

חקירת פונקציה רציונלית 5 יחידות

פונקציה רציונלית

כותבי השאלות: אינה שורץ, חננאל כהן, לי אשר, עמית רדין
עודכן: 26/6/21

המאגר הארצי במתמטיקה

עורך: עובד לב ארי

$$(1) \text{ נתונה פונקציה: } f(x) = \frac{64x^2 - 128x}{(x^2 + 3)^2(x-2)} + 2$$

- א. 1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$
2. מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים
3. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן
4. מצא את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$
5. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$
6. נתון: הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ פעם אחת. כמה ערכי k מתאימים קיימים?

$$7. \text{ נתונה המשוואה: } p = \frac{64x^2 - 128x}{(x^2 + 3)^2(x-2)} + 2$$

p הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע בעבור אילו ערכי p למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות שליליים שונים.

$$b. \text{ נתונה הפונקציה: } g(x) = \frac{64x^2}{(x^2 + 3)^2} + 2 + b$$

נתון: $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

1. מצא את ערכו של הפרמטר b

2. סרטט סקיצה של $g(x)$

3. בלי לחשב קבע את ערכו של האינטגרל הבא: $\int_{-1}^1 g(x) dx$

4. נתונה הפונקציה: $h(x) = g(x) + t$

ידוע שגרף הפונקציה $h(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $g(x)$.

מצא את t (מצא את שתי האפשרויות), ונמק את תשובתך.

כתבה: אינה שוורץ

תשובות:

א. 1 $x \neq 2$

א. 2 $Y = 2$, חור $(2, 4.612)$

א. 3 $(-1, -2)$ מינימום

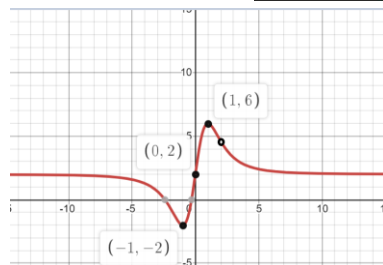
$(1, 6)$ מקסימום

א. 4 עלייה: $-1 < x < 1$

ירידה: $x < -1$, $1 < x < 2$, $x > 2$

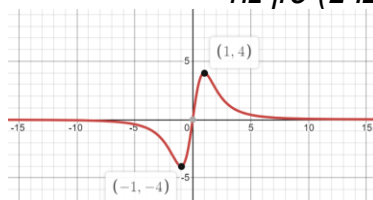
א. 5 סקיצה

עורך: עובד לב ארי



א. 6
א. $-2 < p < 2$

ב. 1
ב. סקיצה



ב. 3
ב. $t = -4, t = 4$

2 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+3x+a}{x^2+b}$ ו- a ו- b הם פרמטרים.
נתון כי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ באחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא $y = -\frac{1}{4}x - 1$.
א) מצא את הפרמטרים a ו- b .
הצב את הערכים של a ו- b שמצאת בסעיף א בפונקציה $f(x)$ וענה על סעיפים ב-ד:

- ב) (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה $A(x_A, y_A)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
ידוע כי הישר $y = y_A$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A בלבד.
ד) מצא את שיעורי הנקודה A (מצא את שלוש האפשרויות)

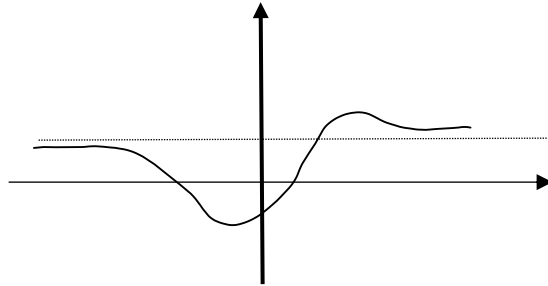
כתב: חננאל כהן.

עורך: עובד לב ארי

תשובות: א) $a = -4, b = 4$. ב) ת.ה. כל x . (2) $y = 1$. (3) $(1,0), (-4,0), (0, -1)$.

(4) מינימום $(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{4})$, מקסימום $(6, \frac{5}{4})$.

(ג)



(ד) $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{4}), A(6, \frac{5}{4}), A(2\frac{2}{3}, 1)$

עורך: עובד לב ארי

3) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 4ax$, a פרמטר טבעי.

א. (1). מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = 5$?

ג. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x}{x^3 + 4ax - 5}$.

(1). האם לפונקציה יש אס' אנכית? נמק.

(2). נתון: $f(1) = 5$.

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(4). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $x \geq 0$.

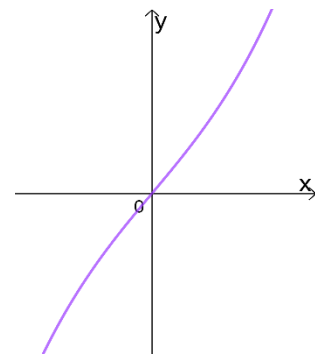
ד. הוכח עבור $0 < t < 1$: $\int_0^t f(x) dx > \int_0^t g(x) dx$

כתב: לי אשר

תשובות:

א. (1). $(0,0)$.

(2). עולה לכל x .



ב. פתרון אחד.

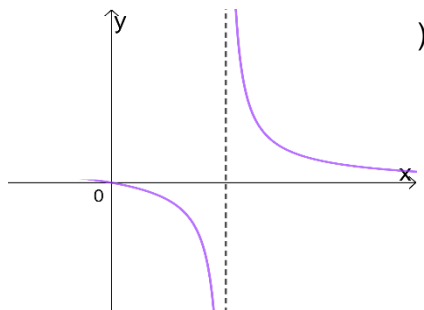
ג. (1). כן.

(2). $x = 1, y = 0$.

(3). ירידה: $0 < x < 1$.

או $x > 1$

עליה: אין.



ד. הוכחה.

עורך: עובד לב ארי

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2(a-x^2)}$, $a > 1$ הוא פרמטר. ידוע כי בתחום $x > 0$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד הנמצאת על הישר $x = a - 1$.

(א) הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
(2) מצא את a .

(ב) (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.
(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ענה על סעיף ג ללא שימוש בפונקציית הנגזרת $f'(x)$:

(ג) (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
(2) סרטט שקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

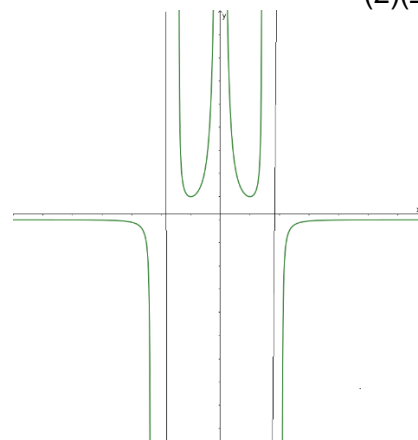
נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{2}{f(x)}$. הישר $y = k$ משיק לפונקציה בשתי נקודות.

(ד) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ והישר $y = k$.

כתב: חננאל כהן

תשובות: (א) (2) $a = 2$. (ב) (1) $x \neq 0, x \neq -\sqrt{2}, x \neq \sqrt{2}$.
ת. חיוביות: (2) $0 < x < \sqrt{2}, -\sqrt{2} < x < 0$. ת. שליליות: $x < -\sqrt{2}, x > \sqrt{2}$.
(ב) (3) $x = 0, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, y = 0$. ג. מינימום $(-1, 2)$ מינימום $(1, 2)$.
(ד) $s = \frac{16}{15}$ י"ח.

(ב) (2)



עורך: עובד לב ארי

(5) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$, $g(x) = \frac{x^2}{x+a}$, פרמטר a

טבעי.

א. עבור כל אחת מהפונקציות, מצא את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה). במידת הצורך הבע באמצעות a .

ב. נתון כי נקודת הקיצון של $f(x)$ הנמצאת ברביע ראשון, נמצאת גם על $g(x)$.

מצא את a .

ד. מצא את נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של $f(x)$ ושל $g(x)$ על אותה מערכת צירים.

ה. הוכח כי עבור כל $n > 0$ מתקיים $\frac{n^3}{n+1} < \int_n^{2n} g(x) dx < \frac{4n^3}{2n+1}$.

כתב: עמית רדין

תשובות: א) $f(x)$: ת.הגדרה - כל x . אסימפטוטה $y = 0$.

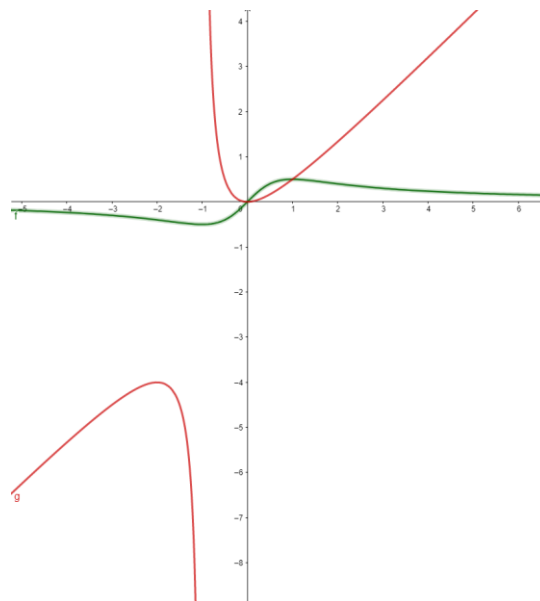
$g(x)$: ת.הגדרה - $x \neq -a$. אסימפטוטה $x \neq -a$.

ב) $a = 1$

ג) $f(x)$: $\min(-1, -0.5)$, $\max(1, 0.5)$

$g(x)$: $\min(0, 0)$, $\max(-2, -4)$

(ד)



[הפתרון המלא ביוטיוב](#)