חקירת פונקציה רציונלית ופונקציית שורש

כיתה י 5 יחידות

עודכן:24/6/21

אוסף שאלות לסיכום כיתה י 5 יחידות

כותבי השאלות: לי אשר ,

1. נתונה הפונקציה : $f(x)=2x^2+\frac{8}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.

ד. מצא את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. הוכח: $f(x-1)=f(1-x)$ עבור $x\neq 1$.

ז. נתונה הפונקציה : $g(x)=f(1-x)+2$.

(1). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$ (אם יש).

(2). שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

כתב : לי אשר

[הפתרון המלא ביוטיוב]

א. $x\neq 0$

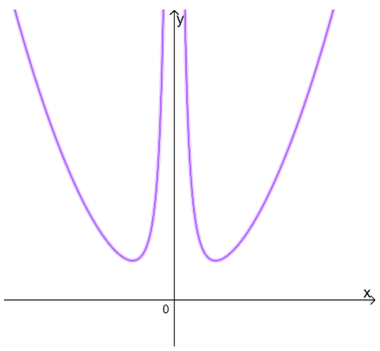
ב. הוכחה.

ג. אין חיתוך עם הצירים.

ד. $(\sqrt{2},8)$ מינימום , $(-\sqrt{2},8)$ מינימום

ה. $x=0$.

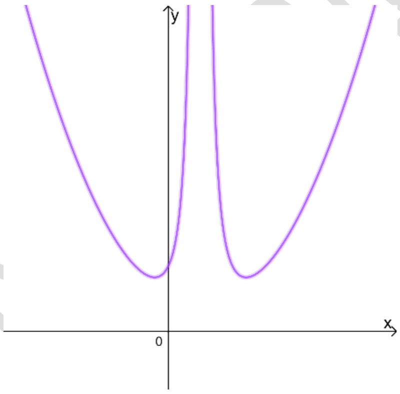
ו.



ז. הוכחה.

ח. (1). $x=1$.

(2).



2. נתונה הפונקציה $f(x) = 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש).

(3). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(4). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. היעזר בסעיף א' והוכח כי $0 \le f(x) \le 2$ לכל x בתחום ההגדרה.

כתב: לי אשר

[לפתרון המלא ביוטיוב]

א. (1). $2 \le x \le 4$.

(2). $(2,0), (4,0)$.

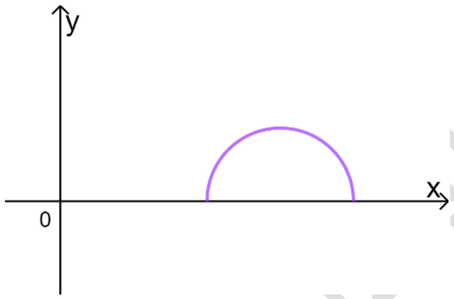
(3). $(3,2)$ מקסימום , $(2,0)$ מינימום בקצה,

$(4,0)$ מיניום בקצה .

(4). עליה: $2 < x < 3$.

ירידה: $3 < x < 4$.

(5).



ב. הוכחה.

3. נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{bx^2}{(2x-a)^2}$. a ו- b פרמטרים.

משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה הם $x = 2$ ו- $y = 2$.

א. מצא את a ו- b .

ב. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית ? נמק.

ג. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

(1). תחום הגדרה.

(2). נקודות חיתוך עם הצירים.

(3). נקודות קיצון וסוגן.

(4). תחומי עליה וירידה.

(5). שרטוט.

ד. הוכח כי הישר שמשוואתו $y - 4x = 0$ מאונך לישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -2$.

כתב: לי אשר

[הפתרון המלא ביוטיוב]

תשובות:

א. $a = 4 , b = 8$.

ב. לא.

ג. (1). $x \neq 2$.

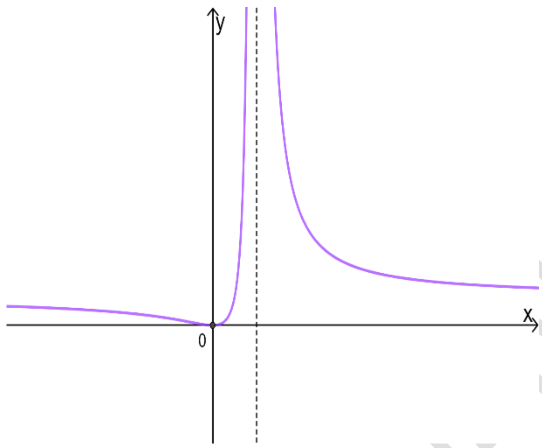
(2). $(0,0)$.

(3). $(0,0)$ מינימום.

(4). עליה: $0 < x < 2$.

ירידה: $x > 2$ או $x < 0$.

(5).



ד. הוכחה.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2-16}{x-5}$, a פרמטר טבעי.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

נתון: המרחק בין נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x הוא 8 יח'.

ב. מצא את a .

ג. (1). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן (אם יש כאלה).

(2). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודת החיתוך של המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x.

כתב: לי אשר

תשובות:

4. א. (1). $x \neq 5$.

(2). $x = 5$.

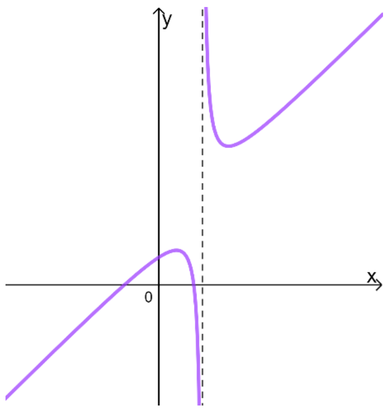
ב. $a = 1$.

ג. (1). $(2,4)$ מקסימום , $(8,16)$ מינימום.

(2). עולה: $x < 2$ או $x > 8$.

יורדת: $2 < x < 5$ או $5 < x < 8$.

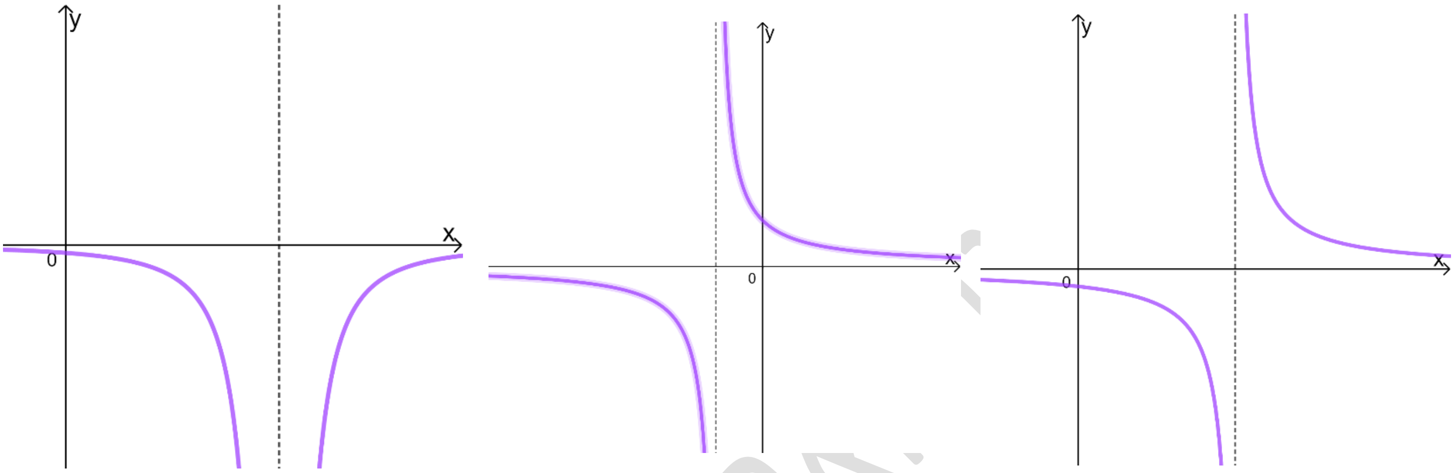
ד.



ה. $(3.2 , 6.4)$.

5. לפניך 3 פונקציות ו- 3 גרפים:

$$f(x) = \frac{1}{2x-6} \qquad g(x) = -\frac{2}{(2x-6)^2} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$



I *II* *III*

א. התאם בין כל משוואת פונקציה לגרף המתאים.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של כל אחת מהפונקציות.

ג. (1). הוכח כי גרף הפונקציה $f(x)$ מתקבל מהזזה אופקית של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2). הוכח: $g(x) = f\,'(x)$.

ד. העזר בסעיפים הקודמים והוכח כי: $\frac{h(x)}{h(x-4)} < \frac{f(x)}{g(x)}$ בתחום $x > 3$ (**<u>סעיף אתגר</u>**).

כתב: לי אשר

תשובות:

א. גרף $I - f(x)$.

גרף $II - h(x)$.

גרף $III - g(x)$.

ב. $f(x)$: $x = 3\,, y = 0$.

$h(x)$: $x = -1\,, y = 0$.

$g(x)$: $x = 3\,, y = 0$.

ג. הוכחה.

ד. הוכחה.

6. נתונה הפונקציה : $f(x) = x\sqrt{x^2+2x+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה : $g(x) = x^2 + x$. על סמך הסעיפים הקודמים, קבע מהי הטענה הנכונה:

(*i*). $f(x) = g(x)$ עבור כל x .

(*ii*). $f(x) = g(x)$ עבור $x \geq -1$.

(*iii*). $f(x) = g(x)$ עבור $x \leq -1$.

ו. היעזר בסעיפים הקודמים ושרטט את גרף $f'(x)$ בתחום $x \geq 0$.

כתב: לי אשר

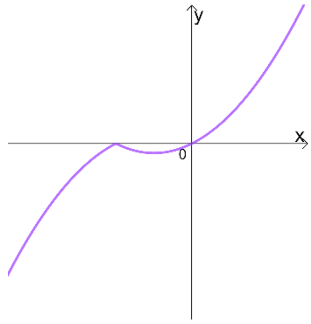
תשובות:

א. כל x .

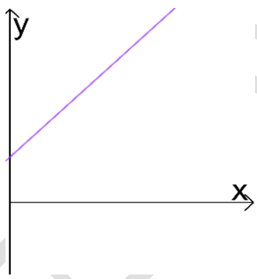
ב. $(-1,0)$, $(0,0)$.

ג. $(-1,0)$ מקסימום, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ מינימום.

ד.



ה. טענה (*ii*).

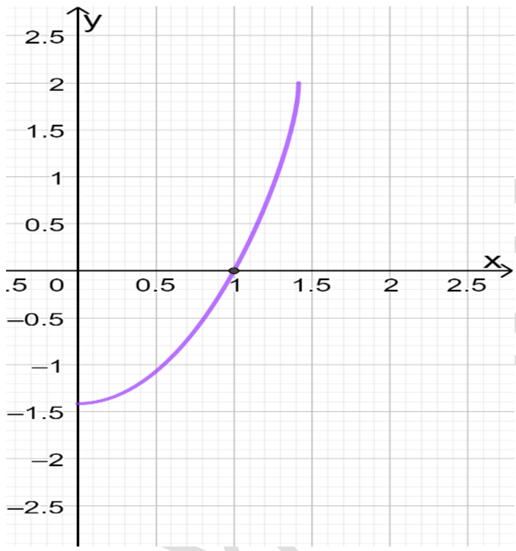


7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - a\sqrt{-4x^2+8}$, a פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0$:



היעזר בגרף הנתון ובסעיפים הקודמים במידת הצורך וענה על הסעיפים שלפניך:

(1). קבע מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון <u>הפנימית</u> של הפונקציה.

(2). מצא את a .

ד. נתון הישר $y = 2k$ (k פרמטר).

קבע עבור אילו ערכי k הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות. נמק.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

ב. הוכחה.

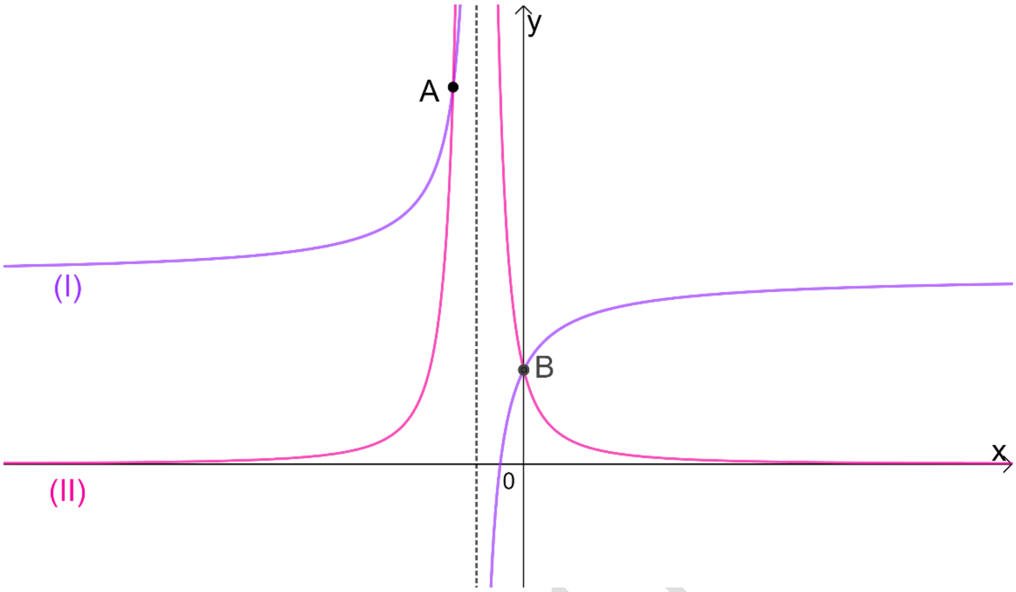
ג. (1). $x = 0$.

(2). $a = \frac{1}{2}$.

ד. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 1$.

8 . בשרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף נגזרתה $f'(x)$ המוגדרות עבור $x \neq -1$.

שני הגרפים נחתכים בנקודות A ו- B (בלבד).



א. קבע מהו הגרף המתאר את $f(x)$ ומהו הגרף המתאר את $f'(x)$.

נתון: הנקודה B נמצאת על ציר y , ומשוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו- B היא $y = -4x + 2$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B .

ג. נתון: $f(x) = -\frac{a}{x-b} + 4$, a, b פרמטרים.

(1). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2). היעזר בסעיפים הקודמים ומצא את a ו- b.

ד. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A .

כתב: לי אשר

תשובות:

א. (I) - $f(x)$.

(II) - $f'(x)$.

ב. $y = 2x + 2$.

ג.(1). $y = 0 , x = -1$.

(2). $a = 2 , b = -1$.

ד. 8.

9. נתונות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המקיימות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ואי שלילית בתחום $-2 \le x \le 2$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון מסוג מקסימום כאשר $x=0$.

ב. (1) . הוכח כי לפונקציה $g(x)$ גם נקודת קיצון כאשר $x=0$.

(2). האם בנקודה שבה $x=0$ יש לפונקציה $g(x)$ נקודת מינימום או מקסימום? נמק.

נתון: $f(x)=-x^2+4$.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים ושרטט את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

כתב: לי אשר

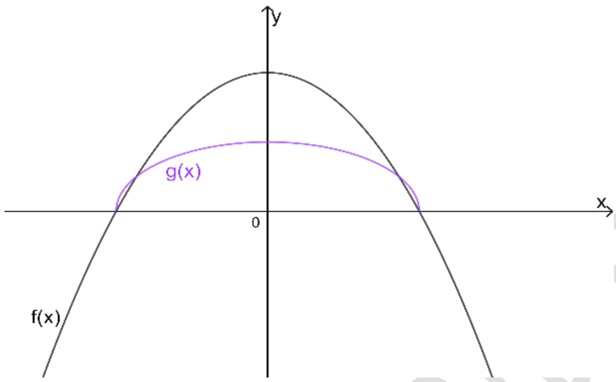
תשובות:

4. א. $-2 \le x \le 2$.

ב. (1). הוכחה.

(2). מקסימום.

ג.



10. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x+4}$.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

(3). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(4). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה: $g(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{(x+4)^2}$.

היעזר בסעיפים הקודמים , וללא חישובים נוספים מצא את:

(1). האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

(2). נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x (אם יש).

(3). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. האם למשוואה $f(x)+g(x)=0$ יש פתרון בתחום $x<-4$? אם כן, ציין את מספר הפתרונות. במידה ולא, נמק מדוע אין.

כתב: לי אשר

תשובות:

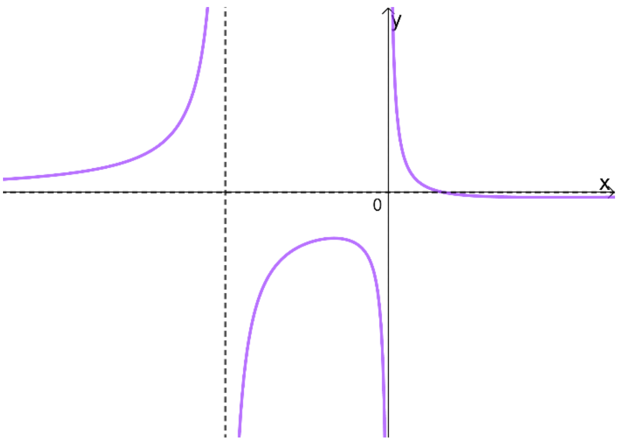
א. (1). $x\neq 0\,,x\neq -4$.

(2). $x=0\,,x=-4\,,y=0$.

(3). $\left(4\,,-\frac{1}{4}\right)$ מינימום , $\left(-\frac{4}{3}\,,-\frac{9}{4}\right)$ מקסימום.

(4). $\left(\frac{4}{3}\,,0\right)$.

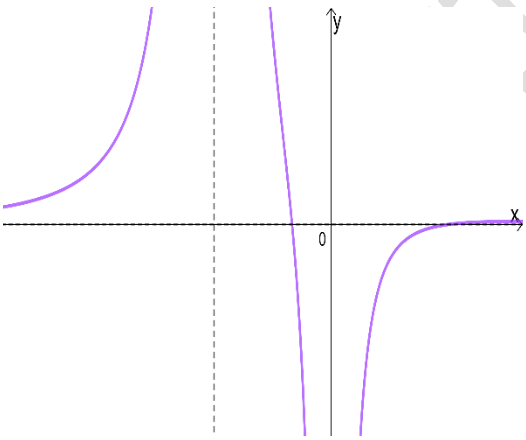
ב.



ג. (1). $x=0\,,x=-4\,,y=0$.

(2). $(4\,,0)\,,\left(-\frac{4}{3}\,,0\right)$.

(3).



ד. אין פתרון.

11. נתונה משפחת הפונקציות $f_n(x) = (x-n)^3$ (n טבעי).

לדוגמה: $f_1(x) = (x-1)^3 \quad , \ f_2(x) = (x-2)^3 \ , \ f_3(x) = (x-3)^3 \quad ...$

א. עבור הפונקציות $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ מצא את :

(1). נקודות החיתוך של הפונקציות עם הצירים.

(2). תחומי עליה וירידה (אם יש).

ב. הסבר מדוע כל פונקציה ממשפחת הפונקציות $f_n(x)$ עולה לכל x .

ג. הוכח כי הגרף של כל פונקציה עוקבת במשפחת הפונקציות $f_n(x)$, מתקבל מהזזה אופקית של גרף הפונקציה הקודמת לה במשפחת הפונקציות $f_n(x)$ (לדוגמה: יש להוכיח כי גרף $f_2(x)$ מתקבל מהזזה אופקית של גרף הפונקציה $f_1(x)$) .

ד. נתון: שיפוע המשיק לגרף אחת מהפונקציות $f_n(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 27 .

איזו פונקציה זו מבין הפונקציות שלפניך?

(*I*) . $f_2(x)$

(*II*). $f_3(x)$

(*III*). $f_4(x)$

כתב : לי אשר

תשובות:

א. (1). $f_1(x)$: $(1,0)$, $(0,-1)$.

$f_2(x)$: $(2,0)$, $(0,-8)$.

(2). $f_1(x)$: עולה לכל x .

$f_2(x)$: עולה לכל x .

ב. גרף כל פונקציה עוקבת מתקבל מהזזה ימינה ביחידה אחת מהפונקציה הקודמת לה במשפחת הפונקציות (ניתן להראות גם בצורה אלגברית).

ד. תשובה (III) : $f_4(x)$.

12. נתונות שתי הפונקציות $f(x) = x\sqrt{x-9}$ ו- $g(x) = x^3 - 9x^2$.

א. מצא את תחום ההגדרה של שתי הפונקציות.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של שתי הפונקציות וסוגן.

ד. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של שתי הפונקציות.

ה. שרטט בגרף אחד, סקיצה של שתי הפונקציות.

ו. עבור אילו ערכי x מתקיים : $g(x) = f^2(x)$? נמק.

כתב : לי אשר

תשובות :

א. $f(x)$: $x \geq 9$.

$g(x)$: כל x .

ב. $f(x)$: $(9,0)$.

$g(x)$: $(0,0), (9,0)$.

ג. $f(x)$: $(9,0)$ מינימום.

$g(x)$: $(0,0)$ מקסימום , $(6,-108)$ מינימום.

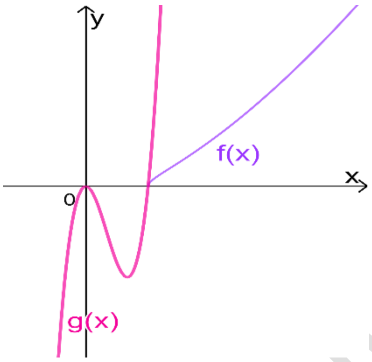
ד. $f(x)$: חיובית: $x > 9$.

שלילית : אין.

$g(x)$: חיובית: $x > 9$.

שלילית: $0 < x < 9$ או $x < 0$.

ה.



ו. $x \geq 9$.

13. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{(2ax-2)^2}{ax^2}$, a פרמטר $(a\neq 0)$.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). הבע באמצעות a במידת הצורך את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

(3). הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש).

נתון כי לפונקציה נקודת מינימום כאשר $x=1$.

ב. (1). מצא את a .

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+c)$, c פרמטר.

נתון כי המרחק בין נקודת המינימום של הפונקציה לראשית הצירים הוא 3 יח'.

מצא את c (מצא את שתי האפשרויות).

כתב: לי אשר

תשובות:

א. (1). $x\neq 0$.

(2). $x=0$, $y=4a$.

(3). $(\frac{1}{a},0)$.

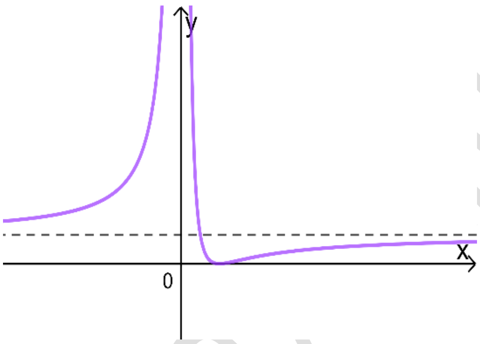
ב. (1). $a=1$.

(2). $(1,0)$ מינימום.

(3). עולה: $x<0$ או $x>1$.

יורדת: $0<x<1$.

ג.



ד. $c=-2$ או $c=4$.

14. נתונה הפונקציה : $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + a}$ a פרמטר.

א. הוכח כי עבור $a < 9$ לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. עבור $a = 8$:

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3). מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וסוגה.

(4). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. לפניך שתי טענות. קבע עבור כל טענה האם היא נכונה או שגויה ונמק:

(*I*). עבור $a = 9$ תחום ההגדרה של הפונקציה ונקודות החיתוך עם שלה הצירים שונים בהשוואה ל- $a < 9$.

(*II*). שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה זהה עבור $a = 9$ או $a < 9$.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. הוכחה.

ב. (1). $x \geq 4$ או $x \leq 2$.

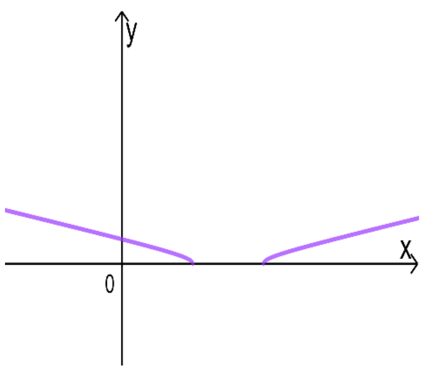
(2). $(4,0), (2,0), (0,2\sqrt{2})$.

(3). $(2,0)$ מינימום, $(4,0)$ מינימום.

(4). ירידה: $x < 2$.

עליה: $x > 4$.

ג.



ד. (*I*). נכון.

(*II*). לא נכון.

15. נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. (1). הראה כי מתקיים : $f'(-x) = -f'(x)$ עבור $x \neq 0$ והסבר את משמעות הביטוי.

(2). חשב את $f'(\frac{1}{2})$.

(3). מצא את $f'(-\frac{1}{2})$, **ללא חישוב נוסף**.

ד. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ו- $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ שעל גרף הפונקציה.

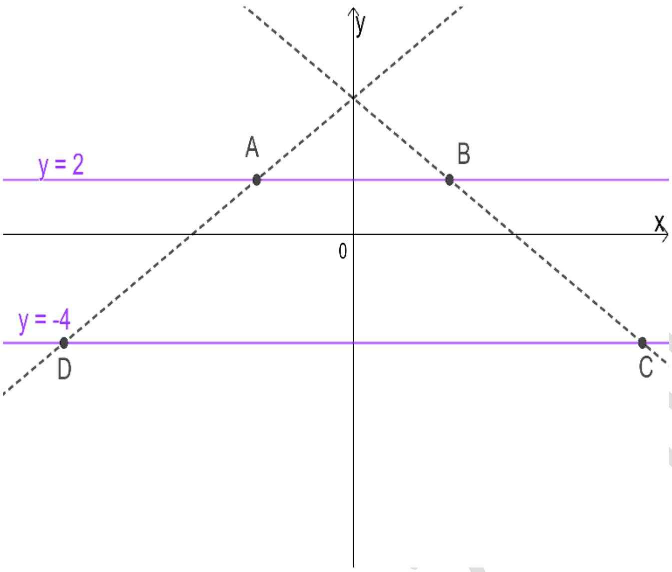
שני המשיקים מסעיף ד' חותכים את הישרים

$y = 2$ ו $y = -4$ – בנקודות A , B , C ו- D

כמתואר בשרטוט שלפניך.

ה. (1). הוכח: $ABCD$ טרפז שווה שוקיים.

(2). חשב את שטח הטרפז $ABCD$.



כתב: לי אשר

תשובות:

א. $x \neq 0$.

ב. הוכחה.

ג. (1). הנגזרת היא אי זוגית.

(2). -16 .

(3). 16 .

ד. $y = 16x + 12$, $y = -16x + 12$.

ה. (1). הוכחה.

(2). 9.75 סמ"ר.

16. נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+5}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה .

ב. הוכח כי הפונקציה אי זוגית.

ג. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

(1). נקודות חיתוך עם הצירים.

(2). נקודות קיצון וסוגן.

(3). תחומי עליה וירידה.

(4). סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$.

(1). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2). היעזר בסעיף ד(1) וקבע האם $g(x)$ זוגית.

ה. הישר $y = b$ משיק לפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות $(b > 0)$.

מצא את b.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. כל x .

ב. הוכחה.

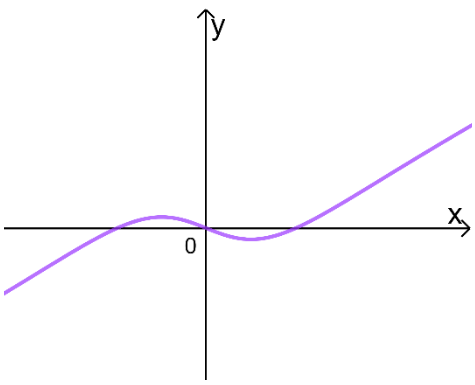
ג. (1). $(2,0), (-2,0), (0,0)$.

(2). $(1,-\frac{1}{2})$ מינימום , $(-1,\frac{1}{2})$ מקסימום.

(3). עליה: $x > 1$ או $x < -1$.

ירידה: $-1 < x < 1$.

(4).



ד. (1).

(2). הפונקציה זוגית.

ה. $b = \frac{1}{2}$.

17. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x + 16$.

א. (1). נתון: $f(x) = (2x+2)^2 \cdot (x-a)$.

מצא את a .

(2). מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

(3). מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$

היעזר בסעיף א' וענה על הסעיפים הבאים:

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(4). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = 2x + 2 - g(x)$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). הוכח כי לפונקציה נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .

כתב : לי אשר

תשובות:

א. (1). $a = -4$.

(2). חיוביות: $-4 < x < -1$ או $x > -1$.

שליליות: $x < -4$.

(3). $(-1,0)$ מינימום , $(-3,16)$ מקסימום.

ב. (1). $x \geq -4$.

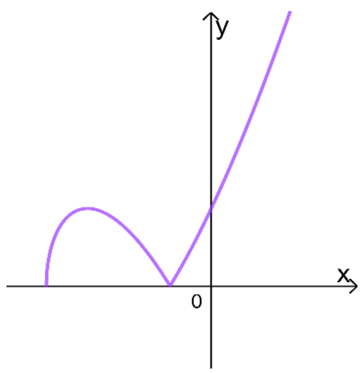
(2). $(-1,0)$ מינימום , $(-3,4)$ מקסימום.

(3). עליה: $-4 < x < -3$ או $x > -1$.

ירידה: $-3 < x < -1$.

(4). $(0,4)$, $(-1,0)$, $(-4,0)$.

(5).



ד. (1). $x \geq -4$.

(2). הוכחה.

18. נתונות שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המוגדרות לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ מתקבל <u>מכיווץ אופקי פי 2</u> של גרף $g(x)$.

א. לפניך זוגות של פונקציות. קבע איזה זוג פונקציות מתאים לתאר את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (אין צורך לבצע חקירה בשלב זה):

(*i*). $f(x) = x(x-4)^3$, $g(x) = 2x(2x-4)^3$

(*ii*). $g(x) = x(x-4)^3$, $f(x) = 2x(2x-4)^3$

(*iii*). $f(x) = 2x(x-4)^3$, $g(x) = x(2x-4)^3$

ב. בהתאם לתשובתך בסעיף א , חקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים:

(1). נקודות חיתוך הצירים.

(2). נקודות קיצון וסוגן.

(3). תחומי עליה וירידה.

ג. שרטט באותו גרף סקיצה של $f(x)$ ו- $g(x)$.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. תשובה (*ii*).

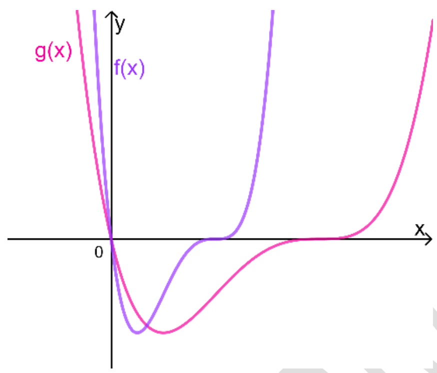
ב. (1). $(0,0)$, $(2,0)$.

(2). $(\frac{1}{2}, -27)$ מינימום.

(3). ירידה: $x < \frac{1}{2}$.

עליה: $\frac{1}{2} < x < 2$ או $x > 2$.

ג.



19. נתונות שתי הפונקציות $f(x) = x\sqrt{x-9}$ ו- $g(x) = x^3 - 9x^2$.

א. מצא את תחום ההגדרה של שתי הפונקציות.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם הצירים.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של שתי הפונקציות וסוגן.

ד. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של שתי הפונקציות.

ה. שרטט בגרף אחד, סקיצה של שתי הפונקציות.

ו. עבור אילו ערכי x מתקיים : $g(x) = f^2(x)$? נמק.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. $f(x)$: $x \geq 9$.

$g(x)$: כל x .

ב. $f(x)$: $(9,0)$.

$g(x)$: $(0,0), (9,0)$.

ג. $f(x)$: $(9,0)$ מינימום.

$g(x)$: $(0,0)$ מקסימום , $(6,-108)$ מינימום.

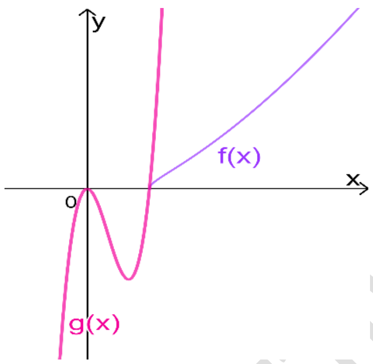
ד. $f(x)$: חיובית: $x > 9$.

שלילית : אין.

$g(x)$: חיובית: $x > 9$.

שלילית: $0 < x < 9$ או $x < 0$.

ה.



ו. $x \geq 9$.

20. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{(2ax-2)^2}{ax^2}$, a פרמטר $(a\neq 0)$.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). הבע באמצעות a במידת הצורך את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

(3). הבע באמצעות a את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש).

נתון כי לפונקציה נקודת מינימום כאשר $x=1$.

ב. (1). מצא את a .

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x+c)$, c פרמטר.

נתון כי המרחק בין נקודת המינימום של הפונקציה לראשית הצירים הוא 3 יח'.

מצא את c (מצא את שתי האפשרויות).

כתב: לי אשר

תשובות :

א. (1). $x\neq 0$.

(2). $x=0\,,\ y=4a$.

(3). $(\frac{1}{a},0)$.

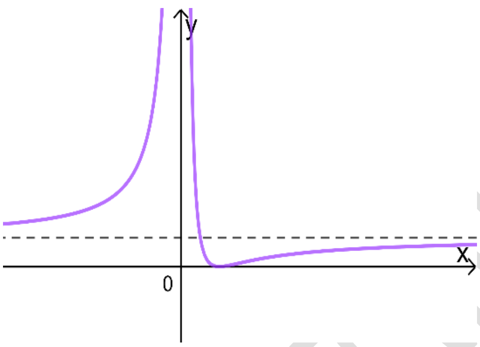
ב. (1). $a=1$.

(2). $(1,0)$ מינימום.

(3). עולה: $x<0$ או $x>1$.

יורדת: $0<x<1$.

ג.



ד. $c=-2$ או $c=4$.

21. נתונה הפונקציה : $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + a}$ a פרמטר.

א. הוכח כי עבור $a < 9$ לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. עבור $a = 8$:

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3). מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וסוגה.

(4). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. לפניך שתי טענות. קבע עבור כל טענה האם היא נכונה או שגויה ונמק:

(*I*). עבור $a = 9$ תחום ההגדרה של הפונקציה ונקודות החיתוך עם שלה הצירים שונים בהשוואה ל- $a < 9$.

(*II*). שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה זהה עבור $a = 9$ או $a < 9$.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. הוכחה.

ב. (1). $x \geq 4$ או $x \leq 2$.

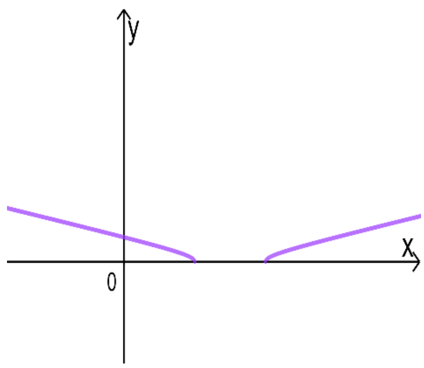
(2). $(4,0), (2,0), (0,2\sqrt{2})$.

(3). $(2,0)$ מינימום, $(4,0)$ מינימום.

(4). ירידה: $x < 2$.

עליה: $x > 4$.

ג.



ד. (*I*). נכון.

(*II*). לא נכון.

22. נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. (1). הראה כי מתקיים : $f'(-x) = -f'(x)$ עבור $x \neq 0$ והסבר את משמעות הביטוי.

(2). חשב את $f'(\frac{1}{2})$.

(3). מצא את $f'(-\frac{1}{2})$, **ללא חישוב נוסף**.

ד. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות $\left(\frac{1}{2},4\right)$ ו- $\left(-\frac{1}{2},4\right)$ שעל גרף הפונקציה.

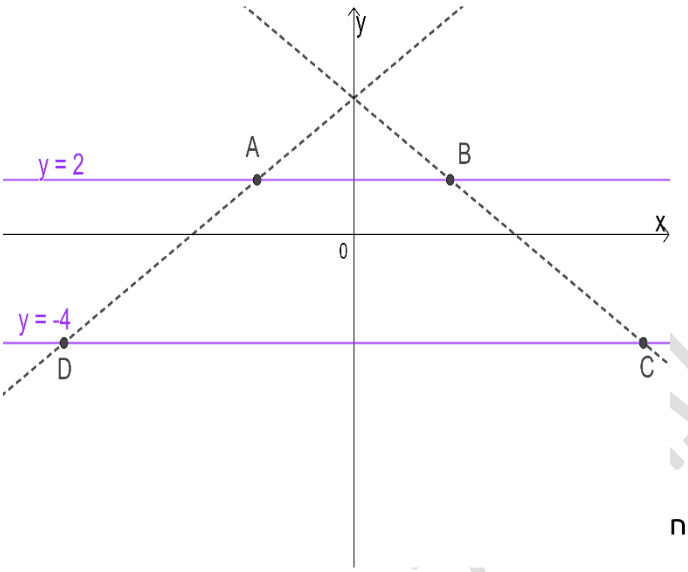
שני המשיקים מסעיף ד' חותכים את הישרים

$y = 2$ ו – $y = -4$ בנקודות A , B , C ו- D

כמתואר בשרטוט שלפניך.

ה. (1). הוכח: $ABCD$ טרפז שווה שוקיים.

(2). חשב את שטח הטרפז $ABCD$.



כתב: לי אשר

תשובות:

א. $x \neq 0$.

ב. הוכחה.

ג. (1). הנגזרת היא אי זוגית.

(2). -16 .

(3). 16 .

ד. $y = 16x + 12$, $y = -16x + 12$.

ה. (1). הוכח

(2). 9.75 סמ"ר.

23. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+5}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה .

ב. הוכח כי הפונקציה אי זוגית.

ג. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

(1). נקודות חיתוך עם הצירים.

(2). נקודות קיצון וסוגן.

(3). תחומי עליה וירידה.

(4). סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

(1). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2). היעזר בסעיף ד(1) וקבע האם $g(x)$ זוגית.

ה. הישר $y=b$ משיק לפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות $(b>0)$.

מצא את b.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. כל x .

ב. הוכחה.

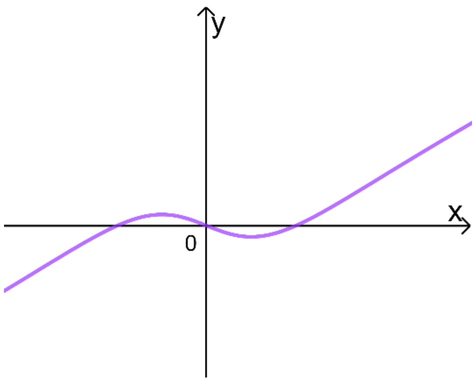
ג. (1). $(0,0)$, $(-2,0)$, $(2,0)$.

(2). $(1,-\frac{1}{2})$ מינימום , $(-1,\frac{1}{2})$ מקסימום.

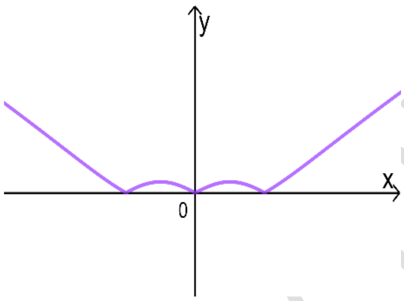
(3). עליה: $x>1$ או $x<-1$.

ירידה: $-1<x<1$.

(4).



ד. (1).



(2). הפונקציה זוגית.

ה. $b=\frac{1}{2}$.

24. נתונות שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המוגדרות לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ מתקבל מכיווץ אופקי פי 2 של גרף $g(x)$.

א. לפניך זוגות של פונקציות. קבע איזה זוג פונקציות מתאים לתאר את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ (אין צורך לבצע חקירה בשלב זה):

(*i*). $f(x) = x(x-4)^3$, $g(x) = 2x(2x-4)^3$

(*ii*). $g(x) = x(x-4)^3$, $f(x) = 2x(2x-4)^3$

(*iii*). $f(x) = 2x(x-4)^3$, $g(x) = x(2x-4)^3$

ב. בהתאם לתשובתך בסעיף א , חקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים:

(1). נקודות חיתוך הצירים.

(2). נקודות קיצון וסוגן.

(3). תחומי עליה וירידה.

ג. שרטט באותו גרף סקיצה של $f(x)$ ו- $g(x)$.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. תשובה (*ii*).

ב. (1). $(0,0)$, $(2,0)$.

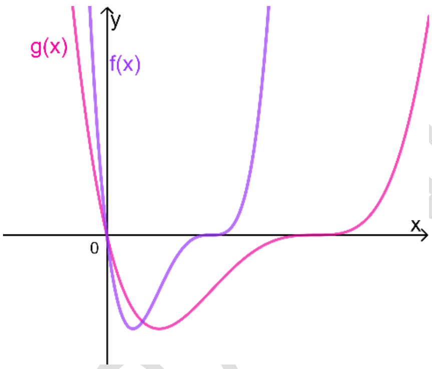
(2). $(\frac{1}{2}, -27)$ מינימום.

(3). ירידה: $x < \frac{1}{2}$.

עליה: $\frac{1}{2} < x < 2$ או

$x > 2$.

ג.



25. נתונה הפונקציה : $f(x) = a - \frac{3x^2}{x^2-4}$, a פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

נתון כי הנקודה $(2,-4)$ היא נקודת החיתוך של שתי אסימפטוטות של הפונקציה.

ב. מצא את a .

ג. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

(1). נקודות חיתוך עם הצירים.

(2). נקודת הקיצון וסוגה.

(3). תחומי עליה וירידה.

(4). אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = 2f(x) + b$, b פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x . מצא את b.

כתב: לי אשר

תשובות:

א. $x \neq -2$, $x \neq 2$.

ב. $a = -1$.

ג. (1). חיתוך עם ציר x : $(-1,0)$, $(1,0)$.

חיתוך עם ציר y : $(0,-1)$.

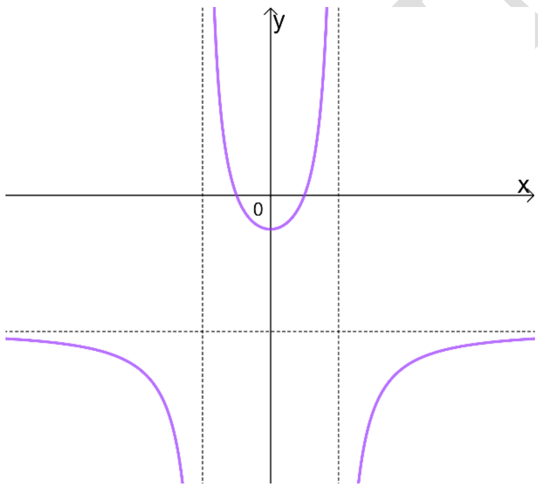
(2). $(0,-1)$ מינימום.

(3). עליה: $0 < x < 2$ או $x > 2$.

ירידה: $-2 < x < 0$ או $x < -2$.

(4). $y = -4$, $x = -2$, $x = 2$.

ד.



ה. $b = 2$.

26. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - \sqrt{2x^4 + 2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה נקודת קיצון אחת בלבד.

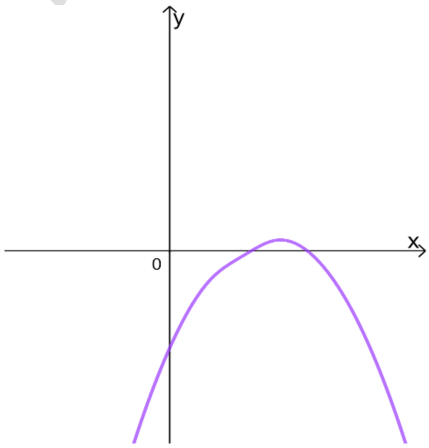
ג. הוכח כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים היא נקודת הקיצון של הפונקציה ומצא את סוגה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

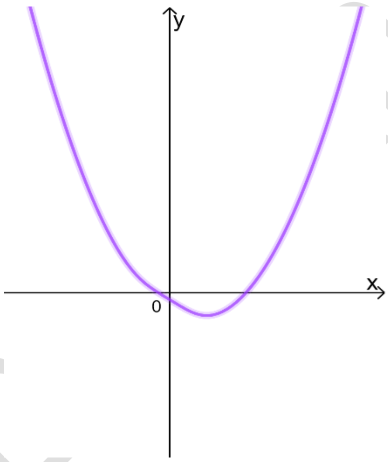
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. לפניך שלוש פונקציות ושלושה גרפים. התאם בין כל פונקציה לגרף המתאים.

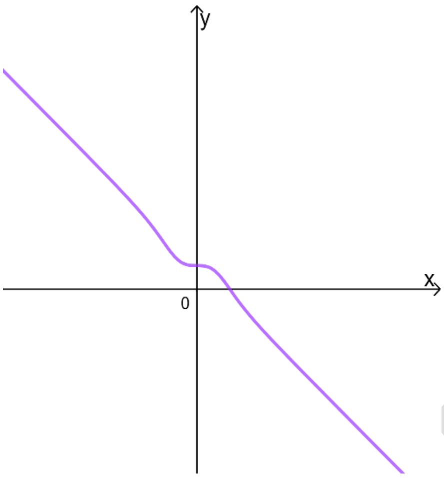
$g(x) = |f(x)| - 2$ $\qquad$ $h(x) = f'(x)$ $\qquad$ $t(x) = f(x-2) + 1$



(I)



(II)



(III)

כתב: לי אשר

תשובות:

א. כל x .

ב. חיתוך עם ציר x : $(1,0)$.

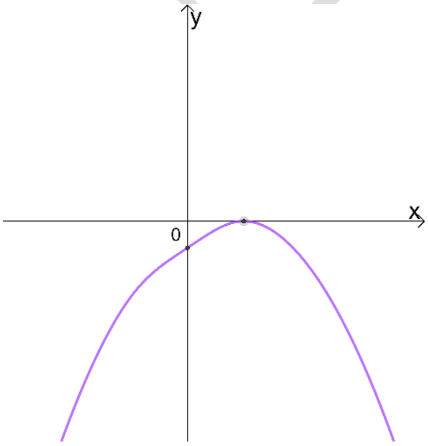
חיתוך עם ציר y : $(0, -\sqrt{2})$.

ג. $(1,0)$ מקסימום.

ד. עליה: $x < 1$.

ירידה: $x > 1$.

ה.



ו. $g(x)$ – גרף (II) . $\qquad$ $h(x)$ – גרף (III) . $\qquad$ $t(x)$ – גרף (I) .