נתון ישר ℓ ששיפועו שלילי והוא חותך את ציר ה-y בנקודה $C(0,6)$.
הישר ℓ משיק למעגל שמשוואתו $x^2+(y-b)^2=r^2$ $(b>r)$.
נתון כי מרחקו של הישר ℓ מראשית הצירים גדול פי 3 מרדיוס המעגל r.

א) מצא את b (מצא את שתי האפשרויות).

נסמן ב-O את ראשית הצירים וב-A את נקודת ההשקה בין הישר ℓ והמעגל. נתון כי שטח המשולש ACO הוא 3.

ב) מצא את משוואת הישר ℓ ואת משוואת המעגל אם נתון כי $b<6$.

מעבירים מעגל נוסף שחוסם את המשולש ACO.
מעגל זה חותך את ציר ה-x בראשית הצירים O ובנקודה נוספת-B. בנוסף, מעגל זה חותך את המעגל הנתון שבשאלה בנקודת ההשקה A ובנקודה נוספת-D.

ג) (1) מצא את משוואתו של מעגל זה.
(2) חשב את שטח המרובע $ABCDO$ שנוצר.

z הוא מספר מרוכב.

נתונה המשוואה: $32\cdot(z^2-\bar{z}\cdot z^3)=3+3\sqrt{3}i$.

א) מצא את ארבעת הפתרונות של המשוואה הנתונה.

כל הפתרונות שמצאת בסעיף א' נמצאים על גבי ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים במישור גאוס.
<u>מכפילים</u> במספר $w_1=cis(-60^\circ)$ את שני הפתרונות שהרדיוסים שלהם יותר קטנים מהרדיוסים של שני הפתרונות האחרים. לאחר הכפלה זו נוצר מרובע.

ב) (1) סרטט סקיצה של המרובע שנוצר.

(2) הסבר מדוע מרובע זה הוא מקבילית.

(3) חשב את השטח של מקבילית זו.

כעת <u>מחלקים</u> במספר $w_2=cis(30^\circ)$ את שני הפתרונות <u>החדשים</u> שנוצרו לאחר ההכפלה ב-w_1. לאחר החילוק נוצר שוב מרובע. נסמן ב-h את גובה המרובע וב-S את שטחו.

ג) הראה כי $S=h$.

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{a+e^{-3x}}$, $a>1$ הוא פרמטר.

הבע באמצעות a (במידת הצורך) את תשובותיך לסעיף א':

א) (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה-x.

(3) הסבר מדוע לכל x בתחום ההגדרה מתקיים $0<f(x)<1$.

(4) מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ב) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=\frac{1}{2}$ וציר ה-y שווה ל- $\frac{\ln(1\frac{1}{3})}{6}$.

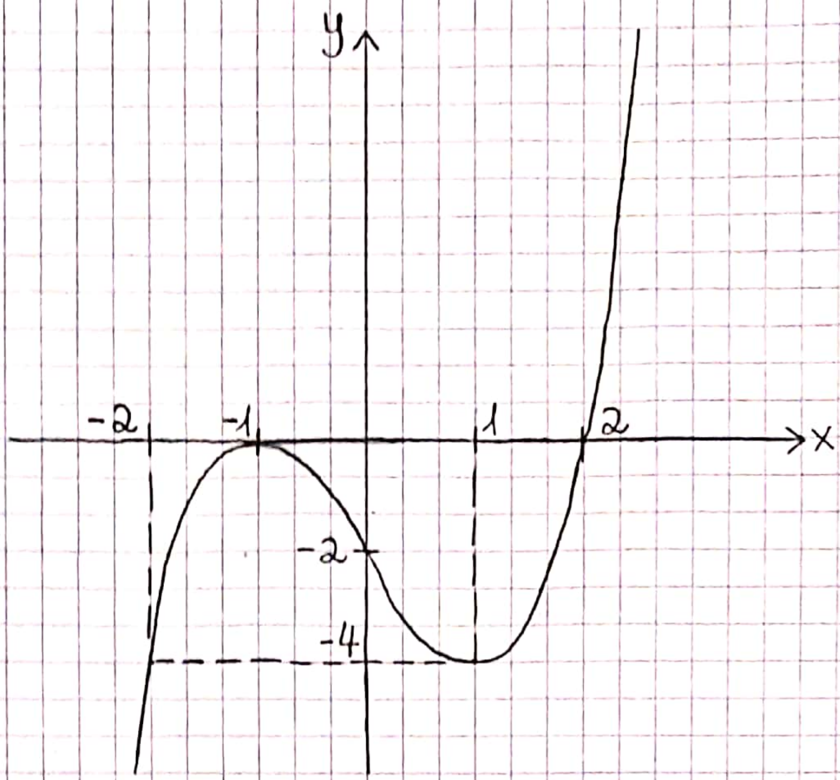
ג) הראה כי $f(x)=\frac{ae^{3x}}{ae^{3x}+1}$ וחשב את a.

נתונה הפונקציה $g(x)=\ln(f(x))$.

באותה מערכת צירים בה סרטטת את גרף הפונקציה $f(x)$ מוסיפים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. מעבירים אנך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_A,y_A)$ ואת גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $B(x_B,y_B)$.

ד) הסבר מדוע $y_B-y_A<0$.

בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x)$ אשר רציפה וגזירה לכל x.



ענה על סעיפים א'-ב' בהסתמך על הגרף הנתון:

א) (1) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)+4$.

נתונה הפונקציה $g(x)=4\ln(-f(x))+f(x)$.

ב) (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-y.

(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון: $f(x)=x^3-3x-2$.

ד) הסבר מדוע $\int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx > 3\frac{1}{4}$.

תשובות סופיות - מתכונת 3:

1) א) $b=8$ או $b=4$.

ב) $\ell: y=-x+6$, $x^2+(y-4)^2=2$.

ג) (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=13$.

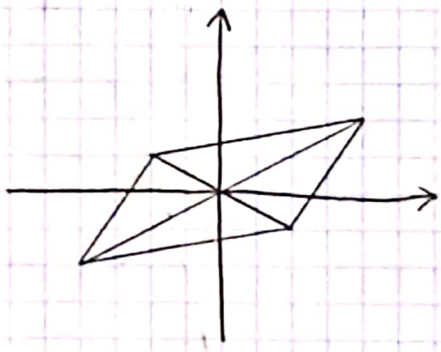
(2) $S=16.4$ יח"ר.

2) אין

3) א) $Z_1=\frac{1}{2}cis(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$, $Z_2=\frac{1}{2}cis(210^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

$Z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}cis(30^\circ)=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$, $Z_4=\frac{\sqrt{3}}{2}cis(210^\circ)=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

ב) (1)



(2) הסבר.

(3) $S=\frac{3}{4}$ יח"ר.

ג) הוכחה.

4) א) (1) ת.ה. - כל x.

ג) $a=3$

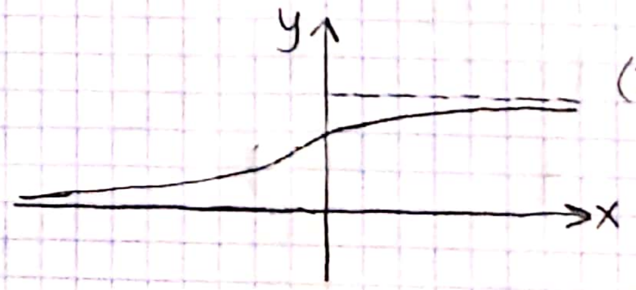
(2) $y=1\,(x\to\infty)$, $y=0\,(x\to-\infty)$.

ד) הסבר.

(3) הסבר.

(4) $\left(-\frac{\ln(a)}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

ב)



5) א) 1) <u>ת.חיוביות:</u> $x<-1 \cup x>1$.

<u>ת.שליליות:</u> $-1<x<1$.

2) <u>ת.חיוביות:</u> $-2<x<1 \cup x>1$ - (ואפשר גם: $x>-2, x\neq 1$)

<u>ת.שליליות:</u> $x<-2$

ב) 1) <u>ת.ה.</u> - $x<-1 \cup -1<x<2$ (ואפשר גם: $x<2, x\neq -1$)

2) $x=-1 , x=2$.

3) $(0, 4\ln(2)-2)$.

4) $(-2, 4\ln(4)-4)_{max} , (1, 4\ln(4)-4)_{max}$

ג)

ד) הסבר.