

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך - $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר

המחשבון.

הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. רונית יוצאת בשעה 8:00 מתל אביב להרצליה במהירות קבועה. בו זמנית, יוצאת דנה מהרצליה לתל אביב גם כן במהירות קבועה. לאחר שעתיים מרגע יציאתן נפגשו דנה ורונית, ונאלצו לחזור באותה מהירות אל נקודת יציאתן ההתחלתית. כאשר הגיעו חזרה לתל אביב והרצליה, יצאו שוב לעבר היעד המתוכנן, במהירות קבועה הגבוהה ב-1 קמ"ש ממהירותם הקודמת.

בשעה 13:36 נפגשו, רונית ודנה, בפעם השנייה בדרכן ליישובים, ובשעה 16:00 דנה הגיעה לתל אביב.

- א. מצא את המהירות ההתחלתית של דנה ושל רונית.
- ב. כאשר רונית הגיעה להרצליה, החלה לחזור במהירות קבועה הזוהי למהירות ההתחלתית. קבע האם רונית הגיעה לפני דנה לתל אביב. נמק.



[הפתרון המלא ביוטיוב](#)

2. נתונה סדרה a_n . S_n סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n . נתון כי מתקיים עבור כל n טבעי:
- $$2S_n - S_{n+1} = n^2 - a_{n+1}$$
- א. (1) הבע באמצעות n את S_n .
- (2) נתון: $a_1 = 1$. הוכח כי הסדרה a_n חשבונית.
- (3) מצא את הפרש הסדרה.
- יוצרים סדרה חדשה כך שאיברי סדרה זו מתקבלים מהפחתת איברי הסדרה a_n בסכום האיברים הקודמים להם בסדרה a_n .
- לדוגמה: האיבר השלישי בסדרה החדשה יהיה $a_3 - S_2$.
- ב. (1) כמה איברים חיוביים מתקבלים בסדרה החדשה?
- (2) T_k הוא סכום k האיברים הראשונים בסדרה החדשה ($k \geq 1$).
- הסבר מדוע $T_k \leq 4$.
- יוצרים סדרה b_n המקיימת עבור כל n טבעי: $b_n = T_{n+2} - 5S_n$.
- ג. הוכח כי כל אברי הסדרה b_n שליליים.

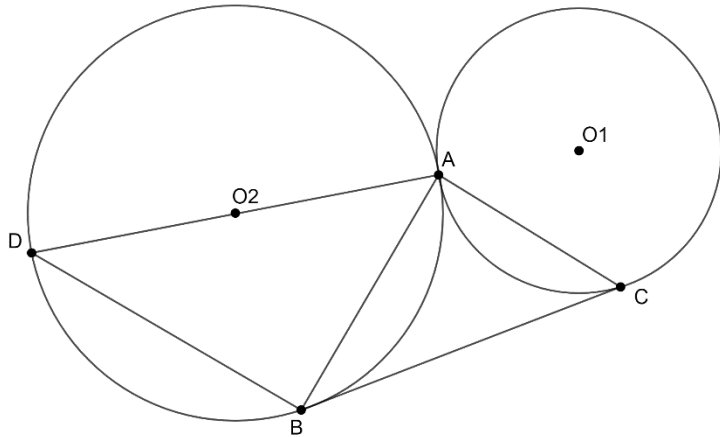
3. כדי להתקבל למסלול מצויינות בבית הספר התלמידים צריכים לעבור מבחן מיון. ההסתברות שתלמיד יעבור את המבחן בפעם הראשונה היא P . תלמידים שלא הצליחו לעבור את הבחינה בפעם הראשונה, יכולים להיבחן פעם נוספת. ההסתברות שתלמיד הניגש למבחן השני לא יעבור את אותו היא $3P$. ידוע כי 48% מהנבחנים לא הצליחו להתקבל למסלול מצויינות. נתון: $P < \frac{1}{3}$.

- א. (1). מצא את P .
- (2). חשב את ההסתברות שתלמיד נכשל במבחן הראשון ועבר את המבחן השני.
- ב. בכיתה יש K תלמידים שנבחנו למסלול מצויינות בוחרים באקראי, בזה אחר זה, שני תלמידים. ההסתברות שלפחות אחד מהם התקבל למסלול מצויינות היא 0.78. מצא את כמות התלמידים בכיתה שנבחנו למסלול מצויינות.



[הפתרון המלא ביוטיוב](#)

פרק שני- גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. לפניך שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2

המשיקים זה לזה מבחוץ.

הנקודה A היא נקודת ההשקה של שני המעגלים.

הנקודות B ו- C הן נקודות ההשקה של

המעגלים עם המשיק המשותף BC (ראה שרטוט)

AD קוטר המעגל שמרכזו O_2 .

א. (1) הוכח: $BA \perp AC$.

(2) הוכח: $\Delta BAC \sim \Delta DBA$.

נתון: שטח המרובע $ACBD$ גדול פי 2.5 משטח המשולש ABC .

ב. חשב את היחס $\frac{AC}{DB}$.

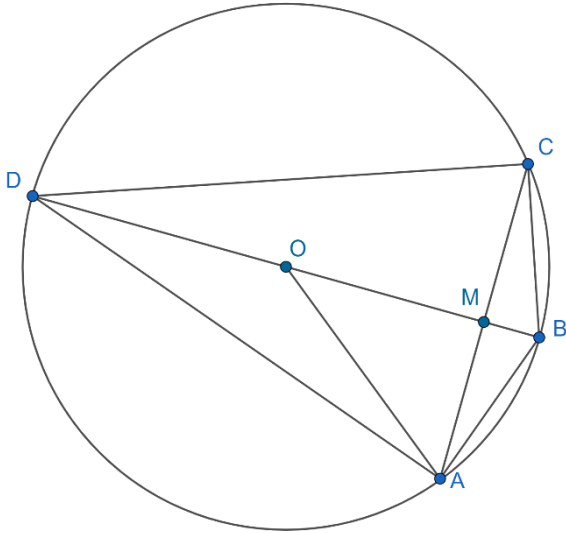
נתון: $BC = \sqrt{10}$ ס"מ

ג. חשב את DB .



[הפתרון המלא ביוטיוב](#)

עורר: עובד לב ארי



המאגר הארצי במתמטיקה - כתב: לי אשר

5. לפיך מרובע $ABCD$ החסום במעגל

שמרכזו בנקודה O .

AC ו- BD הם אלכסוני המרובע $ABCD$ הנחתים

בנקודה M .

נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$, $\sphericalangle CMB = \beta$.

א. הראה שמתקיים: $\frac{BM}{DM} = -\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \beta)}$.

נתון: $ABCD$ דלתון.

ב. הוכח: $\frac{S_{BMA}}{S_{DMA}} = \text{tg}^2 \alpha$.

נתון: $S_{BMA} = 4$ סמ"ר, $S_{ABCD} = 32$ סמ"ר.

ג. חשב את α .

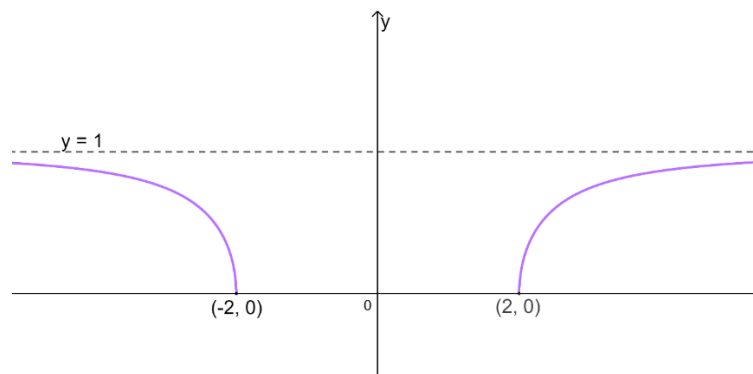


[הפתרון המלא ביוטיוב](#)

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המקיימות: $g(x) = \sqrt{1 - f(x)}$.

לפניך גרף הפונקציה $g(x)$:



א. הסתמך על הנתונים שעל גבי השרטוט ומצא עבור אילו ערכי x מתקיים:

(i). $f(x) = 1$.

(ii). $0 < f(x) < 1$.

ב. לפניך 3 פונקציות. קבע איזו פונקציה מתאימה לתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \quad f(x) = \frac{4}{x^2} \quad f(x) = -\frac{8}{x^2}$$

ג. חקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים:

(1). תחום הגדרה.

(2). אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(3). נקודות חיתוך עם הצירים.

(4). נקודות קיצון וסוגן (אם יש).

(5). שרטט את גרף הפונקציה.

ד. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 2$ ו- $x = 4$.

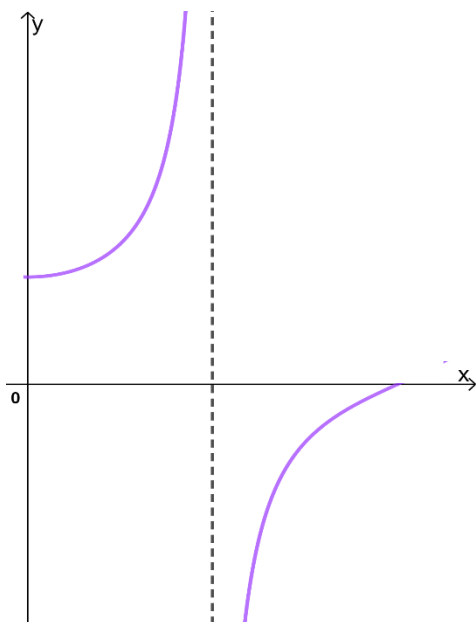
7. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$.

א. מצא בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

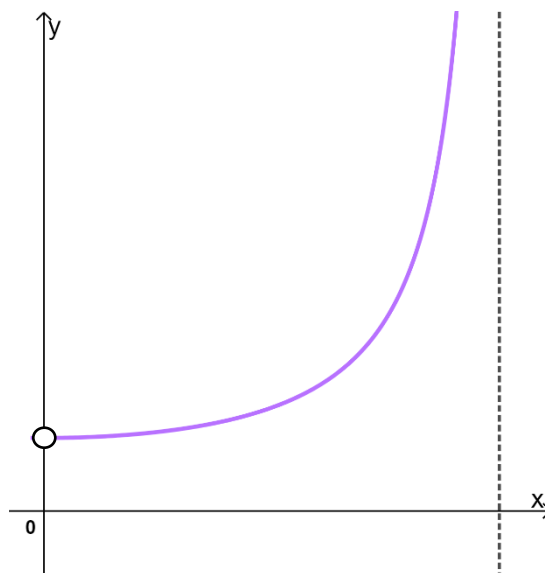
(1). תחום ההגדרה של שתי הפונקציות.

(2). האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x (אם יש).

ב. לפיך הגרפים של שתי הפונקציות בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:



(II)



(I)

(1). התאם בין כל משוואת פונקציה לגרף המתאים עבודה. נמק בחירתך.

(2). כמה פתרונות למשוואה $f(x) = |g(x)|$?

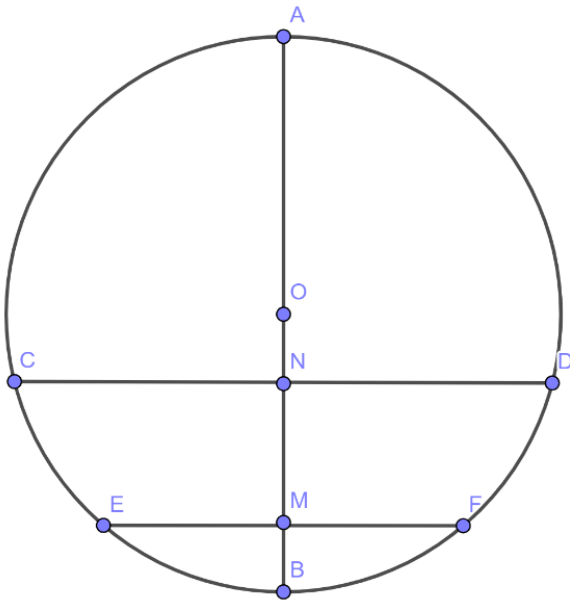
ג. מגדירים פונקציה חדשה $h(x) = f(-x) + g(-x)$.

מצא בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

(1). תחום ההגדרה של הפונקציה והאסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .

(2). הוכח כי הפונקציה זוגית.

(2). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



8. לפניך מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

AB הוא קוטר במעגל והישרים CD ו-EF הם מיתרים במע

המקבילים זה לזה. הקוטר AB חותך את המיתרים

CD ו-EF בנקודות M ו-N בהתאמה, הנמצאות על הרז

הרדיוס OB .

נתון: $EM = MF$.

א. הבע באמצעות R את אורך הקטע BN עבורו

שטח המשולש ANC מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המקסימלי

של המשולש ANC.

פתרונות סופיים מתכונת 581:

1. א. מכונית- 5 קמ"ש.

משאית- 3 קמ"ש.

ב. המשאית הגיעה לפני המכונית לתל אביב.

2. א. (1) $S_n = n^2$.

(2) הוכחה.

(3) $d = 2$.

ב. (1) שלושה.

(2) הסכום המקסימלי הוא סכום 3 האיברים הראשונים בסדרה החדשה , ולכן $T_k \leq 4$.

ג. הוכחה.

3. א. (1) 0.2 (2) 0.32 ב. 25

4. א. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

ב. $\frac{2}{3}$.

ג. 3 ס"מ.

5. ג. 30° .

6. א. (i) $x = 2$ או $x = -2$.

(ii) $x > 2$ או $x < -2$.

ב. $f(x) = \frac{4}{x^2}$.

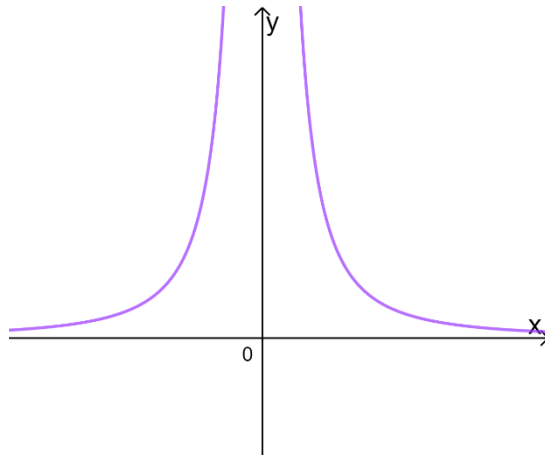
ג. (1) $x \neq 0$.

(2) $y = 0$, $x = 0$.

(3) אין .

(4) אין .

(5)



ג. 1 .

7. א. (1) $f(x) : x \neq \frac{\pi}{4}$.

$$g(x) : x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) : x = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$g(x) : x = \frac{\pi}{2}$$

ב. (1) גרף I - $g(x)$.

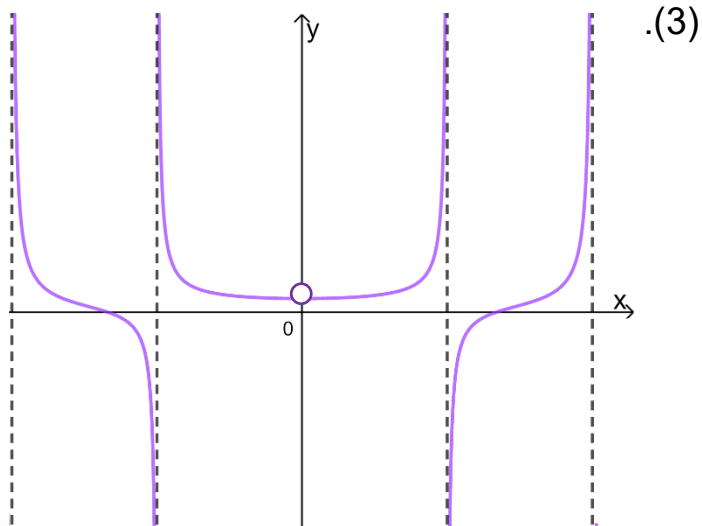
גרף II - $f(x)$.

(2) אין פתרון.

ג. (1) תחום הגדרה: $x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq 0, x \neq -\frac{\pi}{4}, x \neq -\frac{\pi}{2}$

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x : $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{2}$.

(2) הוכחה.



8. א. $0.5R$.

ב. $\frac{3\sqrt{3}}{8}R^2$.

עורך: עובד לב ארי



המאגר הארצי במתמטיקה - כתב: לי אשר