של הפונקציה:  $f''(x) = (16 \sin x \cdot \cos x + 4 \sin 4x)' = (8 \sin 2x + 4 \sin 4x)' = 8 \cos 2x \cdot 2 + 4 \cos 4x \cdot 4$   
 $f''(x) = 16 \cos 2x + 16 \cos 4x$

אפסי הנגזרת השנייה:  $16 \cos 2x + 16 \cos 4x = 0$

$$\cos 2x + \underbrace{\cos 4x}_{2 \cos^2 2x - 1} = 0$$

$$2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = -1 \quad \text{או} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$



$$0 \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \quad /:2$$

$$0 \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} \quad /:2 \quad \text{או} \quad 2x = \pi \quad /:2 \quad \text{או} \quad 2x = \frac{\pi}{3} \quad /:2$$

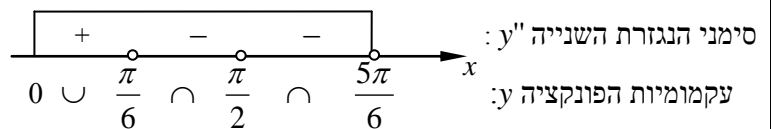
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \\ y = 2.5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = 8 \sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2\pi}{3} = 2.5 \end{cases}$$

$$f''(x) = 16 \cos 2x + 16 \cos 4x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

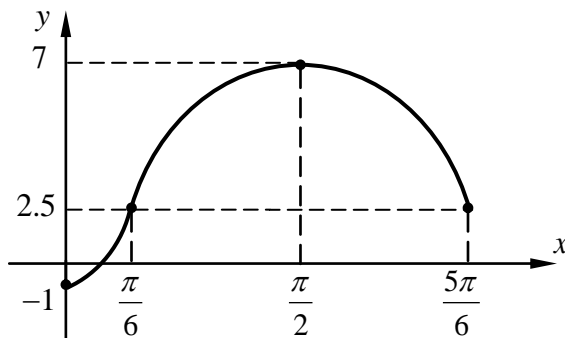


$$\left(\frac{\pi}{6}, 2.5\right)$$

נקודות פיתול:

קערות כלפי מעלה:  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , קערות כלפי מטה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

ז. גרף הפונקציה:





תרגילים.

- חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים : א. תחום הגדרה. ב. נקודות חיתוך עם הצירים.  
 ג. נקודות קיצון. ד. תחומי עלייה ירידה.  
 ה. תחומי קמירות וקערות ונקודות פיתול  
 ו. אסימפטוטות מאונכות לצירים.  
 ז. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

1.  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$  (ללא סעיף ו'). 2.  $y = 8x^2 - x^4 - 16$  (ללא סעיף ו').

3.  $y = \frac{x}{4} + \frac{9}{x}$  4.  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x}$  (ללא סעיף ה')

5.  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$  (ללא סעיף ה') 6.  $y = \frac{3(x-3)}{(x+3)(x^2 - 5x + 6)}$  (ללא סעיף ה')

7.  $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$  8.  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

9.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$  10.  $f(x) = x\sqrt{4-x}$

11.  $y = \frac{e^x}{(e^x + 2)^2}$  (ללא סעיף ה') 12.  $y = (x^2 - 3)e^x$

13.  $y = \frac{e^{2x} + 4e^x + 3}{(e^x - 3)^2}$  (ללא סעיף ה') 14.  $y = \frac{-4e^x}{2+x}$

15.  $f(x) = \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}$  16.  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}$

17.  $y = \sin^4 x - \cos^4 x + 1$  בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$

18.  $y = \tan^2 x - 3$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$

19.  $y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$

## תרגילים נוספים בחקירת פונקציות

דוגמה 7. נתונה הפונקציה  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ , המוגדרת בקטע סגור  $[-1, 2]$   $(-1 \leq x \leq 2)$ .

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. רשום את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ב. מצא את נקודת מינימום מוחלט ואת נקודת מקסימום מוחלט של הפונקציה בקטע הנתון.
- ג. מצא את נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציה בקטע הנתון.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. נקודות חיתוך עם הצירים. עם ציר ה- $y$ :  $x = 0$

$$(0,0) \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 = 0^5 - 5 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 = 0$$

$$x^5 - 5x^4 + 5x^3 = 0 \quad \text{עם ציר ה-}x: y = 0$$

$$x^3(x^2 - 5x + 5) = 0 \quad (\text{הוצאת גורם משותף } x^3)$$

$$x^3 = 0 \quad \text{או} \quad x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$(0,0), (1.38,0) \quad x = 0 \quad x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = 5.59, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = 1.38$$

(לא בתחום)

ב.ג. נגזרת:  $y' = (x^5 - 5x^4 + 5x^3)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

$$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \quad y' = 0 \quad \text{אפסי הנגזרת:}$$

$$5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$5x^2 = 0 \quad \text{או}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 1, \quad x = 3 \quad (\text{לא בתחום})$$

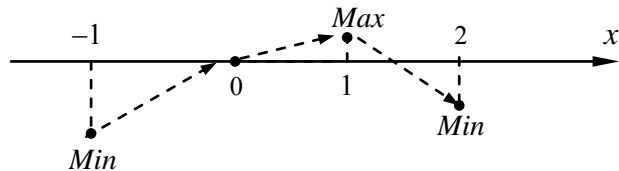
ערכי הפונקציה בקצוות הקטע הנתון ובנקודות האפס של הנגזרת, הנמצאות בקטע הנ"ל:  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$

$$f(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^4 + 5 \cdot (-1)^3 = -11 \quad \text{מינימום מוחלט}$$

$$f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 = 0$$

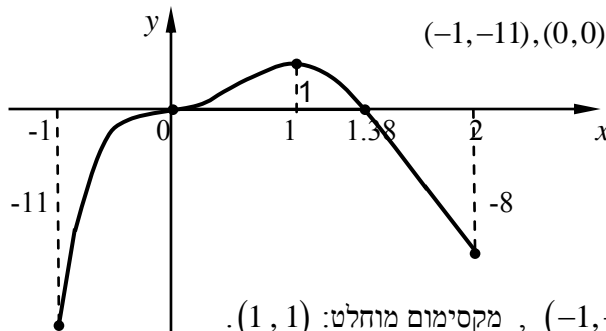
$$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 = 1 \quad \text{מקסימום מוחלט}$$

$$f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^3 = -8$$



ג. נשרטט את סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון על ידי הנקודות הבאות:

$$(-1, -11), (0, 0), (1, 1), (1.38, 0), (2, -8)$$



תשובה: א.  $(0,0), (1.38,0)$ . ב. מינימום מוחלט:  $(-1, -11)$ , מקסימום מוחלט:  $(1, 1)$ .

ג.  $Min(-1, -11), Max(1, 1), Min(2, -8)$ .

## תרגילים.

חקור את הפונקציות הבאות (תרגילים 20, 21) לפי הסעיפים הבאים:

- רשום את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודת מינימום מוחלט ואת נקודת מקסימום מוחלט של הפונקציה בקטע הנתון.
- מצא את נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציה בקטע הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

20. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-6x+9}$ , המוגדרת בקטע סגור  $[-2, 2]$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ).

21. נתונה הפונקציה  $y = x^2 e^x$ , המוגדרת בקטע סגור  $[-3, 1]$  ( $-3 \leq x \leq 1$ ).

22. נתונה הפונקציה  $y = \frac{e^{2x} + 4e^x + 3}{(e^x - 3)^2}$ .

היעזר בגרף הפונקציה (תרגיל 13) ומצא עבור אילו ערכים של  $k$ :

- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  יש נקודה משותפת אחת.
- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  תהיינה שתי נקודות משותפות.
- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  אין אף נקודות משותפות.

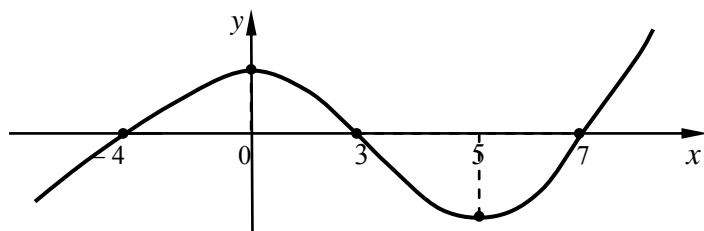
23. נתונה הפונקציה  $y = \frac{3(x-3)}{(x+3)(x^2-5x+6)}$ .

מוסיפים לסקיצה של גרף הפונקציה (תרגיל 6) את הישר  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של  $k$ :

- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  יש נקודה משותפת אחת.
- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  תהיינה שתי נקודות משותפות.
- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  תהיינה שלוש נקודות משותפות.
- לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  אין אף נקודה משותפת נקודות משותפות.

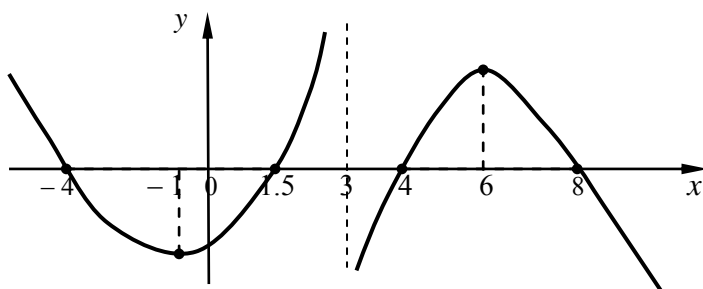
24. נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$ . היעזר בגרף הפונקציה (תרגיל 5) שרטט גרף הפונקציה  $y = \left| \frac{x^2-4}{x^2-3x-4} \right|$ .

25.  $y = \tan^2 x - 3$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ . היעזר בגרף הפונקציה (תרגיל 18) שרטט גרף הפונקציה  $y = |\tan^2 x - 3|$ .



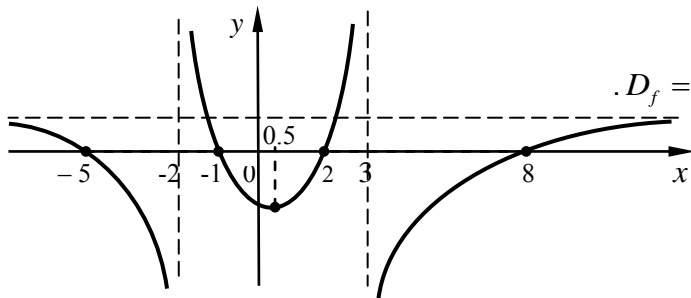
26. נתון גרף של  $y = f'(x)$ .

- מצא תחומי העלייה, הירידה.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון.
- מצא תחומי הקערות, קמירות.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הפיתול.



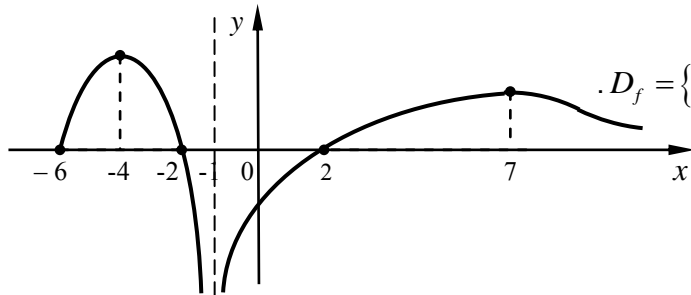
27. נתון גרף של  $y = f'(x)$ .  $D_f = \{x | x \neq 3\}$ .

- מצא תחומי העלייה, הירידה.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון.
- מצא תחומי הקערות, קמירות.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הפיתול.



28. נתון גרף של  $y = f'(x)$ .  $D_f = \{x | x \neq -2 \wedge x \neq 3\}$ .

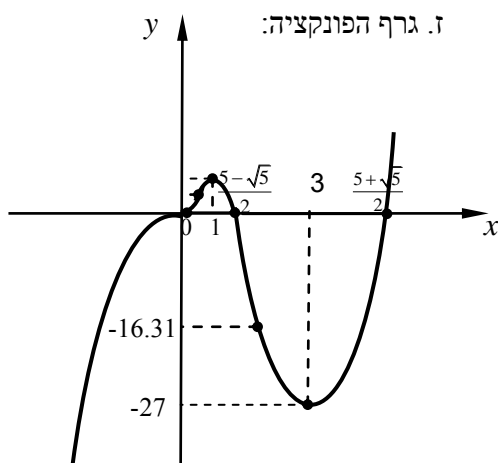
- מצא תחומי העלייה, הירידה.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון.
- מצא תחומי הקערות, קמירות.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הפיתול.



29. נתון גרף של  $y = f'(x)$ .  $D_f = \{x | x \geq -6 \wedge x \neq -1\}$ .

- מצא תחומי העלייה, הירידה.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון.
- מצא תחומי הקערות, קמירות.
- מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הפיתול.

### תשובות.



1. א. תחום ההגדרה: כל המספרים

ב. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה

עם הצירים:  $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, 0\right), (0,0), \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

ג. נקודות קיצון:  $Max(1,1), Min(3,-27)$

ד. תחומי העלייה:  $x < 0, 0 < x < 1, x > 3$

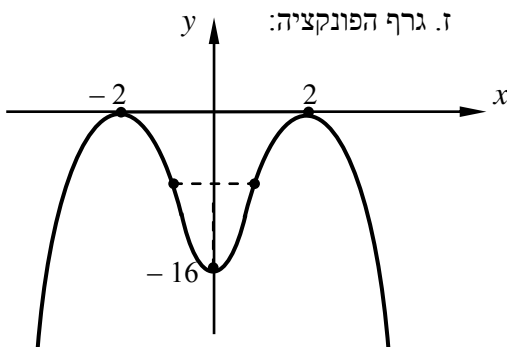
תחומי הירידה:  $1 < x < 3$

ה. תחום הקמירות:  $0 < x < \frac{3-\sqrt{3}}{2}, x > \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

תחום הקערות:  $x < 0, \frac{3-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

נקודות פיתול:  $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, 0.570\right), (0,0), \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, -16.31\right)$

הערה.  $\frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1.382, \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 3.618, \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0.634, \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 2.367$



2. א. תחום ההגדרה:  $\mathbb{R}$  (כל הנספרים)

ב. נקודת חיתוך עם הצירים:  $(-2,0), (2,0), (0,-16)$

ג. נקודות קיצון:  $Max(-2,0), Min(0,0), Max(2,0)$

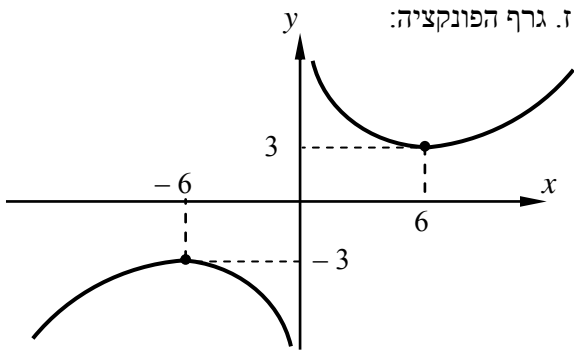
ד. תחומי העלייה:  $x < -2 \vee 0 < x < 2$

תחומי הירידה:  $-2 < x < 0 \vee x > 2$

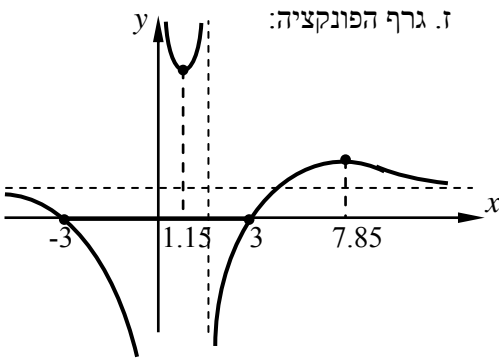
ה. תחומי קמירות:  $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$

תחום קערות:  $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}, x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$

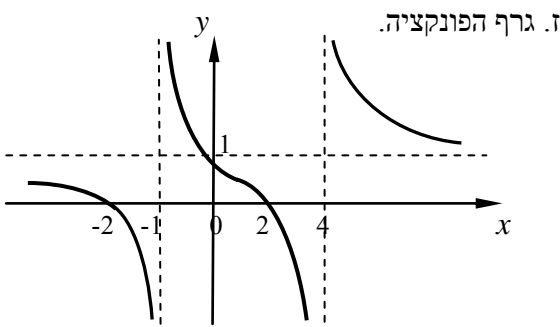
נקודות פיתול:  $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -7\frac{1}{9}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -7\frac{1}{9}\right)$



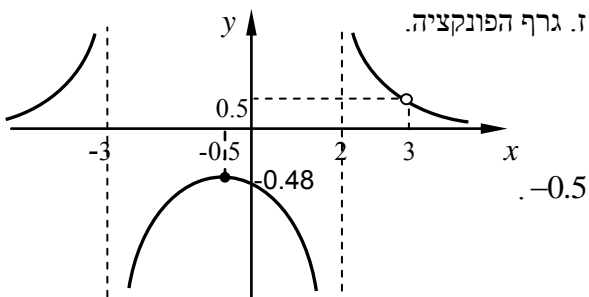
3. א. תחום ההגדרה:  $x \neq 0$ .  
 ב. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים: אין.  
 ג. נקודות קיצון:  $Max(-6, -3)$ ,  $Min(6, 3)$ .  
 ד. תחומי העלייה:  $x < -6$  או  $x > 6$ .  
 תחומי הירידה:  $-6 < x < 0$  או  $0 < x < 6$ .  
 ה. תחום הקמירות:  $x > 0$ ; תחום הקערות:  $x < 0$ .  
 ו. אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ .



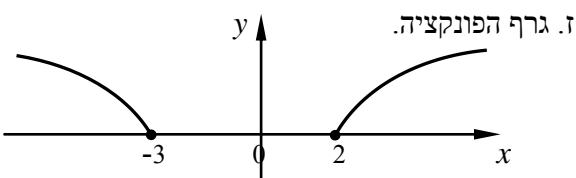
4. א. תחום ההגדרה:  $x < 0$  או  $0 < x < 2$  או  $x > 2$ .  
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-3, 0)$ ,  $(3, 0)$ .  
 ג. נקודות קיצון:  $Min(1.15, 7.85)$ ,  $Max(7.85, 1.15)$ .  
 ד. תחומי העלייה:  $1.15 < x < 2$  או  $2 < x < 7.85$ .  
 תחומי הירידה:  $x < 0$  או  $0 < x < 1.15$  או  $x > 7.85$ .  
 ו. אסימפטוטות:  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .



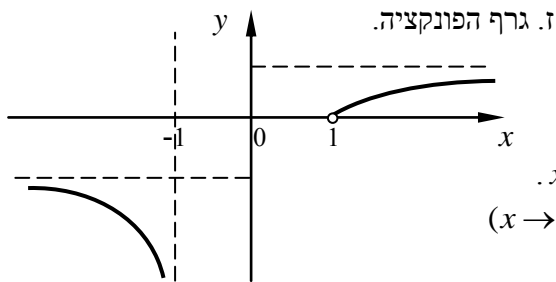
5. א. תחום ההגדרה:  $x \neq -1$ ,  $x \neq 4$ .  
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ .  
 ג. נקודות קיצון: אין.  
 ד. תחומי עלייה: אין.  
 תחומי ירידה:  $x < -1$ ,  $-1 < x < 4$ ,  $x > 4$ .  
 ו. אסימפטוטות:  $y = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 4$ .



6. א. תחום ההגדרה:  $x \neq \pm 3$ ,  $x \neq 2$ .  
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -0.5)$ .  
 ג. נקודות קיצון:  $Max(-0.5, -0.48)$ .  
 ד. תחומי עלייה:  $-3 < x < -0.5$  או  $x > 3$ .  
 תחומי ירידה:  $-0.5 < x < 2$  או  $2 < x < 3$ .  
 ו. אסימפטוטות:  $y = 0$ ,  $x = -3$ ,  $x = 2$ .



7. א. תחום ההגדרה:  $x \leq -3$ ,  $x \geq 2$ .  
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -3)$ ,  $(0, 2)$ .  
 ג. נקודות קיצון:  $Min(-3, 0)$ ,  $Min(2, 0)$ .  
 ד. תחומי עלייה:  $x > 2$ , תחומי ירידה:  $x < -3$ .  
 ה. תחום הקמירות:  $x > 2$ ; תחום הקערות:  $x < -3$ .  
 ו. אין אסימפטוטות.



8. א. תחום ההגדרה:  $x < -1 \vee x > 1$

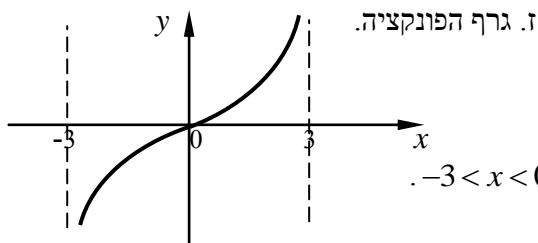
ב. נקודות חיתוך עם הצירים: אין

ג. נקודות קיצון: אין

ד. תחומי עלייה:  $x > 1$ , תחומי ירידה:  $x < -1$ .

ה. תחום הקמירות  $\cup$ : אין. תחום הקערות  $\cap$ :  $x < -1, x > 1$ .

ו. אסימפטוטות:  $x = -1, x = 1, y = 1, y = -1$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), ( $x \rightarrow +\infty$ )



9. א. תחום ההגדרה:  $-3 < x < 3$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$

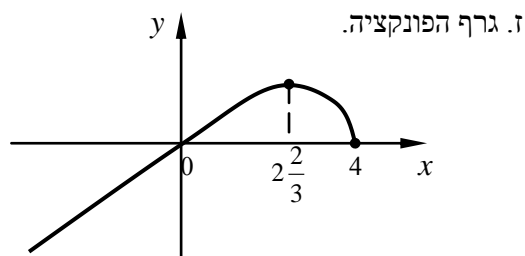
ג. נקודות קיצון: אין

ד. תחומי עלייה:  $-3 < x < 3$ , תחומי ירידה: אין.

ה. תחום הקמירות  $\cup$ :  $0 < x < 3$ . תחום הקערות  $\cap$ :  $-3 < x < 0$ .

נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .

ו. אסימפטוטות:  $x = -3, x = 3$ .



10. א. תחום ההגדרה:  $x \leq 4$

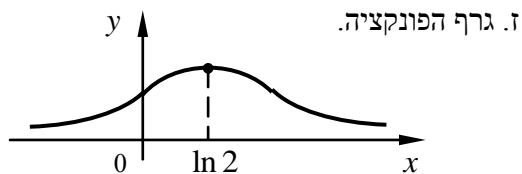
ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 0), (4, 0)$

ג. נקודות קיצון:  $Max\left(2\frac{2}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), Min(4, 0)$

ד. תחומי עלייה:  $x < 2\frac{2}{3}$ , תחומי ירידה:  $2\frac{2}{3} < x \leq 4$

ה. תחום הקמירות  $\cup$ : אין. תחום הקערות  $\cap$ :  $x \leq 4$ .

ו. אסימפטוטות: אין.



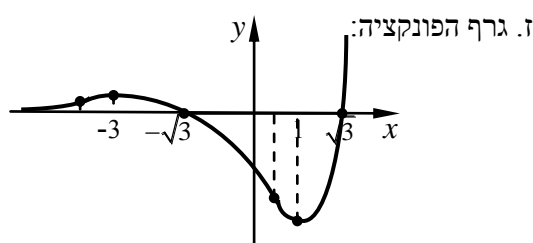
11. א. תחום ההגדרה:  $\mathbb{R}$  (כל המספרים)

ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, \frac{1}{9})$

ג. נקודות קיצון:  $Max(\ln 2, 0.125)$

ד. תחומי עלייה:  $x < \ln 2$ , תחומי ירידה:  $x > \ln 2$ .

ו. אסימפטוטות:  $y = 0$ .



12. א. תחום ההגדרה:  $\mathbb{R}$  (כל המספרים)

ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0), (0, -3)$

ג. נקודות קיצון:  $Max(-3, 6e^{-3}), Min(1, -2e)$

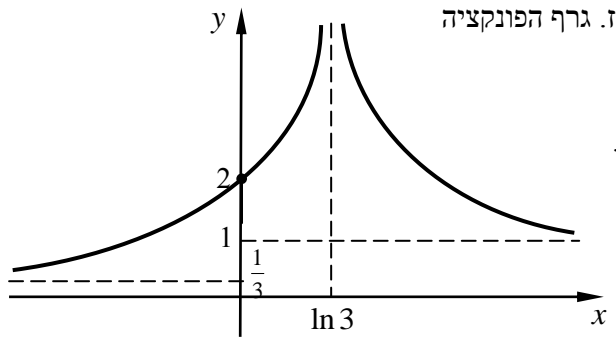
ד. תחומי עלייה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , תחומי ירידה:  $-3 < x < 1$ .

ה. תחום הקמירות  $\cup$ :  $x > -2 + \sqrt{5}, x < -2 - \sqrt{5}$ .

תחום הקערות  $\cap$ :  $-2 - \sqrt{5} < x < -2 + \sqrt{5}$

נקודות פיתול:  $(-2 - \sqrt{5}, 0.22), (-2 + \sqrt{5}, -3.72)$

ו. אסימפטוטות:  $y = 0$ , כאשר  $x$  שואף ל- $-\infty$ .



13. א.  $x \neq \ln 3$  ( $x \neq 1.1$ )

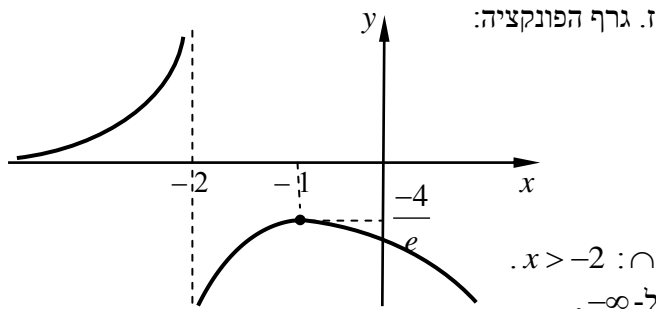
ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, 2)$

ג. נקודות קיצון: אין.

ד. תחומי עלייה:  $x < \ln 3$ , תחומי ירידה:  $x > \ln 3$ .

ו. אסימפטוטות:  $x = \ln 3$ ,

$(x \rightarrow -\infty) y = \frac{1}{3}, (x \rightarrow +\infty) y = 1$



14. א.  $x \neq -2$

ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0, -2)$

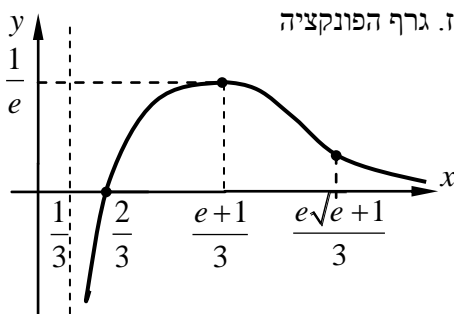
ג. נקודות קיצון:  $Max\left(-1, \frac{-4}{e}\right)$

ד. תחומי עלייה:  $-2 < x < -1$  או  $x < -2$

תחומי ירידה:  $x > -1$

ה. תחום הקמירות:  $x < -2$ . תחום הקעירות:  $x > -2$ .

ו. אסימפטוטה:  $x = -2$ . כאשר  $x$  שואף ל- $-\infty$ .



15. א. תחום ההגדרה:  $x > \frac{1}{3}$

ב. נקודת חיתוך עם הצירים:  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

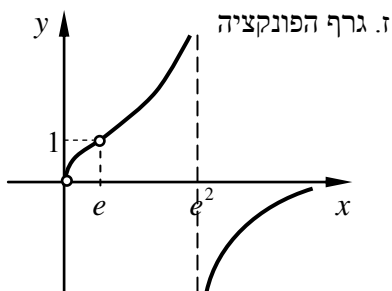
ג. נקודות קיצון:  $Max\left(\frac{e+1}{3}, \frac{1}{e}\right)$

ד. תחומי העלייה:  $\frac{1}{3} < x < \frac{e+1}{3}$ . תחומי הירידה:  $x > \frac{e+1}{3}$ .

ו. אסימפטוטות:  $x = \frac{1}{3}$ , כאשר  $x$  שואף ל- $+\infty$ .

ה. תחום הקמירות:  $x > \frac{e\sqrt{e}+1}{3}$ . תחום הקעירות:  $\frac{1}{3} < x < \frac{e\sqrt{e}+1}{3}$

נקודת פיתול:  $\left(\frac{e\sqrt{e}+1}{3}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$



16. א. תחום ההגדרה:  $0 < x < e \vee e < x < e^2 \vee x > e^2$

ב. נקודת חיתוך עם הצירים: אין. נקודות קיצון: אין.

ד. תחומי העלייה:  $0 < x < e \vee e < x < e^2 \vee x > e^2$

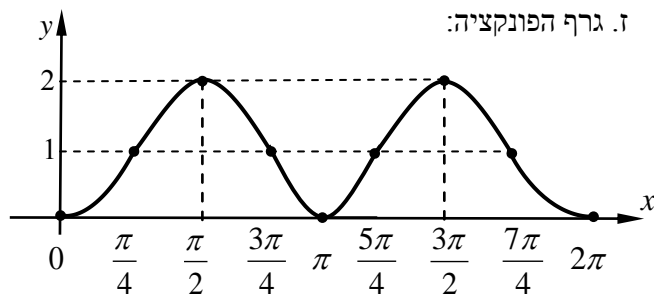
תחומי הירידה: אין.

ה.  $0 < x < 1 \vee x > e^2$ :  $\cap$ .  $1 < x < e \vee e < x < e^2$ :  $\cup$

נקודת פיתול:  $(1, 0.5)$

ו. אסימפטוטות:  $x = e^2$ , כאשר  $x$  שואף ל- $+\infty$ .

הערה. "חורים":  $(0, 0), (e, 1)$ .



17. א. תחום ההגדרה:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$ .  
 ג. נקודות קיצון:  $Min(0,0), Max\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), Min(\pi,0), Max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right), Min(2\pi,0)$ .

- ד. תחומי העלייה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ . תחומי הירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .  
 ה. תחומי  $\cup$ :  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi$ . תחום  $\cap$ :  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ .  
 נקודות פיתול:  $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$ .

18. א.  $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \vee -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ .

- ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,-3), \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ .

- ג. נקודות קיצון:  $Min(-\pi, -3), Min(0, -3), Min(\pi, -3)$ .

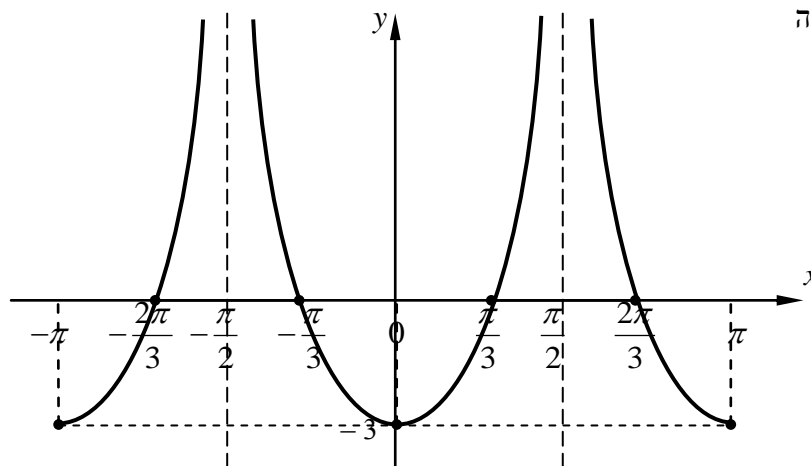
- ד. תחומי עלייה:  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \vee 0 < x < \frac{\pi}{2}$ . תחומי ירידה:  $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \vee \frac{\pi}{2} < x < \pi$ .

- ה. תחום הקמירות  $\cup$ :  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ . תחום הקעירות  $\cap$ : אין.

נקודות פיתול: אין.

- ו. אסימפטוטות:  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ .

ז. גרף הפונקציה





19. א.  $0 \leq x \leq \pi$ .

ב. נקודות חיתוך עם הצירים:  $(0,1)$ ,  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ,  $(\frac{11\pi}{12}, 0)$

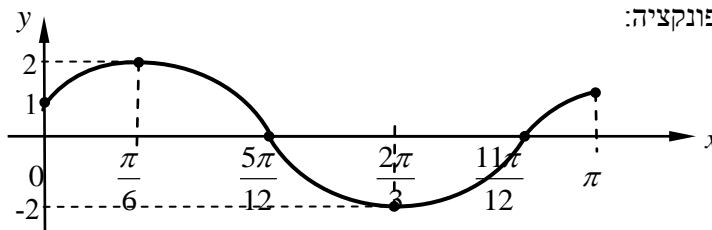
ג. נקודות קיצון:  $Min(0,1)$ ,  $Max(\frac{\pi}{6}, 2)$ ,  $Min(\frac{2\pi}{3}, -2)$ ,  $Max(\pi, 1)$

ד. תחומי עליה:  $0 < x < \frac{\pi}{6}$   $\vee$   $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ . תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ .

ה. תחום הקמירות:  $\cup$ :  $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$ . תחום הקעורות:  $\cap$ :  $0 < x < \frac{5\pi}{12}$ ,  $\frac{11\pi}{12} < x < \pi$ .

נקודות פיתול:  $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ,  $(\frac{11\pi}{12}, 0)$

ז. גרף הפונקציה:

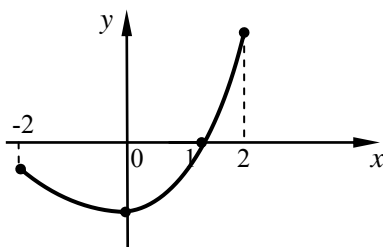


20. א. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון:  $(1, 0)$ ,  $(0, -\frac{1}{9})$ .

ב. נקודת מינימום מוחלט  $(0, -\frac{1}{9})$ , נקודת מקסימום מוחלט  $(2, \frac{1}{7})$ .

ג. נקודות מינימום ומקסימום מקומיים:  $Max(-2, -\frac{3}{58})$ ,  $Min(0, -\frac{1}{9})$ ,  $Max(2, \frac{1}{7})$ .

ד. סקיצה של גרף הפונקציה.

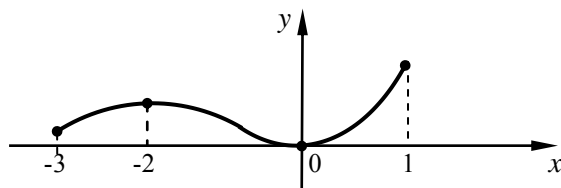


21. א. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון:  $(0, 0)$ .

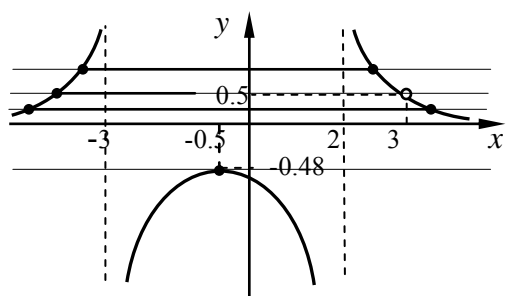
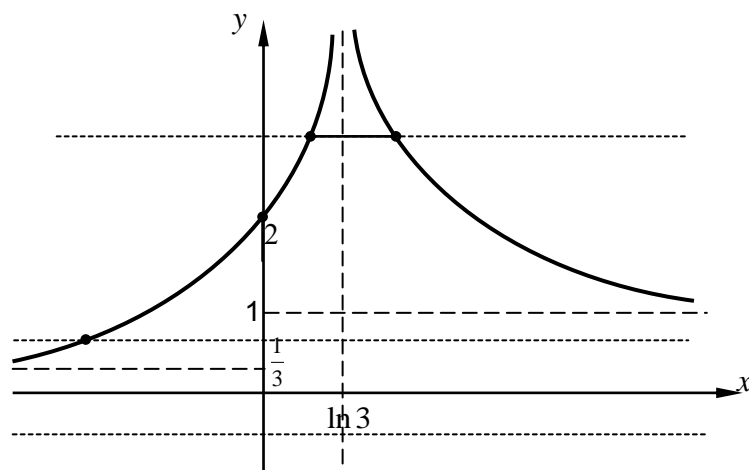
ב. נקודת מינימום מוחלט  $(0, 0)$ , נקודת מקסימום מוחלט  $(1, e)$ .

ג. נקודות מינימום ומקסימום מקומיים:  $Min(-3, \frac{9}{e^3})$ ,  $Max(-2, \frac{4}{e^2})$ ,  $Min(0, 0)$ ,  $Max(1, e)$ .

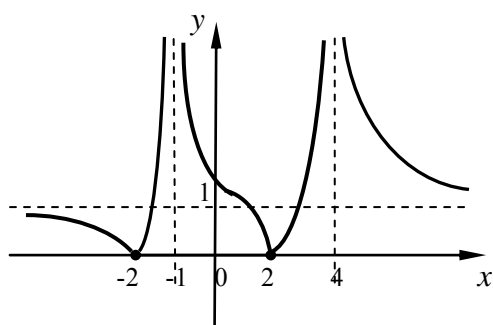
ד. סקיצה של גרף הפונקציה.



1.  $\frac{1}{3} < k \leq 1$  .22  
 2.  $k > 1$   
 3.  $k \leq \frac{1}{3}$

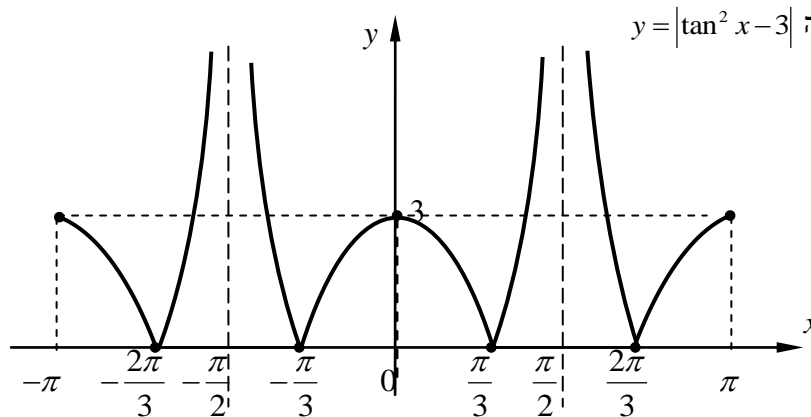


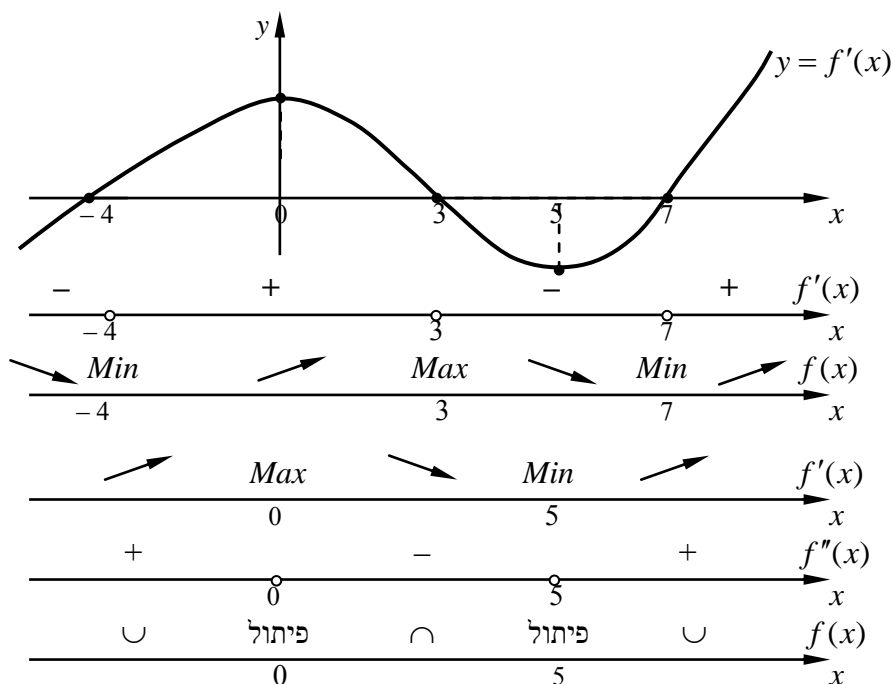
1.  $k = -0.48$  ,  $k = 0.5$  .23  
 2.  $k < -0.48$  ,  $0 < k < 0.5$  ,  $k > 0.5$   
 3. אין  
 4.  $-0.48 < k \leq 0$



24. גרף הפונקציה:  $y = \left| \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \right|$

25. גרף הפונקציה  $y = |\tan^2 x - 3|$





- תשובה:** א. תחומי עליה:  $-4 < x < 3 \vee x > 7$ . תחומי ירידה:  $x < -4 \vee 3 < x < 7$ .  
 ב.  $x_{Min} = -4, x_{Max} = 3, x_{Min} = 7$ .  
 ג. תחום הקמירות  $\cup$ :  $x < 0 \vee x > 5$ . תחום הקעורות  $\cap$ :  $0 < x < 5$ .  
 ד. נקודות פיתול:  $x = 0, x = 5$ .

- 27. תשובה:** א. תחומי עליה:  $x < -4 \vee 1.5 < x < 3 \vee 4 < x < 8$ . תחומי ירידה:  $-4 < x < 1.5 \vee 3 < x < 4 \vee x > 8$ .  
 ב.  $x_{Max} = -4, x_{Min} = 1.5, x_{Min} = 4, x_{Max} = 8$ .  
 ג. תחום הקמירות  $\cup$ :  $-1 < x < 3 \vee 3 < x < 6$ . תחום הקעורות  $\cap$ :  $x < -1 \vee x > 6$ .  
 ד. נקודות פיתול:  $x = -1, x = 6$ .

- 28. תשובה:** א. תחומי עליה:  $x < -5 \vee -2 < x < -1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 8$ . תחומי ירידה:  $-5 < x < -2 \vee -1 < x < 2 \vee 3 < x < 8$ .  
 ב.  $x_{Max} = -5, x_{Max} = -1, x_{Min} = 2, x_{Min} = 8$ .  
 ג. תחום הקמירות  $\cup$ :  $0.5 < x < 3 \vee x > 3$ .  
 ד. נקודות פיתול:  $x = 0.5$ .

- 29. תשובה:** א. תחומי עליה:  $-6 < x < -2 \vee x > 2$ . תחומי ירידה:  $-2 < x < -1 \vee -1 < x < 2$ .  
 ב.  $x_{Min} = -6, x_{Max} = -2, x_{Min} = 2$ .  
 ג. תחום הקמירות  $\cup$ :  $-6 < x < -4 \vee -1 < x < 7$ .  
 ד. נקודות פיתול:  $x = -4, x = 7$ .

## 57. פונקציות עם פרמטרים

כדי למצוא ערך הפרמטר (ערכי הפרמטרים) יש לפתור את המשוואה (מערכת המשוואות) שבה הפרמטר הוא נעלם.

1. נתון שיפוע המשיק  $m$  בנקודה שבה  $x = x_1$ . ניתן לפתור את המשוואה:  $f'(x_1) = m$

2. ידוע שנקודת קיצון היא נקודה שבה  $x = x_1$ . ניתן לפתור את המשוואה:  $f'(x_1) = 0$

3. ידוע שנקודת קיצון היא הנקודה  $(x_1, y_1)$ . ניתן לפתור את מערכת המשוואות:  $\begin{cases} f'(x_1) = 0 \\ f(x_1) = y_1 \end{cases}$

4. נתונה משוואת המשיק  $y = mx + n$  לגרף הפונקציה הנתונה. ניתן לפתור את המערכת:  $\begin{cases} f'(x) = m \\ f(x) = mx + n \end{cases}$

5. נתונה אסימפטוטה אנכית  $x = a$  לפונקציה רציונאלית  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ . ניתן לפתור את המערכת:  $\begin{cases} v(a) = 0 \\ u(a) \neq 0 \end{cases}$

6. לגרף הפונקציה  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$  יש "חור" (נקודת סליקה) עבור  $x = a$ . ניתן לפתור את המערכת:  $\begin{cases} v(a) = 0 \\ u(a) = 0 \end{cases}$

7. נתונה אסימפטוטה אופקית  $y = k$  לפונקציה רציונאלית  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ . ניתן לפתור את המשוואה:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = k$

**דוגמה 1.** נתונה הפונקציה:  $y(x) = (x^2 + a)e^{3x}$ . בנקודה  $x = 1$  יש לפונקציה נקודת קיצון. מצא את  $a$ .

יש לפתור את המשוואה עם המשתנה  $a$ :  $y'(1) = 0$  (בנקודת קיצון הנגזרת שווה ל-0)

1. נגזרת:  $y'(x) = ((x^2 + a)e^{3x})' = (x^2 + a)'e^{3x} + (x^2 + a)(e^{3x})' = 2x \cdot e^{3x} + (x^2 + a)e^{3x}(3x)'$

$$y'(x) = e^{3x} (2x + 3x^2 + 3a)$$

2. ערך הנגזרת:  $y'(1) = e^{3 \cdot 1} (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 3a) = e^3 (5 + 3a)$  (הצבה)

3. משוואה:  $e^3 (5 + 3a) = 0 \iff (e^3 > 0) \quad 5 + 3a = 0$

$$3a = -5 \quad /:3$$

$$a = -1\frac{2}{3}$$

השובה:  $a = -1\frac{2}{3}$

**דוגמה 2.** לפונקציה:  $y = a(x^3 - m)e^{-x}$  יש נקודות קיצון עבור  $x = 2$ . המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$  יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ . מצא את ערך הפרמטר  $m$  ואת ערך הפרמטר  $a$ .

יש לפתור את מערכת המשוואות עם נעלמים  $m$  ו- $a$ : 
$$\begin{cases} y'(2) = 0 & \text{(בנקודת קיצון הנגזרת שווה ל-0)} \\ y'(0) = \tan 45^\circ = 1 & \end{cases}$$

1. נגזרת: 
$$y' = a[(x^3 - m)e^{-x}]' = a[(x^3 - m)' \cdot e^{-x} + (x^3 - m) \cdot (e^{-x})'] = a[3x^2 \cdot e^{-x} + (x^3 - m) \cdot (-e^{-x})]$$

$$y' = ae^{-x}(3x^2 - x^3 + m)$$

2. ערכי הנגזרת: 
$$y'(2) = ae^{-(2)}(3 \cdot (-2)^2 - (-2)^3 + m) = ae^2(20 + m)$$

$$y'(0) = ae^{-0}(3 \cdot 0^2 - 0^3 + m) = am$$

3. מערכת משוואות: 
$$\begin{cases} ae^2(20 + m) = 0 \\ am = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ae^2(20 + m) = 0 \Rightarrow 20 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -20} \\ am = 1 \xrightarrow{m=-20} -20a = 1 \quad /:(-20) \Rightarrow \boxed{a = -0.05} \end{cases}$$

**תשובה:**  $a = -0.05, m = -20$

**דוגמה 3.** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{bx}{a - x^2}$

נתון: הישר  $x = -3$  הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה ושיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(0,0)$  שווה ל- $\frac{8}{9}$ . מצא את הערך של  $a$  ואת הערך של  $b$ .

יש לפתור את מערכת המשוואות עם נעלמים  $b$  ו- $a$ : 
$$\begin{cases} a - (-3)^2 = 0 \wedge b \cdot (-3) \neq 0 \\ f'(0) = \frac{8}{9} \end{cases}$$

עבור  $x = -3$  הפונקציה אינה מוגדרת, כלומר: 
$$\boxed{a=9} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3^2=0 \\ b \cdot 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x^2=0 \\ bx \neq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \left( \frac{bx}{9-x^2} \right)' = \frac{(bx)' \cdot (9-x^2) - bx \cdot (9-x^2)'}{(9-x^2)^2} = \frac{b \cdot (9-x^2) - bx \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9b - bx^2 + 2bx^2}{(9-x^2)^2} = \frac{9b + bx^2}{(9-x^2)^2}$$

$$(שיפוע המשיק הוא ערך הנגזרת) f'(0) = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{9b + b \cdot 0^2}{(9-0^2)^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{9b}{81} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{b}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{b=8}$$

**תשובה:**  $a = 9, b = 8$

תרגילים

1. נתונה הפונקציה:  $y = \frac{8x+a}{x^2-b}$ . לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית  $x=2$  ונקודת קיצון שבה  $x=-1$ . מצא את  $a, b$ .

2. נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x^2 + ax + b) \cdot e^{-x}$ . גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$  בנקודה  $x=-1$ . מצא את  $a, b$ .

3. לפונקציה  $y = 4x \cdot e^{-kx^2}$  יש נקודת קיצון בנקודה  $x=1$ . מצא את  $k$ .

4. נתונה הפונקציה  $y = \frac{a}{x^2-4}$ . נתון ששיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x=-4$  הוא 1. מצא את  $a$ .

5. נתונה הפונקציה:  $y = ax \cdot e^{-kx^2}$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x=1$ .

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה  $x=2$  הוא  $\frac{12}{e^2}$ . מצא את  $a, k$ .

6. נתונה הפונקציה  $y = a \ln x - \ln^2 x$ . לפונקציה יש נקודת קיצון שבה  $x=e$ . מצא את  $a$ .

7. נתונה הפונקציה  $y = \frac{ax}{x^2-bx+9}$ . שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(4, -4)$  הוא  $-\frac{7}{15}$ . מצא את  $a, b$ .

8. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2+ax}{x^2-7x+10}$ . לפונקציה יש נקודת קיצון שבה  $x=3$ . מצא את  $a$ .

9. נתונה הפונקציה  $y = 3a \cos 2x - x$ . ידוע כי בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{6}$  קיים משיק ששיפוע 2. מצא את  $a$ .

10. נתונה פונקציה  $y = \frac{x^2-2a^2x}{a^2x^2-6ax+8}$ . הישר  $x=2$  הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

11. לגרף הפונקציה  $f(x) = 1 + \frac{mx^2}{x^2-4}$  יש אסימפטוטה אופקית  $y=4$ . מצא את הערך המספרי של  $m$ .

12. לגרף הפונקציה:  $y = \frac{ax-x^2-16}{bx^2}$  יש אסימפטוטה  $y=-1$  ושיפוע המשיק בנקודה  $x=-2$ , הוא  $-6.5$ . מצא את  $a$  ואת  $b$ .

תשובות:

1.  $a=20, b=4$  . 2.  $a=2, b=1$  . 3.  $k=\frac{1}{2}$  . 4.  $a=18$  . 5.  $a=-4, k=\frac{1}{2}$  . 6.  $a=2$  . 7.  $a=15, b=10$  . 8.  $a=6$  . 9.  $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$  . 10.  $a=2$  . 11.  $m=-1$  . 12.  $a=10, b=1$

## XIV. חשבון אינטגראלי

### 58. האינטגרל הלא מסוים

<p><b>I. פונקציה קדומה</b></p> <p>פונקציה קדומה של הפונקציה <math>f(x)</math> בתחום <math>D</math> היא פונקציה, אשר נגזרת שלה בתחום <math>D</math> שווה לפונקציה <math>f(x)</math>.</p> <p>סימון: <math>F(x)</math></p> $x \in D: F'(x) = f(x)$	
<p><b>II. אינטגרציה</b></p> $F(x) \xrightarrow{\text{גזירה}} f(x) \quad F(x) \xleftarrow{\text{אינטגרציה}} f(x)$ <p>1. אינטגרציה היא פעולה הפוכה לגזירה.</p> <p>2. משפט. אם לפונקציה <math>f(x)</math> קיימת פונקציה קדומה <math>F(x)</math>, אז כל פונקציות מהצורה <math>F(x) + C</math>, <math>(C \in \mathbb{R})</math> ורק מהצורה זו הן פונקציות קדומות של <math>f(x)</math>.</p>	
<p><b>III. אינטגרל לא מסוים</b></p> <p>אינטגרל לא מסוים של פונקציה <math>f(x)</math> הוא קבוצת כל פונקציות קדומות של <math>f(x)</math>.</p> <p>סימון: <math>\int f(x)dx</math></p> $\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$	
<p><b>IV. מציאת הפונקציה על-פי נגזרתה ונקודה</b></p> <p>נתונה נגזרת הפונקציה <math>f(x) : f'(x_1) = g(x)</math> והנקודה <math>(x_1, y_1)</math> על גרף של <math>y = f(x)</math>.</p> <p>1. <math>f(x) = \int g(x)dx = G(x) + C</math> (אינטגרציה)</p> <p>2. <math>G(x_1) + C = y_1</math> (הצבה <math>x = x_1</math>, השוואה ל-<math>y_1</math>)</p> <p>3. <math>C = \dots</math> (התרת המשוואה עם המשתנה <math>C</math>)</p>	

$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	.1
$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C = 0.5x^2 + C$		.2
$\int dx = \int 1 \cdot dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$	$(x)' = 1$	.3
$\int 6x^3 dx = 6 \int x^3 dx = 6 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = 6 \cdot \frac{x^4}{4} + C = 1.5x^4 + C$	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$	.4
$\int \frac{x^4}{2} dx = \frac{1}{2} \int x^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{10} + C = 0.1x^5 + C$		.5
$\int 5 dx = 5x + C$	$(5x)' = 5$	.6
$\int (3x^2 - 5x + 2) dx = \int 3x^2 dx - \int 5x dx + \int 2 dx$	$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	.7
$\int (3x^2 - 5x + 2) dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 5 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2 \cdot x + C = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{2}} - \frac{5x^2}{2} + 2 \cdot x + C = x^3 - 2.5x^2 + 2x + C$		
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\left(-\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$	.8
$\int \frac{3}{2x} dx = \int \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} \cdot \ln x  + C = 1.5 \ln x  + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	.9
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$(2\sqrt{x})' = 2(\sqrt{x})' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	.10
$\int \frac{3}{x^4} dx = 3 \int \frac{1}{x^4} dx = 3 \int x^{-4} dx = 3 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{3 \cdot x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$		.11
$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} dx = \frac{1}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5} + C = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{5} + C$		.12
$\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = 3 \cdot (-\cos x) - 2 \sin x + C = -(3 \cos x + 2 \sin x) + C$		.13
$\int \left(\frac{5^x}{2} - 2 \cdot 3^x\right) dx = \frac{5^x}{2 \cdot \ln 5} - 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C = 0.311 \cdot 5^x - 1.820 \cdot 3^x + C$		.14



$$\int 4x dx \quad .1$$

$$\int 3x^2 dx \quad .2$$

$$\int dx \quad .3$$

$$\int \left( -\frac{4}{x^5} \right) dx \quad .4$$

$$\int \frac{dx}{2x^7} \quad .5$$

$$\int (x^6 - 2x) dx \quad .6$$

$$\int (5x^4 - 6x^2) dx \quad .7$$

$$\int (3x^5 - 8x + 3) dx \quad .8$$

$$\int \left( x^3 - \frac{1}{x^2} \right) dx \quad .9$$

$$\int \left( \frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^3} \right) dx \quad .10$$

$$\int 3\sqrt{x} dx \quad .11$$

$$\int \frac{\sqrt{5x^3}}{2} dx \quad .12$$

$$\int 8\sqrt[3]{x} dx \quad .13$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad .14$$

$$\int \sqrt[n]{x^n} dx \quad .15$$

$$\int \left( x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{4}} \right) dx \quad .16$$

$$\int \frac{dx}{3x} \quad .17$$

$$\int \frac{5}{\sin^2 x} dx \quad .18$$

$$\int \left( \sin x - \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx \quad .19$$

$$\int 2^x dx \quad .20$$

$$\int (2e^x - 3 \cdot 3^x) dx \quad .21$$

ב. האינטגרל הלא מסוים של פונקציה מורכבת (של פונקציה לינארית)

דוגמאות:

$\int (6x+5)^3 dx = \frac{(6x+5)^4}{6 \cdot 4} + C = \frac{(6x+5)^4}{24} + C$	$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C} \quad .1$
$\int \frac{1}{(2x-7)^4} dx = \int (2x-7)^{-4} dx = \frac{(2x-7)^{-4+1}}{2 \cdot (-4+1)} + C = -\frac{1}{6(2x-7)^3} + C$	.2
$\int \sqrt[4]{(3-5x)^3} dx = \int (3-5x)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{(3-5x)^{\frac{3}{4}+1}}{-5 \cdot \left(\frac{3}{4}+1\right)} + C = \frac{(3-5x)^{\frac{7}{4}}}{-5 \cdot \frac{7}{4}} + C = \frac{-4\sqrt[4]{(3-5x)^7}}{35} + C$	.3
$\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} + C = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + C$	.5
$\int 3^{0.5x-5} dx = \frac{3^{0.5x-5}}{0.5 \ln 3} + C = \frac{2 \cdot 3^{0.5x-5}}{\ln 3} + C$	.6
$\int \frac{dx}{2x-3} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x-1.5} = \frac{1}{2} \cdot \ln x-1.5  + C$	דרך שנייה: $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{\ln 2x-3 }{2} + C = 0.5 \ln 2x-3  + C$

תרגילים.

$$\int \frac{1}{(6-x)^8} dx \quad .24$$

$$\int (3x+2)^{10} dx \quad .23$$

$$\int (x-4)^9 dx \quad .22$$

$$\int \sqrt{x+2} dx \quad .27$$

$$\int (4x^2 - 12x + 9)^6 dx \quad .26$$

$$\int \frac{1}{(4x-5)^7} dx \quad .25$$

$$\int \frac{3}{5} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} \right)^2 dx \quad .30$$

$$\int \sqrt[3]{4-5x} dx \quad .29$$

$$\int \sqrt{2x-3} dx \quad .28$$

$$\int \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx \quad .33$$

$$\int \left( \sin \frac{x}{5} + \cos(-4x) \right) dx \quad .32$$

$$\int \sin 3x dx \quad .31$$

$$\int 2e^{3x} dx \quad .36$$

$$\int \frac{3}{5x-2} dx \quad .35$$

$$\int \frac{dx}{x-4} \quad .34$$

$$\int \frac{x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{17}{4}} dx = \frac{x^{\frac{17}{4}+1}}{\frac{17}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{21}{4}}}{\frac{21}{4}} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^{21}}}{21} + C \quad .1$$

$$\frac{x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}} = \frac{x^4 \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{4+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{17}{4}}$$

$$\int \frac{5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4}{x^4} dx = \int (5x^2 - 3 + 2x^{-2} - 4x^{-4}) dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3x + 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{5x^3}{3} - 3x - \frac{2}{x} + \frac{4}{3x^3} + C \quad .2$$

$$\frac{5x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4}{x^4} = \frac{5x^6}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4} + \frac{2x^2}{x^4} - \frac{4}{x^4} = 5x^2 - 3 + 2x^{-2} - 4x^{-4}$$

$$\int \frac{3x^3 - 14x^2 + 7x - 1}{x - 4} dx = \int \left( 3x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{x-4} \right) dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + 3 \cdot \frac{1}{1} \cdot \ln|x-4| + C = \quad .3$$

$$= x^3 - x^2 + x + 3\ln|x-4| + C$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + 1 \\ 3x^3 - 14x^2 + 9x - 1 \quad | \quad x - 4 \\ \hline 3x^3 - 12x^2 \\ \hline -2x^2 + 9x \\ -2x^2 + 8x \\ \hline x - 1 \\ x - 4 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\int \frac{(4x^2 - 12x + 9)^3}{(2x - 3)^5} dx = \int \frac{(2x - 3)^6}{(2x - 3)^5} dx = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C \quad .4$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x - 3)^2$$

$$\int \frac{(x+2)(x^2-9)}{x^2-x-6} dx = \int \frac{(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} dx = \int (x+3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C \quad .5$$

$$\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \\ x_1 = 3, x_2 = -2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \end{array}$$

$$\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = \frac{1}{2} \cdot (-\cos x) + C = -0.5 \cos x + C \quad .6$$

$$\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx = \int (-\cos 2x) dx = \frac{-\sin 2x}{2} + C \quad .7$$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \cdot (x - \sin x) + C \quad .8$$

$$\int (\sin 2x \cdot \sin 3x) dx = \int \frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \left( \sin x - \frac{\sin 5x}{5} \right) + C \quad .9$$

### הרגילים.

$$\int (5x^2 - 1)^2 dx \quad .39$$

$$\int \left( \frac{x+1}{x} \right)^2 dx \quad .38$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx \quad .37$$

$$\int (x^2 - 1)(x+2) dx \quad .42$$

$$\int (x^3 - 1)^3 dx \quad .41$$

$$\int \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad .40$$

$$\int \frac{(x-2)^3}{x^3} dx \quad .45$$

$$\int \frac{2x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3}{x^2} dx \quad .44$$

$$\int \frac{2x^2 - 4x + x^3}{x} dx \quad .43$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx \quad .48$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}} dx \quad .47$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx \quad .46$$

$$\int \frac{x^4 - 1}{x+1} dx \quad .51$$

$$\int (2 - \sqrt{x})^2 dx \quad .50$$

$$\int \left( x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^5}} \right) dx \quad .49$$

$$\int \left( \frac{x-1}{x^2 + x - 2} \right)^{\frac{1}{4}} dx \quad .54$$

$$\int \sqrt{\frac{x^2 - 6x + 9}{x}} dx \quad .53$$

$$\int \frac{(x+1)(x-2)}{x\sqrt{x}} dx \quad .52$$

$$\int (\sin^2 x - \cos^2 x) dx \quad .57$$

$$\int 2 \sin 2x \cos 2x dx \quad .56$$

$$\int \left( \frac{\sin 2x}{2 \cos x} - \frac{1}{1 - \sin^2 x} \right) dx \quad .55$$

$$\int \frac{x-3}{2x^2 - 5x - 3} dx \quad .60$$

$$\int \frac{3x-1}{9x^2 - 1} dx \quad .59$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx \quad .58$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{e^{2x-3}}} dx \quad .63$$

$$\int (e^{x-2})^3 dx \quad .62$$

$$\int \frac{5e^3}{e^x} dx \quad .61$$

$$\int \frac{1}{5^{3x}} dx \quad .66$$

$$\int \frac{x^3 - xe^{-x} + 1}{x} dx \quad .65$$

$$\int \left( 5e^{\frac{x}{3}} + \frac{3}{4} \sqrt{e^x} \right) dx \quad .64$$

$$\int \frac{e^{2x} - 5}{e^x} dx \quad .69$$

$$\int (e^x + e^{-x})^2 dx \quad .68$$

$$\int (1 - e^x)^2 dx \quad .67$$

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx \quad .72$$

$$\int \left( 5^x \cdot 2^{x+1} + \frac{3^{x+1}}{2^{x-1}} \right) dx \quad .71$$

$$\int (2e^x + 3x) \frac{e^{-x}}{x} dx \quad .70$$

$$\int f^3(x) \cdot f'(x) dx \quad .75$$

$$\int \frac{-2x^4 + x^3 + x^2 + 4x - 1}{2x+1} dx \quad .74$$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x-1} dx \quad .73$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad .78$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \quad .77$$

$$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx \quad .76$$

**תשובות :** 1.  $2x^2 + c$  .2  $x^3 + c$  .3  $x + c$  .4  $\frac{1}{x^4} + c$  .5  $-\frac{1}{12x^6} + c$

6.  $\frac{x^7}{7} - x^2 + c$  .7  $x^5 - 2x^3 + c$  .8  $\frac{x^6}{2} - 4x^2 + 3x + c$  .9  $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} + c$

10.  $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + c$  .11  $2\sqrt{x^3} + c$  .12  $\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{x^5} + c$  .13  $6\sqrt[3]{x^4} + c$  .14  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

15.  $\frac{mx^{\frac{n+m}{m}}}{n+m} + c$  .16  $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{1}{4}} + c$  .17  $\frac{1}{3}\ln|x| + C$  .18  $-5\cot x + C$  .19  $-\cos x - 2\tan x + C$

20.  $\frac{2^x}{\ln 2} + C$  .21  $2e^x - \frac{3 \cdot 3^x}{\ln 3} + C$  .22  $\frac{1}{10}(x-4)^{10} + c$  .23  $\frac{1}{33}(3x+2)^{11} + c$  .24  $\frac{1}{7(6-x)^7} + c$

25.  $-\frac{1}{24(4x-5)^6} + c$  .26  $\frac{1}{26}(2x-3)^{13} + c$  .27  $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} + c$  .28  $\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c$

29.  $-\frac{3}{20}\sqrt[3]{(4-5x)^4} + c$  .30  $\frac{1}{2}\sqrt[5]{(2x-1)^3} + c$  .31  $-\frac{\cos 3x}{3} + C$  .32  $-5\cos\frac{x}{5} + \frac{\sin 4x}{4} + C$

33.  $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \cot x + C$  .34  $\ln|x-4| + C$  .35  $\frac{3}{5}\ln|5x-2| + C$  .36  $\frac{2}{3}e^{3x} + c$

37.  $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$  .38  $-\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x + C$  .39  $5x^5 - \frac{10}{3}x^3 + x + c$  .40  $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + c$

41.  $\frac{x^{10}}{10} - \frac{3x^7}{7} + \frac{3x^4}{4} - x + C$  .42  $\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + c$  .43  $\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + c$

44.  $\frac{x^4}{2} + 2x^2 - 2x - \frac{3}{x} + c$  .45  $x - 6\ln|x| - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} + C$  .46  $3\sqrt[3]{x} + c$  .47  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$

48.  $2\sqrt{x} + c$  .49  $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x^3}} + c$  .50  $4x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c$  .51  $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c$

52.  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + c$  .53  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + c$  .54  $\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{4}} + c$

55.  $-\cos x - \tan x + C$  .56  $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$  .57  $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$  .58  $\tan x + C$

59.  $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$  .60  $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$  .61  $-5e^{-x+3} + c$  .62  $\frac{1}{3}e^{3x-6} + c$

63.  $-\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}x+1} + c$  .64  $15e^{\frac{x}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{e^x} + c$  .65  $\frac{x^3}{3} + e^{-x} + \ln|x| + C$  .66  $-\frac{1}{3 \cdot 5^{3x} \ln 5} + C$

67.  $x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$  .68  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$  .69  $e^x + 5e^{-x} + c$

70.  $2\ln|x| - 3e^{-x} + C$  .71  $\frac{2 \cdot 10^x}{\ln 10} + \frac{6 \cdot 1.5^x}{\ln 1.5} + C$  .72  $e^x - x + c$

73.  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \ln|x-1| + c$  .74  $-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c$  .75  $\frac{f^4(x)}{4} + C$

76.  $\sin(f(x)) + C$  .77  $2\sqrt{f(x)} + C$  .78  $\ln|f(x)| + C$

## 59. אימות אינטגרלים ע"י גזירה

דוגמאות:

$$1. \text{ הראה כי: } \int 2e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) + C$$

$$\begin{aligned} (e^x (\cos x + \sin x) + C)' &= (e^x)'(\cos x + \sin x) + e^x (\cos x + \sin x)' = e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x) = \\ &= 2e^x \cos x \\ &\text{מ.ש.ל.} \end{aligned}$$

$$2. \text{ הראה כי: } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x - \sqrt{x^2-1}) + C \quad (x > 1)$$

$$\begin{aligned} (\ln(x - \sqrt{x^2-1}) + C)' &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot (x - \sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 - \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{-(x - \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &\text{מ.ש.ל.} \end{aligned}$$

תרגילים:

$$1. \text{ הראה כי } \int e^{-2x} (1-x^2) dx = \frac{1}{4} e^{-2x} (2x^2 + 2x - 1) + C$$

$$2. \text{ הראה כי } \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$3. \text{ הראה כי } \int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} (x^3 - 1) + C$$

$$4. \text{ הראה כי } \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$5. \text{ הראה כי } \int \frac{4}{x^2+2x-3} dx = \ln \frac{x-1}{x+3} + C \quad (\text{עבור } x < -3 \vee x > 2)$$

$$6. \text{ הראה כי } \int \frac{4}{x^2+2x-3} dx = \ln \frac{1-x}{x+3} + C \quad (\text{עבור } -3 < x < 2)$$

3. היעזר בנגזרת של הפונקציה  $y = \frac{x+2}{x^2+3x-4}$  ומצא את האינטגרל  $\int \frac{x^2+4x+10}{(x^2+3x-4)^2} dx$

$$\left(\frac{x+2}{x^2+3x-4}\right)' = \frac{(x+2)'(x^2+3x-4) - (x+2)(x^2+3x-4)'}{(x^2+3x-4)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+3x-4) - (x+2)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + \cancel{3x} - 4 - 2x^2 - \cancel{3x} - 4x - 6}{(x^2+3x-4)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 10}{(x^2+3x-4)^2} = -\frac{x^2+4x+10}{(x^2+3x-4)^2}$$

$$\int \frac{x^2+4x+10}{(x^2+3x-4)^2} dx = -\int \left(-\frac{x^2+4x+10}{(x^2+3x-4)^2}\right) dx = \boxed{\frac{x+2}{x^2+3x-4} + C}$$

4. היעזר בנגזרת של הפונקציה  $y = (x \ln x)^2$  ומצא את האינטגרל  $\int x(\ln^2 x + \ln x) dx$

$$\left((x \ln x)^2\right)' = 2x \ln x \cdot (x \ln x)' = 2x \ln x \cdot (x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)') = 2x \ln x \cdot \left(1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) =$$

$$= 2x \ln x (\ln x + 1) = 2x(\ln^2 x + \ln x)$$

$$\int x(\ln^2 x + \ln x) dx = \frac{1}{2} \int 2x(\ln^2 x + \ln x) dx = \boxed{\frac{1}{2}(x \ln x)^2 + C}$$

**תרגילים**

7. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = 3x^3 \ln x - x^3$  כדי למצוא אינטגרל  $\int x^2 \ln x dx$

8. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = e^x(\sin x - \cos x)$  כדי למצוא אינטגרל  $\int e^x \sin x dx$

9. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}$  כדי למצוא אינטגרל  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} dx$

10. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = 2 \ln(x^2 + 4)$  כדי למצוא אינטגרל  $\int \frac{8x}{x^2+4} dx$

11. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = \sqrt{5-3\cos x}$  כדי למצוא אינטגרל  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5-3\cos x}} dx$

12. היעזר בנגזרת של פונקציה  $y = 3\cos^5 x - 5\cos^3 x$  כדי למצוא אינטגרל  $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$

**תשובות:**

7.  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$  . 8.  $0.5 e^x (\sin x - \cos x) + C$  . 9.  $2(\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$

10.  $4 \ln(x^2 + 4) + C$  . 11.  $\frac{2\sqrt{5-3\cos x}}{3} + C$  . 12.  $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

## 60. מציאת פונקציה על פי נגזרתה ונקודה (מציאת ערך הפרמטר C)

**דוגמה 1.** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = x^2 - 2x$ . מצא את הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע שגרף שלה עובר דרך הנקודה  $(6, 12)$ .

1.  $f(x)$  היא פונקציה קדומה של  $f'(x)$ :

$$(אינטגרציה) \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2} \cdot x^2}{\cancel{2}} + C \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$

2. גרף הפונקציה  $y = f(x)$  עובר דרך הנקודה  $(6, 12)$ : **(הצבה)**  $f(6) = 12$

$$\frac{6^3}{3} - 6^2 + C = 12$$

$$\underline{36} + C = 12$$

$$C = 12 - 36 = -24$$

**תשובה:**  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 24$

**דוגמה 2.** הנגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = x^3 + 8$ . הערך המינימלי של הפונקציה הוא 3. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

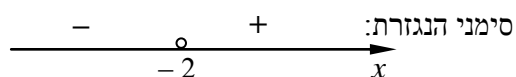
1.  $f(x)$  היא פונקציה קדומה של  $f'(x)$ :

$$(אינטגרציה) \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 + 8) dx = \frac{x^4}{4} + 8x + C \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + C$$

2. אפסי הנגזרת:  $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$

$$x^3 = -8 \quad \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$x = -2$$



עלייה, ירידה:

נקודת קיצון:  $Min(-2, 3)$

3. גרף הפונקציה  $y = f(x)$  עובר דרך הנקודה  $(-2, 3)$ :

**(הצבה)**  $f(-2) = 3 \Rightarrow \frac{(-2)^4}{4} + 8 \cdot (-2) + C = 3$

$$\underline{-12} + C = 3$$

$$C = 3 + 12 = 15$$

**תשובה:**  $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 15$



**דוגמה 3.** הנגזרת של פונקציה היא  $f'(x) = \frac{3\sqrt{ax-4}}{2}$  ( $a \neq 0$ ).

ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון בנקודה (4,7). מצא את הפונקציה.

נתון:  $f(4) = 7$  וגם  $f'(4) = 0$ .

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3\sqrt{ax-4}}{2} dx = \frac{3}{2} \int (ax-4)^{0.5} dx = \frac{3}{2} \frac{(ax-4)^{1.5}}{1.5a} + C = \frac{(ax-4)^{1.5}}{a} + C$$

$$f'(4) = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{a \cdot 4 - 4}}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot 4 - 4} = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$f(x) = \frac{(1 \cdot x - 4)^{1.5}}{1} + C$$

$$f(x) = (x-4)^{1.5} + C$$

$$f(4) = 7 \Rightarrow (4-4)^{1.5} + C = 7 \Rightarrow 0 + C = 7 \Rightarrow C = 7$$

$$f(x) = (x-4)^{1.5} + 7$$

**תשובה:**  $f(x) = (x-4)^{1.5} + 7$

$$(f(x) = \sqrt{(x-4)^3} + 7)$$

**דוגמה 4.** הנגזרת של פונקציה היא  $f'(x) = \frac{3\sqrt{ax-b}}{2}$  ( $a \neq 0$ ).

ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון בנקודה (4,7), וכי היא עוברת בנקודה (8,15). מצא את הפונקציה.

נתון:  $f(4) = 7$  וגם  $f'(4) = 0$  וגם  $f(8) = 15$ .

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3\sqrt{ax-b}}{2} dx = \frac{3}{2} \int (ax-b)^{0.5} dx = \frac{3}{2} \frac{(ax-b)^{1.5}}{1.5a} + C = \frac{(ax-b)^{1.5}}{a} + C$$

$$f'(4) = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{a \cdot 4 - b}}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot 4 - b} = 0 \Rightarrow 4a - b = 0 \Rightarrow 4a = b$$

$$f(4) = 7 \Rightarrow \frac{(4a-b)^{1.5}}{a} + C = 7 \Rightarrow \frac{0}{a} + C = 7 \Rightarrow C = 7$$

$$f(8) = 15 \Rightarrow \frac{(8a-b)^{1.5}}{a} + C = 15 \Rightarrow \frac{(8a-4a)^{1.5}}{a} + 7 = 15 \Rightarrow \frac{(4a)^{1.5}}{a} = 8 \Rightarrow 8a^{0.5} = 8 \Rightarrow a = 1$$

$$4a = b \xrightarrow{a=1} b = 4$$

$$f(x) = \frac{(1 \cdot x - 4)^{1.5}}{1} + 7$$

**תשובה:**  $f(x) = (x-4)^{1.5} + 7$

$$(f(x) = \sqrt{(x-4)^3} + 7)$$

תרגילים.

1. נתונה הפונקציה  $f(x)$  המקיימת:  $f'(-1) = 4$ ,  $f'(x) = 2x$ . מצא את הפונקציה.
2. מצא את הפונקציה  $y$  אם נתון ש-  $y' = 3x^2 + x$  וכאשר  $x = 1$  אז  $y = 3$ .
3. נתון  $\frac{dy}{dx} = 5$ , מצא את  $y$  אם כאשר  $x = 2$  אז  $y = 7$ .
4. גרף הפונקציה  $f(x)$  עובר דרך הנקודה  $(-2, 0)$  והנגזרת היא:  $f'(x) = \frac{24}{x^4}$ . מצא את הפונקציה.
5. נתון:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $f(4) = 7$ . הוכח  $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ .
6. נתון:  $y' = \frac{16 + x\sqrt{x}}{2x^2}$  וגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה  $(1, -7)$ . מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה ציר ה- $x$ .
7. נתון:  $y' = \frac{6 + x^2\sqrt{x}}{x^3}$  וגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה  $(0.25, -50)$ . מצא את ערך הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .
8. נתון:  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ . הוכח  $f(x) = -\cot x - 1$ .
9. נתון:  $f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1$ ,  $f'(x) = \frac{4}{\cos^2 2x}$ . מצא את  $f(x)$ .
10. נתון  $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{\cos^2 x} + 2\cos 2x$ . מצא את הפונקציה  $y$  אם היא עוברת דרך הנקודה  $\left(\frac{3}{4}\pi, -2\right)$ .
11. נגזרת הפונקציה היא  $f'(x) = \sin ax + \cos ax$ ,  $(a \neq 0)$ . מצא את הפונקציה אם הגרף שלה עובר בנקודות  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{\pi}{a}, 1\right)$ .
12. נתון:  $f(1) = -2$ ,  $f(e) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{a}{x}$ . הוכח כי:  $f(x) = 2\ln x - 2$ .
13. נתון:  $f''(x) = e^{-x} + \frac{1}{(x+1)^2}$  וגם  $f(0) = f'(0) = 0$ . הוכח:  $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1) + 2x - 1$ .
14. נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 4x - 8$  והערך המינימאלי של הפונקציה הוא  $-3$ . מצא את הפונקציה.
15. נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$  וערך המקסימום המקומי שלה הוא  $7$ . מצא את הפונקציה ואת נקודת המינימום שלה.
16. הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f''(x) = -6x + 8$  ויש ערך קיצון לפונקציה בנקודה  $(2, 5)$ .  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון השנייה וקבע אם היא נקודת מינימום או מקסימום.  
 ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
17. הנגזרת השנייה של הפונקציה  $f(x)$  היא  $f''(x) = -12x + 24$  ויש ערך קיצון לפונקציה בנקודה  $(1, -3)$ .  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון השנייה וקבע אם היא נקודת מינימום או מקסימום.  
 ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

18. הגרף של הפונקציה עובר דרך הנקודות  $A(1,4)$   $B(2,9)$ . הנגזרת של הפונקציה בנקודה  $A$  היא 3 והנגזרת השנייה היא גודל קבוע. מצא את הפונקציה.

19. נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 4x^3 - 5$  המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $y = 0$  יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ . מצא את  $f(x)$ .

20. הנגזרת השנייה של פונקציה היא  $f''(x) = 12x^2 - 4$  משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  היא  $y = 3x + 1$ . מצא את הפונקציה.

21. הנגזרת השנייה של פונקציה היא  $f''(x) = 12x^2 - 6$  משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -1$  היא  $y = -2x + 5$ . מצא את הפונקציה.

22. המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות שבהן  $y = 5$  וגם  $y = 3$  יוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $45^\circ$  נגזרת הפונקציה היא  $f'(x) = 3x^2 - 2$ . מצא את  $f(x)$ .

23. הנגזרת השנייה של הפונקציה היא  $f''(x) = 2e^{2x} - 3e^x$ . בנקודה שבה  $x = 0$  יש לפונקציה מקסימום. ערך הפונקציה בנקודת המינימום הוא  $\ln 4$ . מצא את  $f(x)$ .

24. הנגזרת השלישית של פונקציה היא  $y''' = 12$ , לפונקציה נקודות קיצון בנקודות בהן  $x = -1$ ,  $x = 2$  והיא משיקה לציר ה- $x$  בנקודת המקסימום. מצא את הפונקציה.

25. הנגזרת של פונקציה היא  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{ax+b}$  כאשר  $a \neq 0$  והיא מתאפסת בנקודה  $(1,2)$ . גרף הפונקציה עובר בנקודה  $(5,10)$ . מצא את הפונקציה.

**תשובות:** 1.  $f(x) = x^2 + 3$  2.  $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1.5$  3.  $y = 5x - 3$  4.  $f(x) = -\frac{8}{x^3} - 1$

5.  $(4,0)$  6.  $y = 5 \tan x + \sin 2x + 4$  7.  $-4$  8.  $f(x) = 2 \tan 2x + 3$  9.  $f(x) = 2 \tan 2x + 3$  10.  $y = 5 \tan x + \sin 2x + 4$

11.  $f(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x - 1)$  12.  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$  13.  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

14.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ ,  $(3,3)$  15.  $\frac{2}{3}$ , מינימום ב.  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 5$

16.  $\frac{2}{3}$ , מינימום ב.  $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 5$  17.  $\max, x = 3$  18.  $y = 2x^2 - x + 3$

19.  $f(x) = x^4 - 5x + 4$  20.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 2$  21.  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4x + 5$

22.  $f(x) = x^3 - 2x + 4$  23.  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x + 4$  24.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$

25.  $y = (x-1)^{\frac{3}{2}} + 2$

## 61. האינטגרל המסוים

### א. חישוב האינטגרל המסוים

אינטגרל מסוים של  $f(x)$  מ- $a$  עד- $b$  הוא הפרש ערכי הפונקציה הקדומה של  $f(x)$  בנקודות  $b$  ו- $a$  בהתאם.

$$\int_a^b f(x) dx \text{ סימון:}$$

$b$  נקרא גבול עליון של אינטגרל מסוים,  
 $a$  נקרא גבול תחתון של אינטגרל מסוים.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

הפרש ערכי הפונקציה הקדומה מסמנים גם:  $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

נוסחת ניוטון-לייבניץ

**דוגמאות:**

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21 \quad .1$$

$$\int_3^5 (x+6) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 6x \right]_3^5 = \left[ \frac{5^2}{2} + 6 \cdot 5 \right] - \left[ \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right] = 42.5 - 22.5 = 20 \quad .2$$

$$\int_{-3}^7 (2x-3) dx = \left[ \frac{2x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^7 = [x^2 - 3x]_{-3}^7 = [7^2 - 3 \cdot 7] - [(-3)^2 - 3 \cdot (-3)] = 28 - 18 = 10 \quad .3$$

$$\int_{-2}^1 (x^2 - 4x - 5) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x \right]_{-2}^1 = \left[ \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \right] - \left[ \frac{(-2)^3}{3} - 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) \right] = -6 \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) = -6 \quad .4$$

$$\begin{aligned} \int_{-1.5}^2 \sqrt[3]{(5-2x)^2} dx &= \int_{-1.5}^2 (5-2x)^{\frac{2}{3}} dx = \left[ \frac{(5-2x)^{\frac{2}{3}+1}}{\left(\frac{2}{3}+1\right) \cdot (-2)} \right]_{-1.5}^2 = \left[ \frac{(5-2x)^{\frac{5}{3}}}{\frac{-10}{3}} \right]_{-1.5}^2 = \left[ \frac{3(5-2x)^{\frac{5}{3}}}{-10} \right]_{-1.5}^2 = \\ &= \left[ \frac{3(5-2 \cdot 2)^{\frac{5}{3}}}{-10} \right] - \left[ \frac{3(5-2 \cdot (-1.5))^{\frac{5}{3}}}{-10} \right] = -0.3 + 9.6 = 9.3 \quad .5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{10}{(5x-3)^2} dx &= \int_{-1}^0 10(5x-3)^{-2} dx = \left[ \frac{10(5x-3)^{-2+1}}{(-2+1) \cdot 5} \right]_{-1}^0 = [-2 \cdot (5x-3)^{-1}]_{-1}^0 = \left[ \frac{-2}{5x-3} \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[ \frac{-2}{5 \cdot 0 - 3} \right] - \left[ \frac{-2}{5 \cdot (-1) - 3} \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \quad .6 \end{aligned}$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{2}{5x+3} dx = \frac{2}{5} \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x+0.6} dx = [0.4 \ln|x+0.6|]_{-3}^{-1} = [0.4 \ln|-1+0.6|] - [0.4 \ln|-3+0.6|] =$$

$$= [0.4 \ln|-0.4|] - [0.4 \ln|-2.4|] = 0.4(\ln 0.4 - \ln 2.4) = 0.4 \ln \frac{1}{6} = -0.717 \quad .7$$

$$\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 dx}{\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)} = \left[ \frac{-4 \cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)}{2} \right]_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[ -2 \cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \right]_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[ -2 \cot\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \right] - \left[ -2 \cot\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) \right] = -2 \cot \frac{4\pi}{5} + 2 \cot \frac{\pi}{5} = 5.506 \quad .8$$

תרגילים. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_2^4 (-3x+2) dx \quad .3$$

$$\int_0^8 3 dx \quad .2$$

$$\int_1^2 2x dx \quad .1$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 6x^2 + 3) dx \quad .6$$

$$\int_0^3 (x^2 - 4x + 3) dx \quad .5$$

$$\int_{-1}^2 6x^2 dx \quad .4$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad .9$$

$$\int_0^1 (3x-2)^3 dx \quad .8$$

$$\int_{-1}^1 (3x+1)^2 dx \quad .7$$

$$\int_{-9}^{13} (x-2)^{17} dx \quad .12$$

$$\int_0^1 (2x-1)^{10} dx \quad .11$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2x-3}\right)^2 dx \quad .10$$

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx \quad .15$$

$$\int_2^3 \sqrt{3-x} dx \quad .14$$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx \quad .13$$

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx \quad .18$$

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx \quad .17$$

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{8} \sqrt{3x+10} dx \quad .16$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad .21$$

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx \quad .20$$

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx \quad .19$$

$$\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \sin 5x) dx \quad .24$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x dx \quad .23$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx \quad .22$$

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 6x \cos 2x dx \quad .27$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x} \quad .26$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) dx \quad .25$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)^2 dx \quad .30$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \sin x dx \quad .29$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx \quad .28$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx \quad .33 \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x+3} \quad .32 \qquad \int_1^e \frac{2}{x} dx \quad .31$$

$$\int_e^{e^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx \quad .36 \qquad \int_1^2 \frac{3x^3-3}{x} dx \quad .35 \qquad \int_{-e-1}^{-2} \frac{1}{x+1} dx \quad .34$$

$$\int_2^8 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} dx \quad .39 \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(x+1)} \quad .38 \qquad \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx \quad .37$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{5^{2x+1}} dx \quad .42 \qquad \int_0^{\ln 2} e^{3x-1} dx \quad .41 \qquad \int_0^1 e^{-2x} dx \quad .40$$

$$\int_0^1 (2^x + 4^x)^2 dx \quad .45 \qquad \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})^2 dx \quad .44 \qquad \int_1^2 \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x} - e^x} dx \quad .43$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x-1} dx \quad .48 \qquad \int_2^4 \frac{2x^3 - x^2 - x - 1}{2x-3} dx \quad .47 \qquad \int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^x} + \sqrt{e^{-x}}} dx \quad .46$$

מצא את  $a$  ע"פ הנתון בתרגילים הבאים:

$$\int_0^a (6x^5 - 27x^2) dx = -8 \quad .50 \qquad \int_a^{a+3} (x^2 + 1) dx = 6 \quad .49$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2ax} dx = \frac{1}{a} \quad .52 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin ax dx = \frac{1}{a} \quad .51$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3 - 9x + a - 1}{x+3} dx = (a^2 - 7) \cdot \ln \frac{3}{2} + \frac{11}{6} \quad .53$$

תשובות: 1. 3, 2. 24, 3. -14, 4. 18, 5. 0, 6. -20, 7. 8, 8.  $8\frac{1}{4}$ , 9.  $5\frac{5}{6}$ , 10.  $\frac{1}{3}$

11.  $\frac{1}{11}$ , 12. 0, 13.  $4\frac{2}{3}$ , 14.  $\frac{2}{3}$ , 15. 7, 16.  $1\frac{5}{9}$ , 17. 12, 18. 4.5, 19.  $1\frac{3}{4}$

20.  $17\frac{2}{3}$ , 21. 2, 22.  $\frac{1}{4}$ , 23.  $\frac{1}{8}$ , 24.  $\frac{7}{15}$ , 25.  $2\sqrt{3}$ , 26. 2, 27.  $-\frac{1}{4}$ , 28.  $\frac{\pi}{2}$

29.  $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ , 30.  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ , 31. 2, 32.  $\frac{1}{2} \ln(5)$ , 33.  $\ln \frac{1}{3}$ , 34. -1, 35.  $7 - \ln 8$

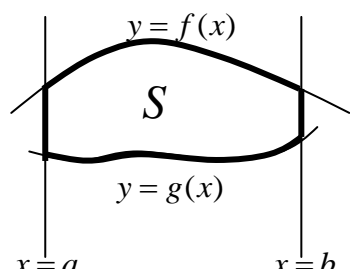
36.  $1 + \ln(e+1)$ , 37.  $2 - \ln 3$ , 38.  $\ln \frac{3}{2}$ , 39.  $e^4 - e$ , 40.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$ , 41.  $\frac{7}{3e}$

42.  $\frac{12}{5 \ln 5}$ , 43.  $1 + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}$ , 44.  $1\frac{7}{8} - \ln 4$ , 45.  $\frac{119}{12 \ln 2}$ , 46. 0, 47.  $26\frac{2}{3} + \ln 5$

48.  $-\frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$ , 49. -1, -2, 50. 2, 1, 51.  $3 + 6k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 52.  $\ln 2$ , 53.  $a = -2, a = 3$

**ב. חישוב השטחים בעזרת האינטגרלים המסוימים**

**1. חישוב השטחים בעזרת האינטגרל המסוים אחד**

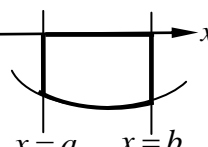


שטח  $S$ , המוגבל על-ידי שני ישרים אנכיים  $x=a$  ו- $x=b$  ( $a < b$ ), ושני גרפים  $y=f(x)$  ו- $y=g(x)$  ( $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ ), שווה לאינטגרל:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

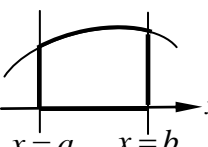
$y=f(x)$  פונקציה עליונה,  $y=g(x)$  פונקציה תחתונה בקטע  $[a, b]$

כאשר גרף העליון הוא ציר ה- $x$ , שטח  $S$  שווה לאינטגרל הבא:

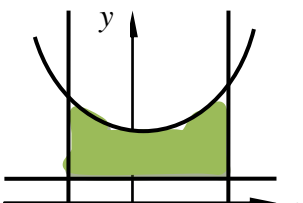


$$S = \int_a^b [0 - f(x)] dx = -\int_a^b f(x) dx$$

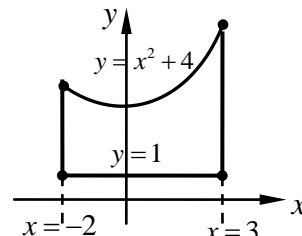
כאשר גרף התחתון הוא ציר ה- $x$ , שטח  $S$  שווה לאינטגרל הבא:



$$S = \int_a^b [f(x) - 0] dx = \int_a^b f(x) dx$$



**דוגמה 1.** חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $y = x^2 + 4$ , על ידי הישר  $y = 1$  ועל ידי הישרים  $x = -2$  ו- $x = 3$ .

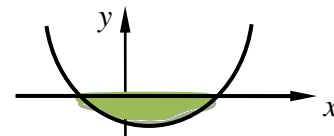


שטח המבוקש הוא:

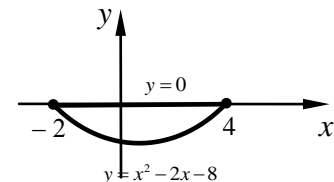
$$S = \int_{-2}^3 [(x^2 + 4) - 1] dx = \int_{-2}^3 [x^2 + 3] dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-2}^3 =$$

$$= \left[ \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right] - \left[ \frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2) \right] =$$

$$= 18 - \left( -8 \frac{2}{3} \right) = 26 \frac{2}{3} = 26.67$$



**דוגמה 2.** חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $y = x^2 - 2x - 8$  וציר ה- $x$ .



נקודות חיתוך הפרבולה עם ציר ה- $x$ :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

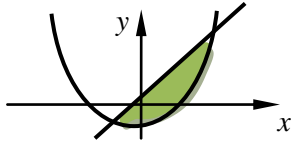
$$x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

$$(4, 0) \quad (-2, 0)$$

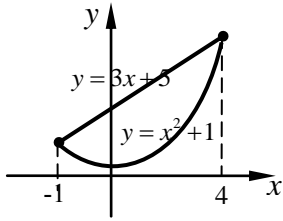
שטח המבוקש הוא:

$$S = \int_{-2}^4 [0 - (x^2 - 2x - 8)] dx = \int_{-2}^4 (-x^2 + 2x + 8) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 8x \right]_{-2}^4 =$$

$$= \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x \right]_{-2}^4 = \left[ -\frac{4^3}{3} + 4^2 + 8 \cdot 4 \right] - \left[ -\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right] = 26 \frac{2}{3} - \left( -9 \frac{1}{3} \right) = \boxed{36}$$



דוגמה 3. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה  $y = x^2 + 1$  ועל ידי גרף הפונקציה  $y = 3x + 5$ .

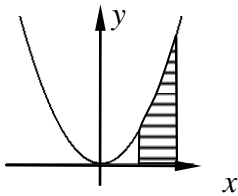


שיעורי ה- $x$  של נקודות החיתוך של הגרפים:  $x^2 + 1 = 3x + 5$  (השוואה)  
 $(a=1, b=4, c=-5) \quad x^2 - 3x - 4 = 0$   

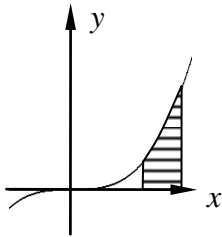
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

שטח המבוקש הוא:  $S = \int_{-1}^4 [(3x+5) - (x^2+1)] dx = \int_{-1}^4 (3x+5-x^2-1) dx = \int_{-1}^4 (-x^2+3x+4) dx =$

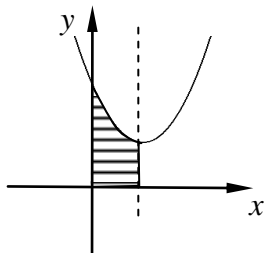
$$= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^4 = \left[ -\frac{4^3}{3} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right] - \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right] = 18\frac{2}{3} - \left( -2\frac{1}{6} \right) = \boxed{20.83}$$



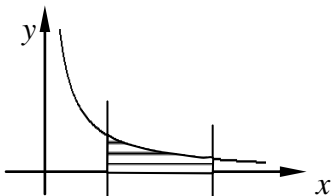
1. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה  $y = 3x^2$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$ ,  $x = 2$ .



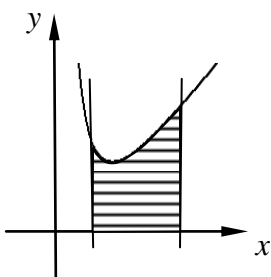
2. חשב את השטח הנמצא מעל ציר ה- $x$  והמוגבל ע"י גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{4}x^3$  והישרים  $x = 2$ ,  $x = 4$ .



3. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה  $y = x^2 - 6x + 10$ , ציר הסימטריה של הפרבולה ושני הצירים.

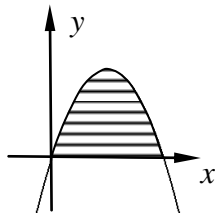


4. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \frac{3}{x^2}$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

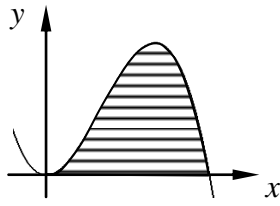


5. חשב את השטח ברביע הראשון, המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $y = x + \frac{1}{x^2}$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$ ,  $x = 2$ .



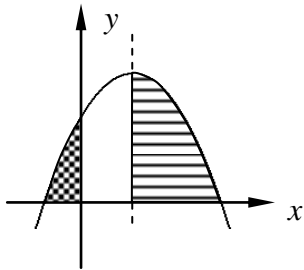


6. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה  $y = -x^2 + 3x$  וציר ה- $x$ .



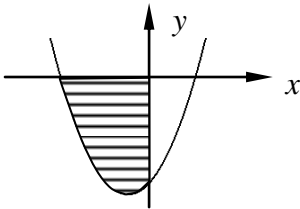
7. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל בין גרף הפונקציה

$$y = -x^3 + x^2 \text{ וציר ה-} x.$$



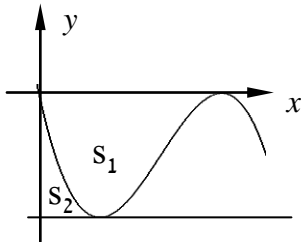
8. נתונה הפרבולה  $y = -x^2 + 2x + 3$ . מעבירים את ציר הסימטריה

של הפרבולה. מצא פי כמה גדול השטח הימני מהשטח השמאלי.



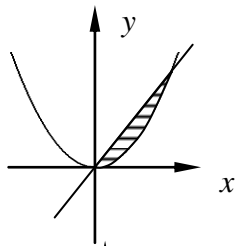
9. חשב את השטח, ברביע השלישי, המוגבל ע"י הפרבולה  $y = 4x^2 + 5x - 6$

והצירים.



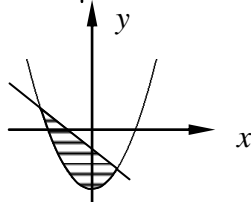
10. דרך נקודת המינימום של הפונקציה  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$  העבירו ישר

המקביל לציר ה- $x$ . חשב את השטחים  $S_1, S_2$ .



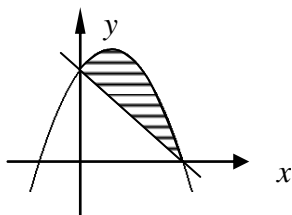
11. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה  $y = \frac{1}{2}x^2$

והישר  $y = x$ .



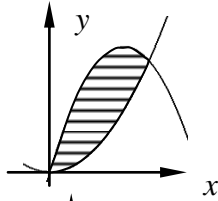
12. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפרבולה  $y = x^2 - 3$

והישר  $y = -x - 1$ .



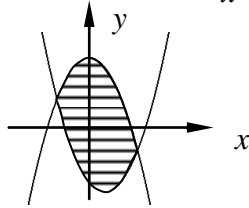
13. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה  $y = -x^2 + 2x + 3$

והישר העובר דרך נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.



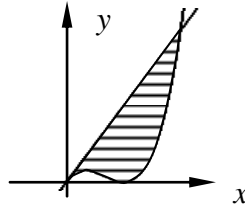
14. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפרבולות

$$. y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = -x^2 + 3x$$



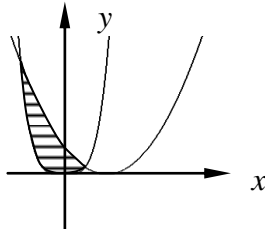
15. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפרבולות

$$. y = x^2 - 2x - 6, \quad y = 6 - x^2$$



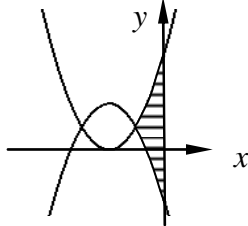
16. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה

$$. y = 4x \quad \text{והישר} \quad y = x^3 - 4x^2 + 4x$$



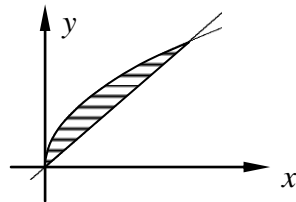
17. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות

$$y = x^4 \quad \text{ו-} \quad y = (x-2)^2 - 1$$



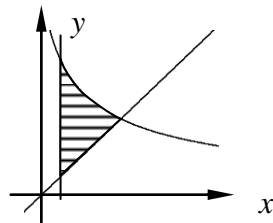
18. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפרבולות

$$. y = -x^2 - 6x - 7, \quad y = (x+3)^2 \quad \text{וציר ה-} y$$



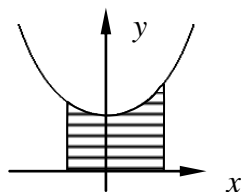
19. חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציה

$$. y = \sqrt{5x} \quad \text{והישר} \quad y = x$$



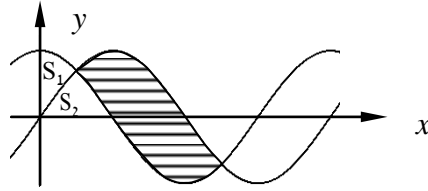
20. חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציה

$$. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y = x, \quad 4x - 1 = 0 \quad \text{והישרים}$$

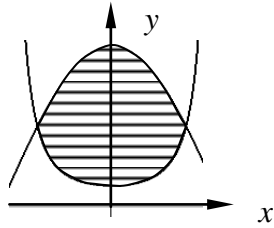


21. חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציה

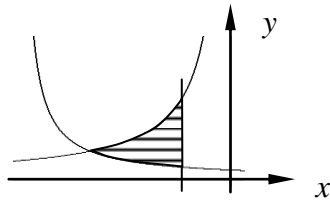
$$. y = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{והישרים} \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{וציר ה-} x$$



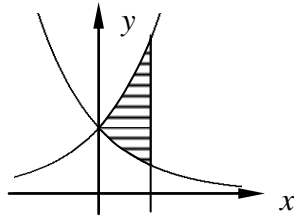
22. נתונות הפונקציות  $y = \cos x$  ,  $y = \sin x$   
 בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 א. מצא את השטח המסומן.  
 ב. מצא את השטחים  $S_1$  ,  $S_2$ .



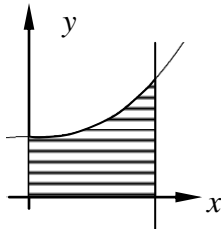
23. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות  
 $y = \frac{1}{\cos^2 x}$  ,  $y = 8 \cos x$   
 בין שתי נקודות החיתוך שלהן הקרובות ביותר לראשית הצירים.



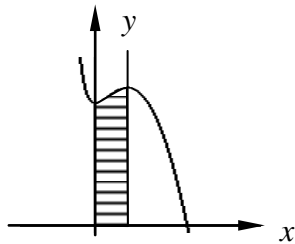
24. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של ההיפרבולות  
 $y = -\frac{1}{x}$  ,  $y = \frac{1}{2x+6}$   
 והישר  $x = -1$ .



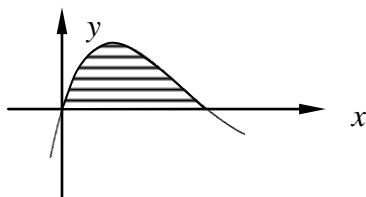
25. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות  
 $y = e^x$  ,  $y = e^{-x}$   
 והישר  $x = 1$ .



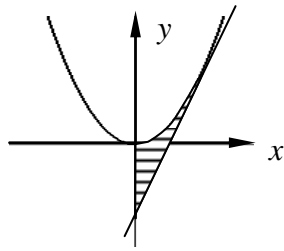
26. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  
 $y = \frac{x^3 + x + 1}{x + 1}$   
 הישר  $x = 2$  והצירים ברביע הראשון.



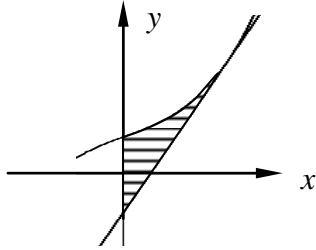
27. נתונה הפונקציה  $y = \frac{-3x^3 + 5x^2 + 8x + 8}{x + 1}$   
 ברביע הראשון.  
 דרך נקודת המקסימום של הפונקציה מעבירים אנך לציר ה- $x$ .  
 חשב את השטח המוגבל בין האנך הנ"ל והצירים.



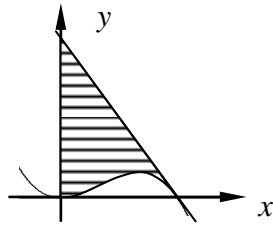
28. נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x + 1}$   
 ברביע הראשון.  
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לבין ציר ה- $x$ .



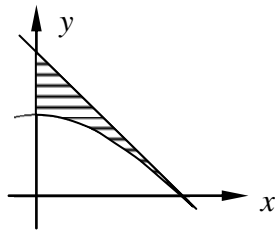
29. לגרף הפרבולה  $y = x^2$  העבירן משיק דרך הנקודה (3,9) שעל הפרבולה.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את השטח המוגבל ע"י הפרבולה, המשיק וציר ה-y.



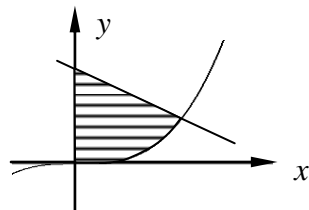
30. לגרף הפרבולה  $y = x^3 + x + 1$  העבירן משיק דרך הנקודה (1,3) שעל הפרבולה.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. מצא את השטח המוגבל ע"י הפרבולה, המשיק וציר ה-y.



31. דרך נקודת החיתוך של הפונקציה  $y = 2x^2 - x^3$  עם ציר ה-x העבירו משיק לגרף הפונקציה. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-y.

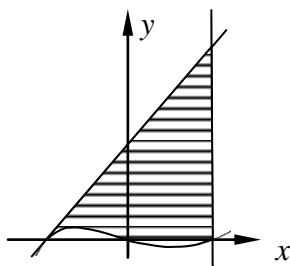


32. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $y = \cos x$ , המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך הקרובה ביותר לראשית של הפונקציה עם ציר ה-x וציר ה-y.



33. מצא את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $y = x^3$ , הנורמל לפונקציה בנקודה (1,1) וציר ה-y.

34. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה  $y = x^2 - 3x + 2$  והנורמל לפרבולה בנקודה (2,0).



35. נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^3 - x}{x + 2}$ .

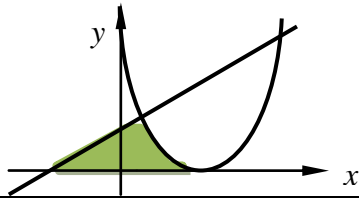
דרך נקודת החיתוך השמאלית של הפונקציה עם ציר ה-x מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל בין המשיק, גרף הפונקציה

והישר המאונך לציר ה-x העובר דרך נקודת החיתוך הימנית של הפונקציה עם ציר ה-x.

2. חישוב השטחים בעזרת יותר מאינטגרל המסוים אחד



דוגמא 3. חשב את השטח המוגבל

בין הגרפים של הפונקציות  $y = x + 3$  ו-  $y = (x - 3)^2$  ובין ציר ה-  $x$ .

שיעורי ה-  $x$  של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $y = x + 3$  עם ציר ה-  $x$ :

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

שיעורי ה-  $x$  של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $y = (x - 3)^2$  עם ציר ה-  $x$ :

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

שיעורי ה-  $x$  של נקודות החיתוך של גרפים הפונקציות:

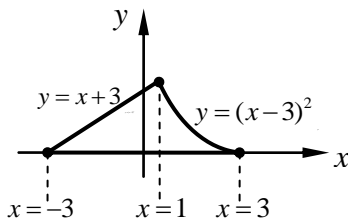
$$(x - 3)^2 = x + 3$$

$$x^2 - 6x + 9 = x + 3$$

$$(a = 1, b = -7, c = 6) \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 6 \quad \text{או} \quad x = 1$$

שטח המבוקש הוא:



$$S = \int_{-3}^1 [(x + 3) - 0] dx + \int_1^3 [(x - 3)^2 - 0] dx =$$

$$= \int_{-3}^1 (x + 3) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x \right]_1^3 = \left[ \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-3}^1 + \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_1^3 =$$

$$= \left[ \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right] - \left[ \frac{(-3)^2}{2} + 3 \cdot (-3) \right] + \left[ \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \right] - \left[ \frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 \right] =$$

$$= 3.5 - (-4.5) + 9 - 6.33 = \boxed{10.67}$$

דוגמא 4. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{16}{x^2} - 1$  בתחום  $x > 0$ . נתון כי הישר  $y = -4x + 11$  משיק לגרף הפונקציה

הנתונה בנקודה שבה  $x = 2$ .

א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה ומשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי המשיק, על-ידי גרף הפונקציה ועל-ידי ציר ה-  $x$ .

נקודת ההשקה:  $x = 2 \iff f(2) = -4 \cdot 2 + 11 = 3$  (2,3)

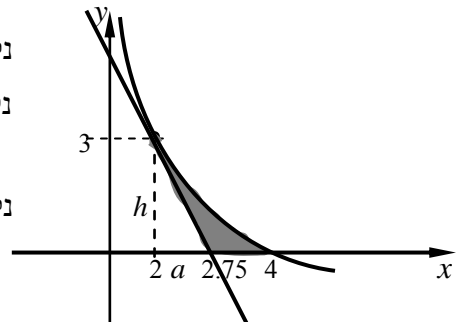
נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-  $x$ :  $-4x + 11 = 0$

$$(2.75, 0) \quad x = 2.75$$

נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-  $x$ :  $\frac{16}{x^2} - 1 = 0$

$$x = \pm 4$$

$$(4, 0) \quad x = 4 \quad (x > 0)$$

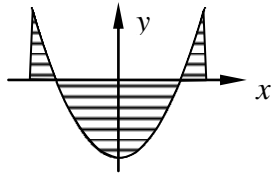


$$\int_2^4 \left( \frac{16}{x^2} - 1 \right) dx = \left[ -\frac{16}{x} - x \right]_2^4 = \left( -\frac{16}{4} - 4 \right) - \left( -\frac{16}{2} - 2 \right) = -8 + 10 = 2$$

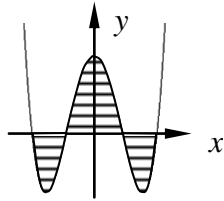
$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(2.75 - 2) \cdot 3}{2} = 1.125$$

$$2 - 1.125 = \boxed{0.875} \quad \text{שטח המבוקש:}$$

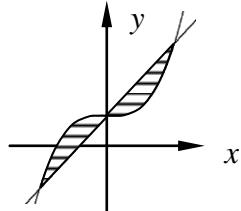
תשובה: 0.875 יח"ר



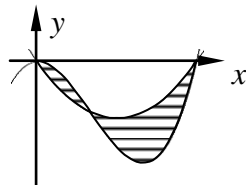
36. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפרבולה  $y = x^2 - 4$  הישרים  $x = -3$ ,  $x = 3$  וציר ה- $x$ .



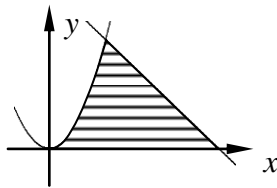
37. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה  $y = x^4 - 5x^2 + 4$  וציר ה- $x$ .



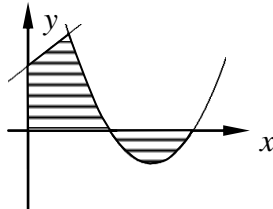
38. חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציה  $y = \frac{1}{4}x^3 + 3$  והישר  $y = x + 3$ .



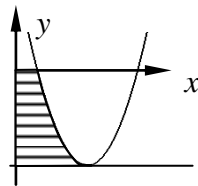
39. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות  $y = x^3 - 3x^2$  ו- $y = x^2 - 3x$ .



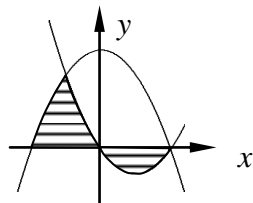
40. חשב את השטח המוגבל בין הפרבולה  $y = x^2$ , הישר  $y = -x + 6$  וציר ה- $x$ .



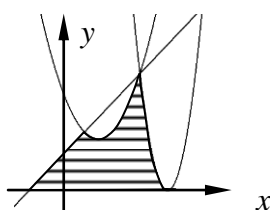
41. נתונים הגרפים של הפונקציות  $y = x^2 - 6x + 8$  ו- $y = x + 2$ . חשב את סכום השטחים המסומנים.



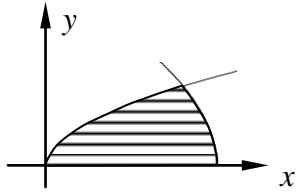
42. דרך קדקוד הפרבולה  $y = x^2 - 8x + 7$  העבירו מקביל לציר ה- $x$ . חשב את השטח המסומן.



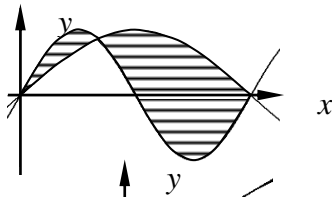
43. בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $y = 4 - x^2$  ו- $y = x^2 - 2x$ . חשב את השטח המסומן.



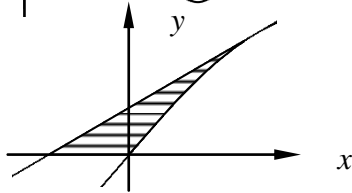
44. בשרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפרבולות  $y = x^2 - 3x + 4$  ו- $y = 4(x - 4)^2$  והישר  $y = x + 1$ . חשב את השטח המסומן.



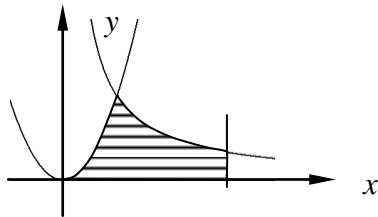
45. חשב את השטח המוגבל ע"י הפונקציות  $y = 2\sqrt{5-x}$  ,  $y = \sqrt{x}$  וציר ה- $x$ .



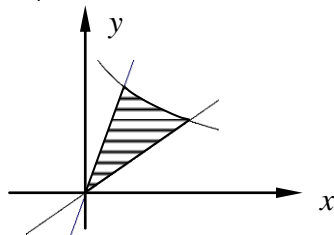
46. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות  $y = \sin x$  ,  $y = \sin 2x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .



47. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות  $y = x + \sin x$  ,  $y = x + 1$  (עד לנקודת המפגש הקרובה ביותר לראשית ברביע הראשון) וציר ה- $x$ .

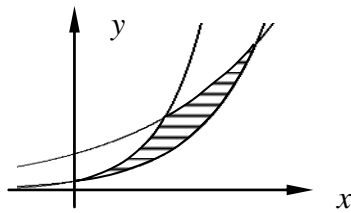


48. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות  $y = \frac{4}{x}$  ,  $y = \frac{1}{2}x^2$  , ציר ה- $x$  והישר  $x = 2e$ .

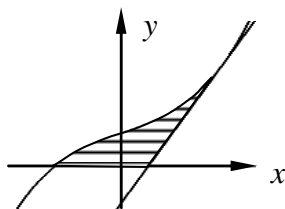


49. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף ההיפרבולה  $y = \frac{1}{x}$  והישרים  $y = ex$  ,  $y = \frac{x}{e}$  , הנמצא ברביע הראשון.

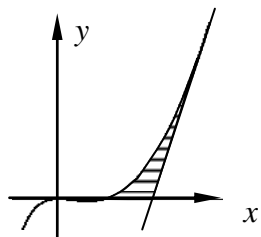
50. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות  $y = 2e^x$  ,  $y = 5 - 2e^{-x}$ .



51. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות  $y = e^{3x}$  ,  $y = e^{2x}$  ,  $y = 4e^x$ .



52. לגרף הפונקציה  $y = x^3 + 1$  העבירו משיק בנקודה  $x = 1$ . חשב את השטח המוגבל בין המשיק, הפונקציה וציר ה- $x$ .



53. לגרף הפונקציה  $y = \frac{x^3 - x^2}{x + 2}$  העבירו משיק בנקודה  $x = 4$ .

א. מצא את משוואת המשיק.  
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .

- $11\frac{1}{3}$  .9     $3\frac{1}{5}$  .8     $\frac{1}{12}$  .7     $4\frac{1}{2}$  .6    2.5    2.4    12.3    15.2    7.1  
 $21\frac{1}{3}$  .16     $41\frac{2}{3}$  .15    2.14     $4\frac{1}{2}$  .13     $4\frac{1}{2}$  .12     $\frac{2}{3}$  .11     $1\frac{1}{4}$  ,  $6\frac{3}{4}$  .10  
 $\sqrt{3}+1$  .21     $\frac{17}{32}$  .20     $4\frac{1}{6}$  .19     $13\frac{1}{3}$  .18     $14\frac{2}{5}$  .17  
 $\frac{(e-1)^2}{e}$  .25     $\ln\sqrt{2}$  .24     $6\sqrt{3}$  .23     $S_2 = 2 - \sqrt{2}$  ,  $S_1 = \sqrt{2} - 1$  .ב     $2\sqrt{2}$  .א .22  
 $\frac{3}{4}$  .ב     $y = 4x - 1$  .א .30    9 .ב     $y = 6x - 9$  .א .29    0.17 .28    8.545 .27    3.568 .26  
 $15\frac{1}{3}$  .36    3.925 .ב     $y = 2x + 2$  .א .35     $1\frac{1}{3}$  .34     $\frac{11}{12}$  .33     $\frac{\pi^2}{8} - 1$  .32     $6\frac{2}{3}$  .31  
 $6\frac{2}{3}$  .45    8.44     $4\frac{1}{3}$  .43    18.42     $5\frac{1}{6}$  .41     $10\frac{2}{3}$  .40     $3\frac{1}{12}$  .39    2.38    8.37  
 $1\frac{1}{3}$  .52     $2\frac{5}{6}$  .51     $10\ln 2 - 6$  .50    1.49     $5\frac{1}{3}$  .48     $\frac{\pi-1}{2}$  .47     $2\frac{1}{2}$  .46  
2.18 .ב     $y = 5\frac{1}{3}x - 13\frac{1}{3}$  .א .53



# נספח

## I. אלגברה

### א. קבוצות המספרים

**הגדרה.** ציר המספרים הוא קו ישר, בו מסומנות שתי נקודות: אחת מתאימה למספר 0 ושנייה למספר 1.

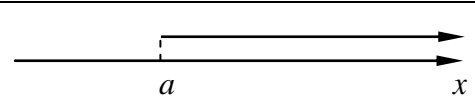
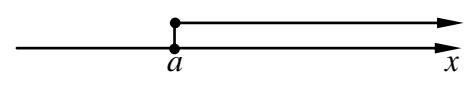
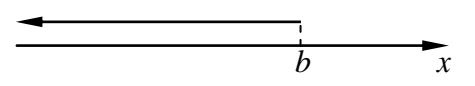
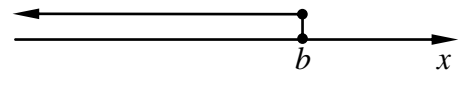
**הערה.** ניתן לסמן על ציר המספרים מספר ממשי כלשהו.

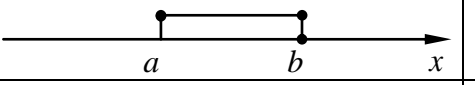
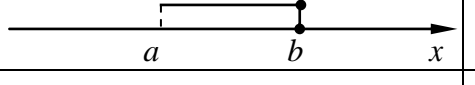
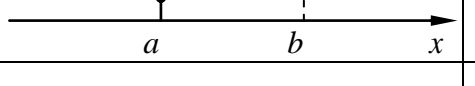
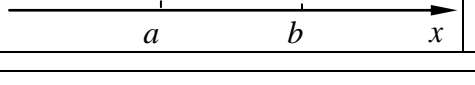
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	1. קבוצת המספרים הטבעיים
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	2. קבוצת המספרים השלמים
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$	3. קבוצת המספרים הרציונאליים
$\mathbb{R} = \left\{ \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_k \dots} \mid \text{כל ציר המספרים} \right\}$	4. קבוצת המספרים הממשיים
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	5. קבוצת המספרים מרוכבים

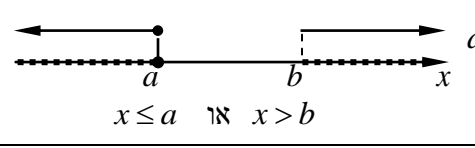
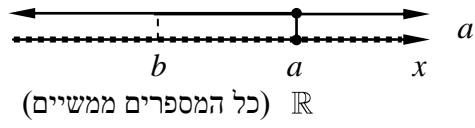
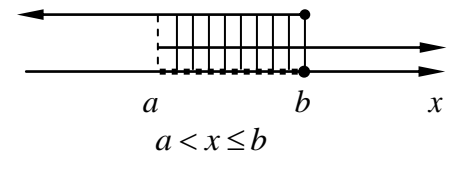
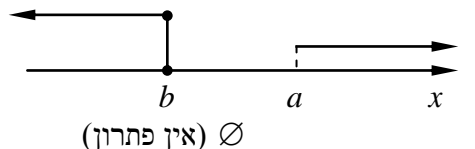
### 6. פעולות בקבוצות

שם המושג	סימון	תיאור	דיאגרמת אוילר-וין
א. קבוצה ריקה	$\emptyset$	קבוצה ריקה היא קבוצה שאין לה שום איבר.	
ב. שייכות לקבוצה	$\in$	$a \in A$ (איבר $a$ שייך לקבוצה $A$ ). $b \notin A$ (איבר $b$ לא שייך לקבוצה $A$ ).	
ד. קבוצה חלקית	$\subset$	$B \subset A$ (קבוצה $B$ היא קבוצה חלקית של קבוצה $A$ ). כל איברי הקבוצה החלקית (קבוצה $B$ ) שייכים לקבוצה $A$ . $B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$	
ה. איחוד של קבוצות	$\cup$	$A \cup B$ (איחוד הקבוצות $A$ ו- $B$ ). איחוד הקבוצות כולל כל האיברים השייכים לפחות לאחת מהקבוצות: לקבוצה ראשונה או לקבוצה שנייה. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$ $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	
ו. חיתוך של קבוצות	$\cap$	$A \cap B$ (חיתוך הקבוצות $A$ ו- $B$ ). חיתוך הקבוצות כולל כל איברים השייכים לשתי הקבוצות: לקבוצה ראשונה וגם לקבוצה שנייה. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ וגם } x \in B\}$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	

7. קבוצות נקודות (מספרים) על ציר המספרים

א. קטעים אינסופיים	
	1. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים ימינה מ- $a$ . $x > a \leftrightarrow x \in (a, +\infty)$
	2. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים ימינה מ- $a$ כולל $a$ . $x \geq a \leftrightarrow x \in [a, +\infty)$
	3. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים שמאלה מ- $b$ . $x < b \leftrightarrow x \in (-\infty, b)$
	4. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים שמאלה מ- $b$ כולל $b$ . $x \leq b \leftrightarrow x \in (-\infty, b]$

ב. קטעים סופיים (אי שוויון כפול)	
	1. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים בין $a$ לבין $b$ כולל קצוות. $a \leq x \leq b \leftrightarrow x \in [a, b]$
	2. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים בין $a$ לבין $b$ כולל קצה ימני. $a < x \leq b \leftrightarrow x \in (a, b]$
	3. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים בין $a$ לבין $b$ כולל קצה שמאלי. $a \leq x < b \leftrightarrow x \in [a, b)$
	4. קבוצת המספרים על ציר ה- $x$ הנמצאים בין $a$ לבין $b$ לא כולל קצוות. $a < x < b \leftrightarrow x \in (a, b)$

ג. פעולות בקטעים על ציר ה- $x$	
<p>I. <math>a &lt; b</math></p>  <p><math>x \leq a</math> או <math>x &gt; b</math></p>	<p>1. קבוצת המספרים על ציר ה-<math>x</math> הנמצאים ימינה מ-<math>b</math> או שמאלה מ-<math>a</math> כולל <math>a</math> (איחוד קבוצות).  <math display="block">\begin{cases} x &gt; b \\ x \leq a \end{cases} \leftrightarrow (x \leq a \vee x &gt; b)</math> <b>הערה.</b> קבוצות המספרים באיחוד הקבוצות (מערכת "או") מסומנות באותו מרחק מציר המספרים.</p>
<p>II. <math>a \geq b</math></p>  <p><math>\mathbb{R}</math> (כל המספרים ממשיים)</p>	
<p>I. <math>a &lt; b</math></p>  <p><math>a &lt; x \leq b</math></p>	<p>2. קבוצת המספרים על ציר ה-<math>x</math> הנמצאים שמאלה מ-<math>b</math> כולל <math>b</math> וגם ימינה מ-<math>a</math> (חיתוך קבוצות).  <math display="block">\begin{cases} x \leq b \\ x &gt; a \end{cases} \leftrightarrow (x &gt; a \wedge x \leq b)</math> <b>הערה.</b> קבוצות המספרים בחיתוך הקבוצות (מערכת "וגם") מסומנות במרחקים שונים מציר המספרים.</p>
<p>II. <math>a \geq b</math></p>  <p><math>\emptyset</math> (אין פתרון)</p>	

## ב. חזקות

### 1. הגדרות החזקה $a^b = c$

$a^b = c$ - a בסיס החזקה, - b מעריך החזקה, - c חזקה.		
$5^1 = 5, 0^1 = 0, (\sqrt{2}-3)^1 = \sqrt{2}-3$	$a^1 = a$	1. חזקה עם מעריך 1: $b = 1$
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ $(a-b)^3 = (a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$	$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (מכפלה בת n גורמים)	2. חזקות בעלות מעריך טבעי ושונה מ-1: $b = 2, 3, 4, \dots$
$6^0 = 1, (-5)^0 = 1, (\pi+3)^0 = 1$	$(a \neq 0), a^0 = 1$	3. חזקה עם מעריך 0: $b = 0$
$x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}, 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32},$ $\left(\frac{5}{-4}\right)^{-3} = \left(\frac{-4}{5}\right)^3 = -\frac{64}{125}$	$(a \neq 0), a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	4. חזקות בעלות מעריך שלם שלילי: $b = -1, -2, -3, \dots$
$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, t^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{t^3}$ $32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = 4$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (כאשר n זוגי: $a^m \geq 0$ ) (כאשר m שלילי: $a \neq 0$ )	5. חזקות בעלות מעריך רציונאלי: $b = \frac{m}{n}$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 2, 3, 4, \dots$

### 2. פעולות בחזקות ופירוק חזקות

$(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$	<b>פירוק החזקות</b>	$a_1^b \cdot a_2^b = (a_1 \cdot a_2)^b$	<b>כפל וחילוק חזקות בעלי אותו מעריך</b>
$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}$		$\frac{a_1^b}{a_2^b} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^b$	
$a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \cdot a^{b_2}$	<b>פירוק החזקות</b>	$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	<b>כפל וחילוק חזקות בעלי אותו בסיס</b>
$a^{b_1-b_2} = \frac{a^{b_1}}{a^{b_2}}$		$\frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2}$	
$a^{p \cdot b} = (a^b)^p$	<b>פירוק החזקות</b>	$(a^b)^p = a^{p \cdot b}$	<b>העלאת חזקה בחזקה</b>

ג. שורשים

1. הגדרות השורש  $\sqrt[n]{c}$

$\sqrt[n]{c} = a$		
$n$ – שורש, $n$ – סדר השורש, $c$ – מספר מתוך השורש.		
$3 \geq 0$ וגם $3^2 = 9$ , $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{-4}$ לא קיים, כי $-4 < 0$ . $0 \geq 0$ וגם $0^2 = 0$ , $\sqrt{0} = 0$	$(c \geq 0) \sqrt{c} = a$ $\Updownarrow$ $a \geq 0$ וגם $a^2 = c$	1. שורש ריבועי ( $n=2$ ) של מספר אי-שלילי $c$ הוא מספר אי-שלילי $a$ , אשר בריבוע שווה ל- $c$ .
$2 \geq 0$ וגם $2^4 = 16$ , $\sqrt[4]{16} = 2$ $\sqrt[6]{-1}$ לא קיים, כי $-1 < 0$ . $0 \geq 0$ וגם $0^8 = 0$ , $\sqrt[8]{0} = 0$	$(c \geq 0) \sqrt[2k]{c} = a$ $\Updownarrow$ $a \geq 0$ וגם $a^{2k} = c$	2. שורש מסדר זוגי ( $n=2k$ ) של מספר אי-שלילי $c$ הוא מספר אי-שלילי $a$ , אשר בחזקה $n$ שווה ל- $c$ .
$2^3 = 8$ , כי $\sqrt[3]{8} = 2$ $(-2)^3 = -8$ , כי $\sqrt[3]{-8} = -2$ $0^5 = 0$ , כי $\sqrt[5]{0} = 0$	$^{2k+1}\sqrt{c} = a$ $\Updownarrow$ $a^{2k+1} = c$	3. שורש מסדר אי-זוגי ( $n=2k+1$ ) של מספר $c$ הוא מספר $a$ , אשר בחזקה $n$ שווה ל- $c$ .

2. זהויות

$(\sqrt[n]{c})^n = \begin{cases} c, & n=2k+1 \\ c, & n=2k, c \geq 0 \end{cases}$ : חזקה של שורש: 2 $(\sqrt[2k+1]{c})^{2k+1} = c$ $(\sqrt[2k]{c})^{2k} = c : c \geq 0$ $(\sqrt{c})^2 = c : c \geq 0$	1. שורש של חזקה: 1 $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n=2k+1 \\  a , & n=2k \end{cases}$ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ $\sqrt[2k]{a^{2k}} =  a $ $\sqrt{a^2} =  a $
---	---

3. פעולות בשורשים ופירוק שורשים

$\sqrt[n]{c_1 \cdot c_2} = \sqrt[n]{c_1} \cdot \sqrt[n]{c_2}$	פירוק שורשים	$\sqrt[n]{c_1} \cdot \sqrt[n]{c_2} = \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2}$	כפל וחילוק שורשים מאותו סדר
$\sqrt[n]{\frac{c_1}{c_2}} = \frac{\sqrt[n]{c_1}}{\sqrt[n]{c_2}}$		$\frac{\sqrt[n]{c_1}}{\sqrt[n]{c_2}} = \sqrt[n]{\frac{c_1}{c_2}}$	
$k \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{c}}$		$\sqrt[k]{\sqrt[n]{c}} = k \cdot \sqrt[n]{c}$	הוצאת השורש משורש

$c \cdot \sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{c^{2k}} \cdot \sqrt[2k]{b} = \sqrt[2k]{c^{2k} \cdot b}, & c \geq 0 \\ -\sqrt[2k]{c^{2k}} \cdot \sqrt[2k]{b} = -\sqrt[2k]{c^{2k} \cdot b}, & c < 0 \end{cases}$	$c \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{c^2 \cdot b}, & c \geq 0 \\ -\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{c^2 \cdot b}, & c < 0 \end{cases}$ <b>הערה.</b>
$c \cdot \sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{c^{2k+1}} \cdot \sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{c^{2k+1} \cdot b}$	$c \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c^3} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c^3 \cdot b}$

## ד. לוגריתמים

### 1. הגדרת הלוגריתם $\log_a c$

$\log_a c = b$			
$a$ – בסיס הלוגריתם, $-b$ לוגריתם, $c$ – מספר מתוך הלוגריתם.			
$(a > 0, a \neq 1 \text{ וגם } c > 0)$		$\log_a c = b$ $\Updownarrow$ $a^b = c$	<b>לוגריתם של מספר חיובי <math>c</math> לפי בסיס <math>a</math> (חיובי ושונה מ-1) הוא מעריך <math>b</math>, בו צריך לעלות את הבסיס <math>a</math> כדי לקבל <math>c</math>.</b>
$\log_2 \sqrt{2} = 0.5$ $\Updownarrow$ $2^{0.5} = \sqrt{2}$	$\log_5 1 = 0$ $\Updownarrow$ $5^0 = 1$	$\log_{0.5} 8 = -3$ $\Updownarrow$ $0.5^{-3} = 8$	$\log_3 9 = 2$ $\Updownarrow$ $3^2 = 9$
$\log c = b$ (לוגריתם של מספר $c$ לפי בסיס 10)			
$a = 10$ – בסיס הלוגריתם,			
$\ln c = b$ (לוגריתם של מספר $c$ לפי בסיס $e$ )			
$a = e$ – בסיס הלוגריתם, ( $e = 2.71828\dots$ )			

### 2. זהויות

$a^{\log_a c} = c$ .2 מספר חיובי $c$ ניתן להציג כחזקה	$\log_a a^b = b$ .1 מספר כלשהו $b$ ניתן להציג כלוגריתם
--	---

### 3. פעולות בלוגריתמים ופירוק לוגריתמים

$\log_a (c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$	פירוק לוגריתמים	$\log_a c_1 + \log_a c_2 = \log_a (c_1 \cdot c_2)$	חיבור וחיסור לוגריתמים לפי אותו בסיס
$\log_a \frac{c_1}{c_2} = \log_a c_1 - \log_a c_2$		$\log_a c_1 - \log_a c_2 = \log_a \frac{c_1}{c_2}$	
$\log_a c^p = p \cdot \log_a c$ הערה: $\log_a c^{2n} = 2n \log_a  c $		$p \cdot \log_a c = \log_a c^p$	כפל לוגריתם במספר

### 4. מעבר מלוגריתם לפי בסיס אחד ללוגריתם לפי בסיס אחר

$\log_a c = \frac{\log_m c}{\log_m a}$
$\log_a c = \frac{\log c}{\log a} = \frac{\ln c}{\ln a} = \log_{a^p} c^p = \frac{1}{\log_c a}$

### ה. תכונות של ערך מוחלט

ערך מוחלט של מספר כלשהו הוא מספר אי-שלילי	א. $ A  \geq 0$
ריבוע של ערך מוחלט של מספר כלשהו שווה לריבוע המספר	ב. $ A ^2 = A^2$
ערך מוחלט של מספר כלשהו שווה לשורש ריבועי של ריבוע המספר	ג. $ A  = \sqrt{A^2}$
ערך מוחלט של מספרים נגדיים שווה	ד. $ -A  =  A $

### ו. סדרות

סדרה I כללית	1. סדרה היא קבוצה מסודרת של מספרים (לכל אחד מהמספרים יש מקום מסוים). $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ איבר ה-(n+1) איבר ה-n-י איבר ה-(n-1) ... איבר שלישי איבר שני איבר ראשון
	2. סדרה היא פונקציה של משתנה טבעי (פונקציה מוגדרת בקבוצת המספרים טבעיים: 1, 2, 3, ...). (איבר הסדרה) $n \xrightarrow{f} a_n$ (המקום האיבר) (תמונה) $x \xrightarrow{f} y$ (מקור) $a_n = f(n)$ (נוסחת האיבר הכללי) $y = f(x)$ (כלל ההתאמה)
	3. כלל נסיגה הוא תיאור הסדרה על ידי האיבר הראשון (או יותר): $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = g(a_n) \end{cases}$ ונוסחת המעבר לאיבר הבא:
	4. 1. סדרה סופית בת חמישה איברים: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 2. סדרה סופית בת n איברים: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ 3. סדרה סופית בת 2n איברים (מספר זוגי): $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ (איברי הסדרה הנמצאים במקומות זוגיים: $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ ) (איברי הסדרה הנמצאים במקומות אי-זוגיים: $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ ) ( $a_{n+1}$ ו- $a_n$ הם שני האיברים האמצעיים) $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \boxed{a_n, a_{n+1}}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ 4. סדרה סופית בת 2n+1 איברים (מספר אי-זוגי): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ ( $a_{n+1}$ הוא האיבר האמצעי) $a_1, a_2, \dots, a_n, \boxed{a_{n+1}}, a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ 5. סדרה אינסופית: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$
	5. 1. סדרה עולה, אם כל איבר הבא גדול מהאיבר הקודם, כלומר: $a_n < a_{n+1}$ . 2. סדרה יורדת, אם כל איבר הבא קטן מהאיבר הקודם, כלומר: $a_n > a_{n+1}$ .
	6. $S_n$ מסמן את סכום של n האיברים הראשונים בסדרה: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ $S_1 = a_1$ $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $S_{15} = a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$ $S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \Rightarrow S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow \boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$

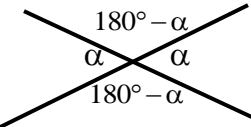
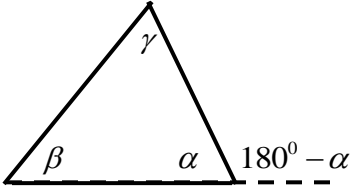
<p>1. סדרה חשבונית היא הסדרה שבה הוספת מספר קבוע לכל איבר נותן את האיבר הבא.</p> $(n=1,2,3,\dots) \quad a_{n+1} = a_n + d$ $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1}$	<p>II סדרה חשבונית</p> <p>גדלים יסודיים:</p> $a_1, d, n$
<p>2. נוסחת האיבר הכללי</p> $a_k \xrightarrow{+d} a_{k+1} \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$ <p style="text-align: center;"><math>+(n-k)d</math></p> $a_n = a_k + (n-k)d$ $a_n = a_1 + (n-1)d$	
<p>3. הפרש של סדרה חשבונית <math>\leftarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = d</math></p> <p style="text-align: center;"><math>d &gt; 0 \leftarrow</math> סדרה עולה , <math>d &lt; 0 \leftarrow</math> סדרה יורדת</p>	
<p>4. בסדרה חשבונית <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots</math> שהפרשה <math>d</math>:</p> <p>1. איברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים <math>a_1, a_3, a_5, \dots</math> מהווים סדרה חשבונית שהפרשה <math>2d</math>.</p> $a_1 \xrightarrow{+2d} a_3 \xrightarrow{+2d} a_5 \xrightarrow{+2d} \dots$ <p>2. איברים הנמצאים במקומות הזוגיים <math>a_2, a_4, a_6, \dots</math> מהווים סדרה חשבונית שהפרשה <math>2d</math>.</p> $a_2 \xrightarrow{+2d} a_4 \xrightarrow{+2d} a_6 \xrightarrow{+2d} \dots$ <p>3.</p> $a_1 \xrightarrow{+3d} a_4 \xrightarrow{+3d} a_7 \xrightarrow{+3d} \dots$ <p>4.</p> $(a_1 + a_2) \xrightarrow{+2d} (a_2 + a_3) \xrightarrow{+2d} (a_3 + a_4) \xrightarrow{+2d} \dots$ <p>5.</p> $(a_1 + a_2) \xrightarrow{+4d} (a_3 + a_4) \xrightarrow{+4d} (a_5 + a_6) \xrightarrow{+4d} \dots$	
<p>5. תכונה אופיינית של סדרה חשבונית: <math>2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}</math> <math>\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}</math> (ממוצע חשבוני)</p>	
<p>6. סכום האיברים של סדרה חשבונית</p> <p>1. בסדרה חשבונית בת <math>n</math> איברים <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n</math> שהפרשה <math>d</math>:</p> <p>* סכום <math>n</math> האיברים הראשונים <math>S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2}</math></p> <p>** סכום <math>n-1</math> האיברים הראשונים <math>S_{n-1} = [2a_1 + (n-2)d] \frac{n-1}{2}</math></p> <p>*** סכום <math>n-1</math> האיברים האחרונים <math>T_{n-1} = [2a_2 + (n-2)d] \frac{n-1}{2}</math></p> <p>2. בסדרה חשבונית בת <math>2n</math> איברים <math>a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}</math> שהפרשה <math>d</math>:</p> <p>* סכום <math>n</math> האיברים האחרונים: <math>T_n = S_{2n} - S_n</math>, <math>T_n = [2a_{n+1} + (n-1)d] \frac{n}{2}</math></p> $\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}}_{T_n = S_n + n^2 d}$ <p>** סכום <math>n</math> האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים <math>Z_n = [2a_2 + (n-1)2d] \frac{n}{2}</math></p> <p>*** סכום <math>n</math> האיברים הנמצאים במקומות אי-זוגיים <math>I_n = [2a_1 + (n-1)2d] \frac{n}{2}</math></p> $\underbrace{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-3} + a_{2n-1}}_{I_n} + \underbrace{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n}}_{Z_n = I_n + nd}$	

<p>1. סדרה הנדסית היא סדרה שבה כפל של כל איבר במספר קבוע נותן את האיבר הבא.  <math>(n=1,2,3,\dots) \quad a_{n+1} = a_n \cdot q</math>  <math>a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} a_3 \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q} a_{n-1} \xrightarrow{\cdot q} a_n</math></p>	<p>III סדרה הנדסית גדלים יסודיים: <math>a_1, q, n</math></p>
<p>2. נוסחת האיבר הכללי  <math>a_k \xrightarrow{\cdot q} a_{k+1} \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q} a_{n-1} \xrightarrow{\cdot q} a_n</math>  <math>a_n = a_k \cdot q^{n-k}</math>      <math>a_n = a_1 \cdot q^{n-1}</math></p>	
<p>3. מנה של סדרה הנדסית <math>\leftarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q</math>  <math>a_1 &gt; 0, q &gt; 1 \Leftarrow</math> סדרה עולה, <math>0 &lt; q &lt; 1 \Leftarrow</math> סדרה יורדת.  <math>a_1 &lt; 0, q &gt; 1 \Leftarrow</math> סדרה יורדת, <math>0 &lt; q &lt; 1 \Leftarrow</math> סדרה עולה.  <math>q &lt; 0 \Leftarrow</math> סדרה לא עולה ולא יורדת</p>	
<p>4. בסדרה הנדסית <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots</math> שמנתה <math>q</math>:  1. איברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים <math>a_1, a_3, a_5, \dots</math> מהווים סדרה הנדסית שמנתה <math>q^2</math>.  <math>a_1 \xrightarrow{\cdot q^2} a_3 \xrightarrow{\cdot q^2} a_5 \xrightarrow{\cdot q^2} \dots</math>  2. איברים הנמצאים במקומות הזוגיים <math>a_2, a_4, a_6, \dots</math> מהווים סדרה הנדסית שמנתה <math>q^2</math>.  <math>a_2 \xrightarrow{\cdot q^2} a_4 \xrightarrow{\cdot q^2} a_6 \xrightarrow{\cdot q^2} \dots</math>  3. <math>(a_1 + a_2) \xrightarrow{\cdot q^2} (a_3 + a_4) \xrightarrow{\cdot q^2} (a_5 + a_6) \xrightarrow{\cdot q^2} \dots</math></p>	
<p>5. תכונה אופיינית של סדרה הנדסית: <math>a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1} \Leftarrow a_n &gt; 0, a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}</math> (ממוצע הנדסי)</p>	
<p>6. סכום האיברים של סדרה הנדסית  1. בסדרה הנדסית בת <math>n</math> איברים <math>a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n</math> שמנתה <math>q</math>:  * סכום <math>n</math> האיברים הראשונים <math>S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}</math>  ** סכום <math>n-1</math> האיברים הראשונים <math>S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}</math>  *** סכום <math>n-1</math> האיברים האחרונים <math>T_{n-1} = \frac{a_2(q^{n-1} - 1)}{q - 1}</math>  2. בסדרה חשבונית בת <math>2n</math> איברים <math>a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}</math> שמנתה <math>q</math>:  * סכום <math>n</math> האיברים האחרונים: <math>T_n = S_{2n} - S_n, T_n = \frac{a_{n+1}(q^n - 1)}{q - 1}</math>  <math>a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n</math>      <math>a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}</math>  <math>S_n</math>      <math>T_n = S_n \cdot q^n</math>  ** סכום <math>n</math> האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים <math>Z_n = \frac{a_2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}</math>  *** סכום <math>n</math> האיברים הנמצאים במקומות אי-זוגיים <math>I_n = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}</math>  <math>a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-3} + a_{2n-1}</math>      <math>a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n}</math>  <math>I_n</math>      <math>Z_n = I_n \cdot q</math></p>	



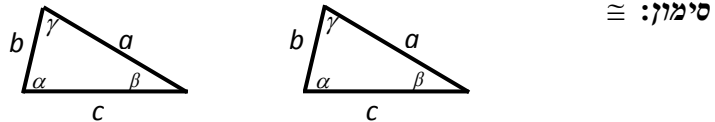
## II. גיאומטריה במישור (הגדרות והמשפטים)

### א. זוויות

1. זוויות קודקודיות שוות זו לזו. 
2. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל-180°. 
3. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
4. במשולש, מול זוויות שוות מונחת צלעות שוות.
5. במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
6. במשולש (שאינו שווה זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
7. סכום הזוויות של משולש הוא 180°.  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  
8. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.  $180^\circ - \alpha = \beta + \gamma$

### ב. משולשים חופפים

הגדרה: שני משולשים נקראים **חופפים**, אם צלעות שלהם שוות בהתאמה וגם זוויות שלהם שוות בהתאמה.



9. משפט חפיפה צ.צ.צ: אם בשני משולשים שלוש צלעות שוות בהתאמה, אז הם משולשים חופפים.
10. משפט חפיפה צ.ז.צ: אם בשני משולשים שתי צלעות וזווית ביניהן שוות בהתאמה, אז הם משולשים חופפים.
11. משפט חפיפה ז.צ.ז: אם בשני משולשים צלע אחת ושתי זוויות שלידה שוות בהתאמה, אז הם משולשים חופפים.
12. משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים: אם בשני משולשים שתי צלעות וזווית מול הצלע הגדולה שוות בהתאמה, אז הם משולשים חופפים.

### ג. ישרים מקבילים

הגדרה: שני ישרים במישור נקראים **מקבילים**, אם אין להם אף נקודה משותפת.

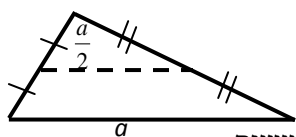
סימון:  $\parallel$

13. שני ישרים  $l_1$  ו- $l_2$  נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.
14. שני ישרים  $l_1$  ו- $l_2$  נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים.
15. שני ישרים  $l_1$  ו- $l_2$  נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חז-צדדיות הוא  $180^\circ$ , אז הישרים מקבילים.

16. אם שני ישרים מקבילים  $l_1 \parallel l_2$  נחתכים על ידי ישר שלישי אז:
  - א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו ( $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$ ,  $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$ ,  $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 7$ ,  $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$ , ...).
  - ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו ( $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 8$ ,  $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$ , ...).
  - ג. סכום כל זוג זוויות חז-צדדיות הוא  $180^\circ$  ( $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180^\circ$ , ...).

**ד. קטע אמצעים**

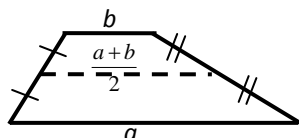
הגדרה. קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר את האמצעים של שתי צלעות במשולש.



17. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

18. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שניה, חוצה את הצלע השלישית.

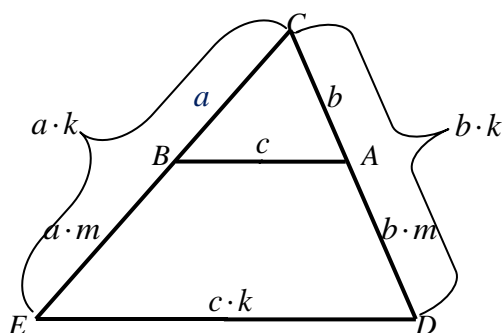
19. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.



הגדרה. קטע האמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את האמצעים של שתי שוקי הטרפז.

20. קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

21. בטרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה.



22. משפט תאלס: אם שני ישרים מקבילים חותכים את שוקי הזווית

(או משכם), אז הם מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BE}, \quad \frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

23. משפט תאלס המורחב: שני ישרים מקבילים החותכים את שוקי הזווית

(או משכם), מקצים בזווית משולשים עם צלעות פרופורציוניות בהתאמה.

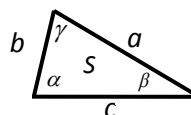
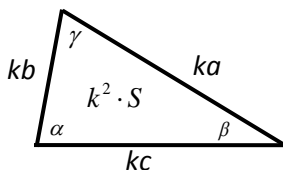
$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

24. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.

**ה. משולשים דומים**

הגדרה: שני משולשים דומים, אם צלעות שלהם פרופורציוניות בהתאמה וזוויות שלהם שוות בהתאמה.

$k$  הוא יחס הדמיון



סימון: ~

25. משפט דמיון צ.צ.צ. אם בשני משולשים שלוש צלעות פרופורציוניות בהתאמה, אז הם משולשים דומים.

26. משפט דמיון צ.ז.צ. אם בשני משולשים שתי צלעות פרופורציוניות בהתאמה וזווית ביניהן שוות, אז הם משולשים דומים.

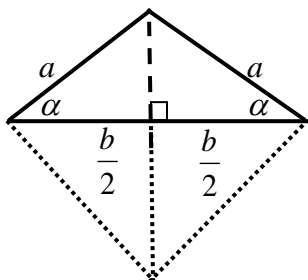
27. משפט דמיון ז.ז.ז. אם בשני משולשים שתי זוויות שוות בהתאמה, אז הם משולשים דומים.

28. במשולשים דומים:

- א. יחס הגבהים, חוצי הזוויות, התיכונים מתאימים וההיקפים שווה ליחס הדמיון.
- ב. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים והחסומים שווה ליחס הדמיון.
- ג. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.

**ו. משולש שווה שוקיים**

הגדרה. משולש הוא משולש שווה שוקיים אם שתי צלעות המשולש שוות.



29. במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

30. במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.

31. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

32. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

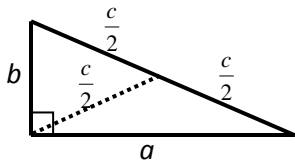
33. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

34. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו.

**ז. משולש ישר זווית**

35. **משפט פיתגורס:** במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.  $a^2 + b^2 = c^2$

36. **משפט פיתגורס ההפוך:** משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.



37. במשולש ישר זווית **התיכון ליתר** שווה למחצית היתר.

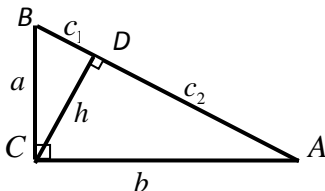
38. משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זווית.

39. אם במשולש ישר זווית, זווית חדה של  $30^\circ$ , אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.

40. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה  $30^\circ$ .

$$a^2 = c \cdot c_1, b^2 = c \cdot c_2$$

$$h^2 = c_1 \cdot c_2$$



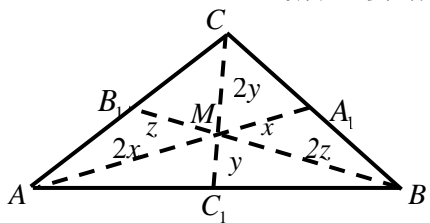
41. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.

42. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.

$$\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

**ח. נקודות וישרים מיוחדים במשולש**

**הגדרה. תיכון** במשולש הוא קטע המחבר את קדקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.

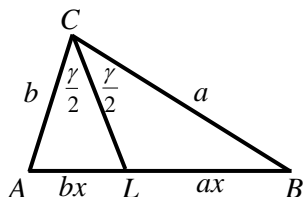


43. שלושת ה**תיכונים** במשולש נפגשים בנקודה אחת  $M$ .

נקודת החיתוך של התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1 מהקדקוד (החלק הקרוב לקדקוד הוא פי 2 מהחלק האחר).

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2 \Rightarrow AM = \frac{2}{3} \cdot AA_1, MA_1 = \frac{1}{3} \cdot AA_1$$

**הגדרה. חוצה זווית** במשולש הוא קטע המחבר את קדקוד המשולש עם נקודה בצלע שמולו ומחלק את זווית המשולש לשתי זוויות שוות.

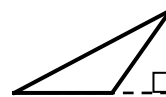
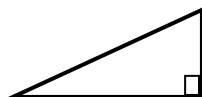
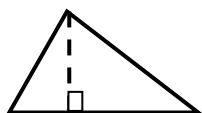


43. **חוצה זווית פנימית** במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

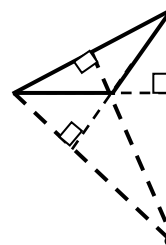
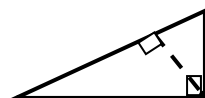
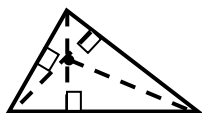
$$\frac{AL}{LB} = \frac{CA}{CB}$$

44. ישר העובר דרך קדקוד המשולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.

**הגדרה. גובה** במשולש הוא **אנך** מקדקוד המשולש לצלע שמולו (או להמשכה).

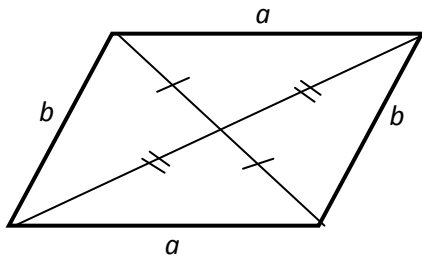


45. שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.



**ט. מרובעים**

**הגדרה:** מקבילית היא מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.



46. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.

47. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

48. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

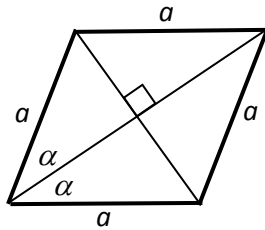
49. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.

50. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.

51. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.

52. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

**הגדרה:** מעויץ הוא מקבילית שבה שתי צלעות צמודות שוות זו לזו.



53. במעויץ האלכסונים חוצים את הזוויות.

54. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעויץ.

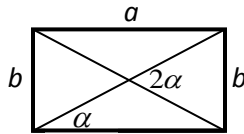
55. במעויץ האלכסונים מאונכים זה לזה.

56. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעויץ.

**הגדרה:** מלבן הוא מקבילית שבה יש זווית ישרה.

57. במלבן האלכסונים שווים זה לזה.

58. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.



**הגדרה:** טרפז הוא מרובע שבו שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו ושתי צלעות אחרות אינן מקבילות.

<p>גבהים בטרפז שווה-שוקיים מחלקים אותו למלבן ושני משולשים ישרי זווית חופפים.</p>	<p>גובה בטרפז ישר-זווית מחלק אותו למלבן ומשולש ישרי זווית.</p>	<p>ישר מקביל לשוק הטרפז מחלק אותו למקבילית ומשולש.</p>

59. בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

60. טרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.

61. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

62. טרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

**י. מעגל**

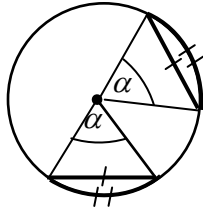
**הגדרות.** מעגל הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה.

קשת היא חלק המעגל, הכלוא בין שתי נקודות על המעגל.

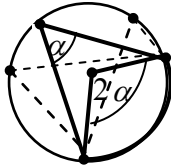
מיתר הוא קטע המחבר את שתי נקודות של המעגל.

זווית מרכזית היא זווית אשר קדקודה הוא מרכז המעגל.

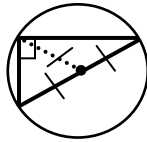
זווית היקפית היא זווית אשר קדקודה נמצא על המעגל וצלעותיה חותכים את המעגל.



63. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.  
 64. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.



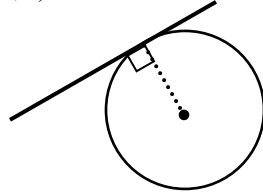
65. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.  
 66. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.  
 67. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.  
 68. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו.



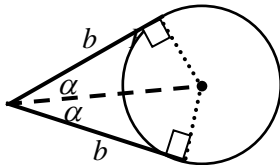
69. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה ( $90^\circ$ ).  
 70. זווית היקפית בת  $90^\circ$  נשענת על קוטר.

**יא. משיק למעגל**

**הגדרה. משיק למעגל** הוא קו ישר שיש לו עם המעגל נקודה משותפת אחת בלבד (נקודת השקה).



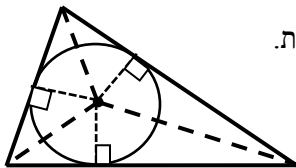
71. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.  
 72. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.



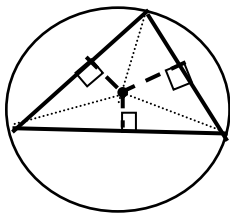
73. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.  
 74. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.

**יב. מעגל החסום במצולע ומעגל החוסם את המצולע**

**הגדרות. מעגל חוסם את המצולע** (מצולע בר חסימה), אם הוא עובר דרך כל קדקודיו (קדקודים נמצאים על המעגל).  
**מעגל חסום במצולע**, אם הוא נוגע בכל צלעותיו (צלעותיו משיקים למעגל).

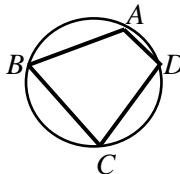


74. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.  
 75. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.  
 76. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.  
 77. שלוש חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.



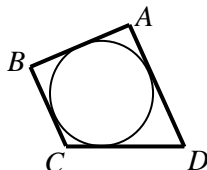
- הגדרה. אנך אמצעי** לקטע הוא ישר העובר דרך אמצע הקטע ומאונך לקטע.  
 78. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.  
 79. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.  
 80. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



81. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- $180^\circ$ .

$$AB + CD = AC + BD$$



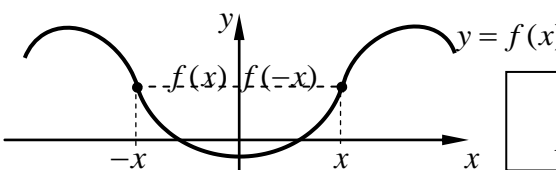
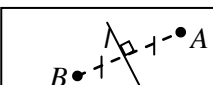
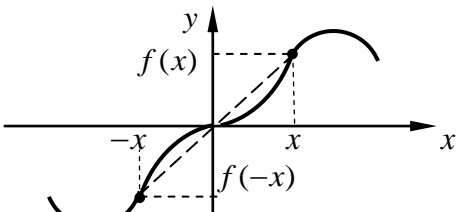
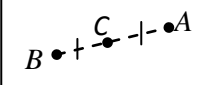
82. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

יג. שטחים

$S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$	1. שטח המשולש שווה למחצית המכפלה של צלע המשולש בגובה שאליה:
$S = a \cdot h_a$	2. שטח המלבן, המעוין, המלבן והריבוע שווה למכפלת הצלע בגובה שאליה: א. מקבילית      ב. מעוין      ג. מלבן      ד. ריבוע
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	3. שטח המעוין, הריבוע והדלתון שווה למחצית המכפלה של אלכסונים: א. מעוין      ב. ריבוע      ג. דלתון
$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$	4. שטח הטרפז שווה למחצית המכפלה של סכום בסיסי הטרפז בגובהו:

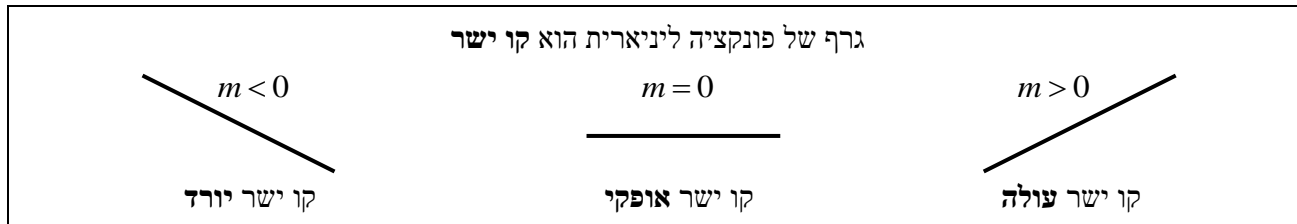
III. פונקציות

א. זוגיות הפונקציה

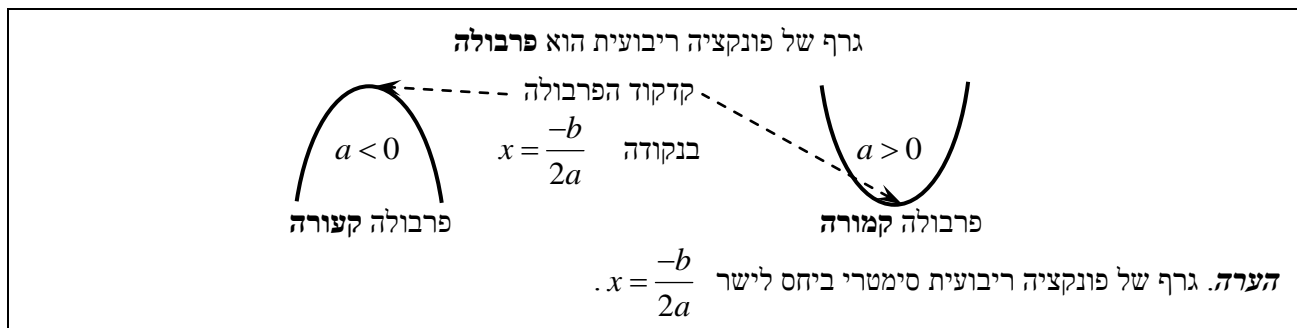
<p>1. א. פונקציה נקראת זוגית, אם תחום ההגדרה סימטרי ביחס לראשית הצירים ומתקיים: <math>f(-x) = f(x)</math>.</p> <p>2. גרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה-y.</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>שתי נקודות A ו-B סימטריות ביחס לישר l אם הישר הוא אנך אמצעי לקטע AB.</p>  </div> <p>פונקציות זוגיות: <math>f(x) = \sqrt{4-x^2}</math>, <math>f(x) = \cos x</math>, <math>y = \frac{3}{x^4}</math>, <math>f(x) = x^2</math></p>	<p>1. ב. פונקציה נקראת אי-זוגית, אם תחום ההגדרה סימטרי ביחס לראשית הצירים ומתקיים: <math>f(-x) = -f(x)</math>.</p> <p>2. גרף של פונקציה אי-זוגית סימטרי ביחס לראשית הצירים.</p>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>שתי נקודות A ו-B סימטריות ביחס לנקודה C אם הנקודה C היא אמצע הקטע AB.</p>  </div> <p>פונקציות אי-זוגיות: <math>f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}</math>, <math>f(x) = \sin x</math>, <math>y = \frac{3}{x}</math>, <math>f(x) = x^3</math></p>
<p>ג. פונקציה נקראת כללית, אם היא לא זוגית ולא אי-זוגית.</p> <p>פונקציות כלליות: <math>f(x) = \sqrt{x+4}</math>, <math>f(x) = \sin x + \cos x</math>, <math>y = \frac{3}{x+1}</math>, <math>f(x) = x^2 - 4x</math></p>	

## ב. גרפים של פונקציות יסודיות

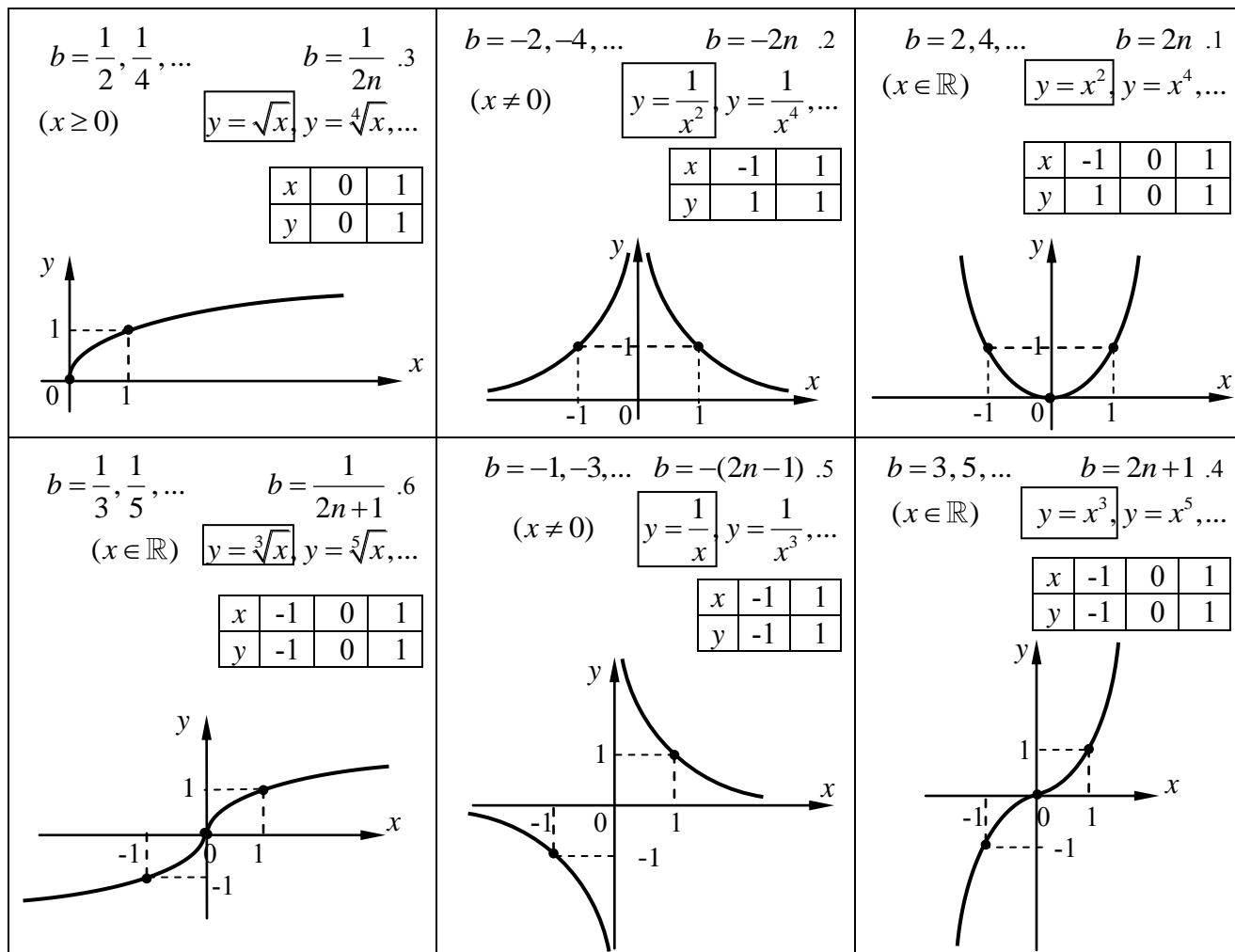
1. פונקציה ליניארית (ממעלה ראשונה) היא פונקציה מהצורה:  $y = mx + n$



2. פונקציה ריבועית (ממעלה שנייה) היא פונקציה מהצורה:  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

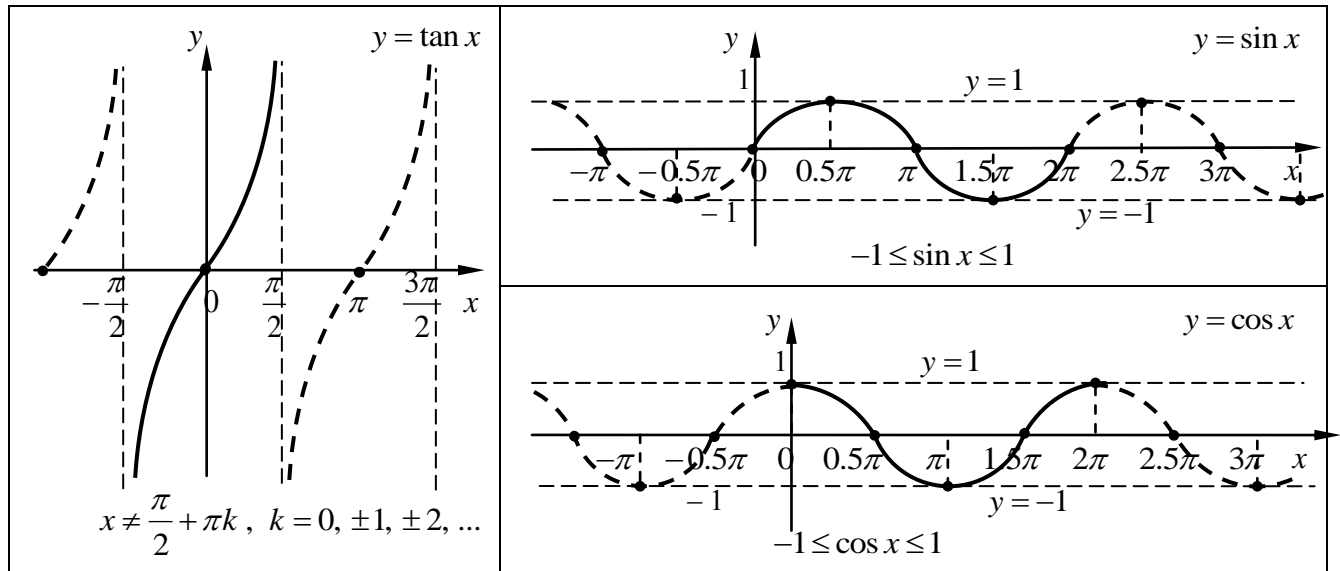


3. פונקציות החזקה היא פונקציה מהצורה:  $y = x^b$  ( $b \neq 0, b \neq 1$ )

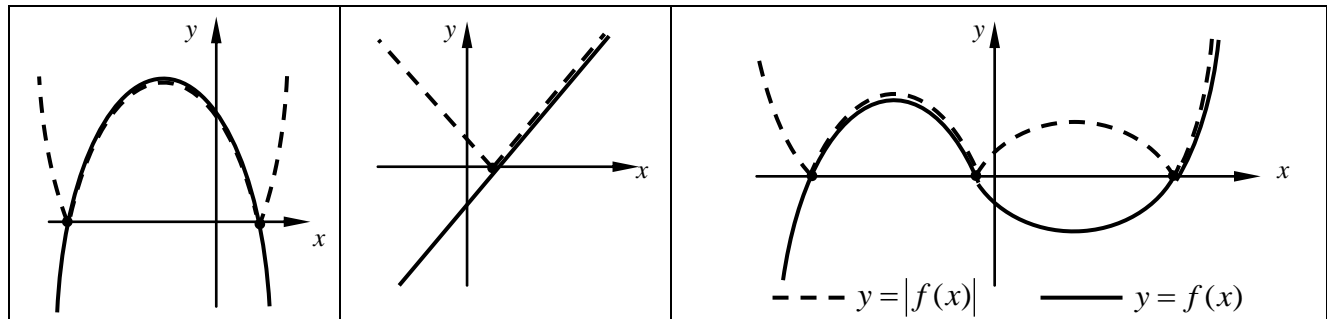


<b>5. פונקציה לוגריתמית היא פונקציה מהצורה:</b> $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$		<b>4. פונקציה מערכית היא פונקציה מהצורה:</b> $y = a^x$																	
<b>2.</b> $0 < a < 1$	<b>1.</b> $a > 1$	<b>2.</b> $0 < a < 1$	<b>1.</b> $a > 1$																
$y = \log_{0.5} x, y = \log_{\frac{2}{3}} x, \dots$	$y = \log_2 x, y = \ln x, \dots$	$y = 0.5^x, y = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \dots$	$y = 1.5^x, y = e^x, \dots$																
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>x</td><td><math>\frac{1}{a}</math></td><td>0</td><td>a</td></tr> <tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> <p> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty</math>  <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty</math> </p>	x	$\frac{1}{a}$	0	a	y	-1	0	1	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>y</td><td><math>\frac{1}{a}</math></td><td>1</td><td>a</td></tr> </table> <p> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \infty</math>  <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty</math> </p>	x	-1	0	1	y	$\frac{1}{a}$	1	a	<p> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty</math>   <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0</math> </p>	<p> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0</math>   <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \infty</math> </p>
x	$\frac{1}{a}$	0	a																
y	-1	0	1																
x	-1	0	1																
y	$\frac{1}{a}$	1	a																

**6. פונקציות טריגונומטריות**



**7. הפונקציה של ערך מוחלט**  $y = |f(x)|$





# דף נוסחאות - מכינה ייעודית להנדסה

## אלגברה

### נוסחאות הכפל המקוצר ופירוק לגורמים:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{ממעלה שנייה}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad \text{ממעלה שלישית}$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n \quad n \text{ ממעלה}$$

### פונקציות:

פונקציה ממעלה ראשונה (גרף - קו ישר) :  $y = mx + n$

פונקציות ממעלה שנייה (גרף - פרבולה) :  $(a \neq 0), y = ax^2 + bx + c$

$$\left( -\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad \text{קדקוד הפרבולה בנקודה:}$$

משוואה ממעלה שניה (ריבועית):  $(a \neq 0), ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{פתרונות המשוואה הריבועית:}$$

פירוק הטרינום :  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  (פתרונות המשוואה הריבועית)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{הגדרת הערך המוחלט:}$$

$$|x| < a \quad \rightarrow \quad -a < x < a \quad \text{פתרון אי שוויון עם ערך מוחלט:}$$

$$|x| > a \quad \rightarrow \quad x < -a \quad \text{או} \quad x > a$$

## חזקות ושורשים:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{חזקות עם מעריך טבעי:}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1 \quad \text{חזקות עם מעריך השווה לאפס ומעריך שלילי:}$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{שורשים:}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \quad \text{חזקות עם מעריך רציונאלי (שבר):}$$

## לוגריתמים:

$$(x > 0, a > 0, a \neq 1) \quad a^b = x \Leftrightarrow \log_a x = b \quad \text{הגדרת הלוגריתם:}$$

$$b = \log_a a^b, \quad a^{\log_a x} = x \quad \text{חוקי הלוגריתם:}$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x, \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_m x = \frac{\log_a x}{\log_a m} \quad \text{מעבר מבסיס לבסיס:}$$

## סדרה חשבונית:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{האיבר הכללי:}$$

$$S_n = [a_1 + a_n] \frac{n}{2}, \quad S_n = [2a_n - (n-1)d] \frac{n}{2}, \quad S_n = [2a_1 + (n-1)d] \frac{n}{2} \quad \text{סכום:}$$

## סדרה הנדסית:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{האיבר הכללי:}$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}, \quad S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad \text{סכום:}$$

$$(|q| < 1) \quad S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:}$$

## טריגונומטריה

זהויות: זהויות יסודיות

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

סכום והפרש זוויות:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

זווית כפולה וחצי זווית:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

סכום והפרש פונקציות:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

מכפלת פונקציות:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

משוואה	פתרונות
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k, x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\sin x = 0$	$x = 180^\circ k$
$\sin x = 1$	$x = 90^\circ + 360^\circ k$
$\sin x = -1$	$x = -90^\circ + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k, x_2 = -\alpha + 360^\circ k$
$\cos x = 0$	$x = 90^\circ + 180^\circ k$
$\cos x = 1$	$x = 360^\circ k$
$\cos x = -1$	$x = 180^\circ + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°	מעלות
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	רדיאנים
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	סינוס
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1	קוסינוס
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	לא מוגדר	0	טנגנס

## גיאומטריה אנליטית

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{מרחק בין שתי נקודות:}$$

שעורי הנקודה שמחלקת את הקטע שקצותיו  $(x_1, y_1)$  ו-  $(x_2, y_2)$  ביחס של  $k:l$

$$x = \frac{lx_1 + kx_2}{k+l}, \quad y = \frac{ly_1 + ky_2}{k+l} \quad (k \text{ קרוב ל-} x_1, l \text{ קרוב ל-} x_2)$$

(במקרה הפרטי של אמצע קטע  $k=l=1$ )

### ישר:

המשוואה הכללית של ישר:  $Ax + By + C = 0$  (לפחות אחד מ-  $A$  או  $B$  שונה מ-0)

$$y = mx + n \quad \text{המשוואה המפורשת של ישר } (m = \tan \alpha)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{משוואת ישר ששיפועו } m \text{ העובר דרך הנקודה } (x_1, y_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{שיפוע ישר העובר דרך הנקודות } (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

התנאי להקבלה של שני ישרים  $y = m_1x + n_1$  ו-  $y = m_2x + n_2$  :  $m_1 = m_2$  וגם  $n_1 \neq n_2$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{התנאי לניצבות של שני ישרים ששיפועיהם } m_1 \text{ ו- } m_2$$

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{מרחק הנקודה } (x_1, y_1) \text{ מהישר } y = mx + n$$

### מעגל:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad \text{משוואת מעגל שמרכזו בנקודה } (a,b) \text{ ורדיוסו } R$$

# השבון דיפרנציאלי

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{: הגדרת הנגזרת}$$

נגזרות של פונקציות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a$	$y' = 0$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$

כללי גזירה:

$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$	פונקציה מוכפלת
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	סכום, הפרש הפונקציות
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	מכפלת הפונקציות
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	מנת הפונקציות
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	פונקציה מורכבת

## חשבון אינטגראלי

הגדרת האינטגרל הלא מסוים:  $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

האינטגרל המסוים:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

האינטגרל של פונקציה מורכב (פונקציה פנימית לינארית):  $\int f(mx+b)dx = \frac{F(mx+n)}{m} + C$

אינטגרלים מיידיים

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ ,	$\int (mx+b)^n dx = \frac{(mx+b)^{n+1}}{m(n+1)} + C, n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$ ,	$\int \frac{1}{mx+b} dx = \frac{\ln mx+b }{m} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$ ,	$\int \sin(mx+b) dx = \frac{-\cos(mx+b)}{m} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$ ,	$\int \cos(mx+b) dx = \frac{\sin(mx+b)}{m} + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ ,	$\int \frac{dx}{\cos^2(mx+b)} = \frac{\tan(mx+b)}{m} + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ ,	$\int \frac{dx}{\sin^2(mx+b)} = \frac{-\cot(mx+b)}{m} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ,	$\int a^{mx+b} dx = \frac{a^{mx+b}}{m \ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$ ,	$\int e^{mx+b} dx = \frac{e^{mx+b}}{m} + C$