מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך - $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר המחשבון.
הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

פרק ראשון- אלגברה והסתברות

1. גל, תלמיד כיתה יא', חוזר מבית הספר לביתו לאחר יום לימודים.

הדרך מבית הספר של גל לביתו מורכבת משלוש גבעות חצי מעגליות זהות,

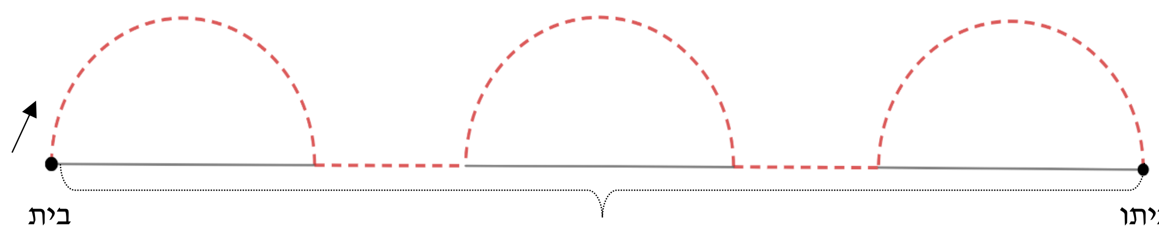
הנמצאות במרחקים שווים זו מזו.

בין כל גבעה לגבעה קיים מסלול מישורי.

תחילת המסלול לביתו של גל היא בתחילת הגבעה הראשונה, וביתו של גל (סוף המסלול)

נמצא בסוף הגבעה השלישית.

לפניך צורת המסלול :



הקו האדום המקוטע מסמל את מסלול ההליכה של גל.

נתון כי המרחק האופקי בין בית הספר לביתו של גל הוא 10 ק״מ (כמתואר בשרטוט) , ומהירותו של גל

היא 2 ק״מ לשעה לכל אורך המסלול.

נסמן : h - גובה כל אחת מהגבעות.

ענה על הסעיפים הבאים, ובמידת הצורך השתמש ב- π בתשובתך :

א. (1). הבע באמצעות h את אורך המסלול המישורי בין כל שתי גבעות.

(2). הבע באמצעות h את הזמן שלקח לגל להגיע לביתו.

יום למחרת, הלך גל מביתו לבית הספר במהירות קבועה השונה ממהירותו ביום הקודם.

נודע שהזמן שנדרש לו להגיע לאמצע המסלול, היה קצר בשעה מהזמן שנדרש לו יום קודם להגיע

מבית הספר לביתו.

נתון : $1\frac{1}{3}$ ק"מ $= h$.

ב. מצא באיזו מהירות הלך גל מביתו לבית הספר יום למחרת.

2. נתונה סדרה הנדסית a_n שמנתה q ובעלת $2n$ איברים ($q > 1\ ,\ n > 1$).

סכום n האיברים הראשונים בסדרה קטן פי 32 מסכום n האיברים האחרונים בסדרה.

נתון: $a_1 = q$.

א. (1). הבע באמצעות q את האיבר במקום ה- $n+1$.

(2). הבע באמצעות q את סכום n האיברים הראשונים בסדרה.

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה.

נתון: $S_n = q^{n+1} - q$.

ב. (1). מצא את מנת הסדרה.

(2). מצא את כמות האיברים בסדרה.

ג. נתונה הסדרה b_n , בעלת $2n-1$ איברים, המקיימת: $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$.

(1). מצא את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה b_n .

(2). הוכח כי סכום הסדרה שווה להפרש בין ריבוע האיבר העשירי בסדרה a_n לבין ריבוע האיבר הראשון בסדרה a_n , וחשב את הסכום.

3. תלמידי כיתה י'1 החליטו לבחור נציגים לכיתה באמצעות משחק הכולל שני שלבים:

בשלב הראשון אחד התלמידים בכיתה מטיל קוביית משחק הוגנת (המכילה את המספרים 1-6), 3 פעמים. אם סכום המספרים שיצא לתלמיד ב- 3 ההטלות הוא זוגי, התלמיד בוחר באקראי בן מהכיתה.

אם סכום המספרים שיצא לתלמיד ב-3 ההטלות הוא אי זוגי, התלמיד בוחר באקראי בת מהכיתה.

התלמיד שמטיל את הקוביה <u>לא נוטל חלק בשלב השני</u>-שלב בחירת התלמיד/ה.

א. מצא את ההסתברות שסכום המספרים לאחר 3 הטלות יהיה אי זוגי.

נתון כי בכיתה יש 20 בנות ו- 31 בנים עם <u>שמות שונים</u>.

בן מטיל את הקוביה ולאחר מכן בוחר תלמיד.

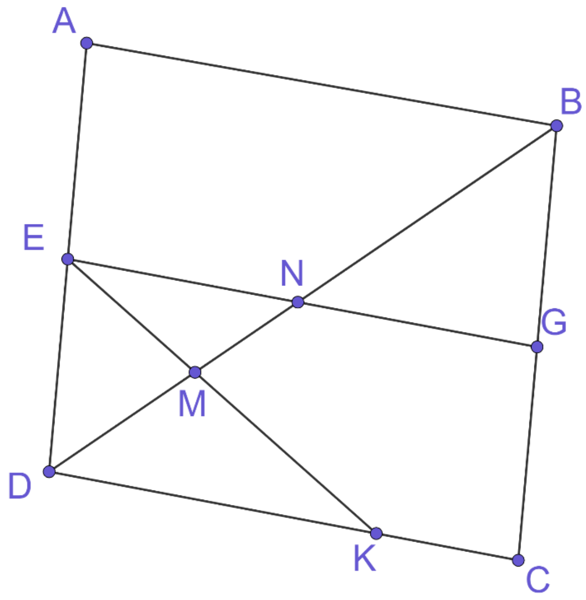
ב. מה ההסתברות שהתלמיד שביצע את ההטלה בחר בתלמידה יעל או בתלמיד גיא?

אותו תלמיד (בן) חוזר על המשחק שלוש פעמים.

ידוע כי לפחות פעמיים יעל נבחרה.

ג. חשב את ההסתברות שיעל נבחרה 3 פעמים בדיוק.

פרק שני- גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. לפניך מעוין $ABCD$. הנקודות E ו- G ו-K נמצאות על הצלעות AD , BC ו- DC בהתאמה. הקטעים EG ו- EK חותכים את אלכסון המעוין DB בנקודות N ו- M בהתאמה.

נתון: $EG \parallel DC$.

א. הוכח: $NM \cdot DK = MD \cdot ED$.

נתון: $MD > NM$.

ב. (1). האם $EK \parallel AC$? נמק.

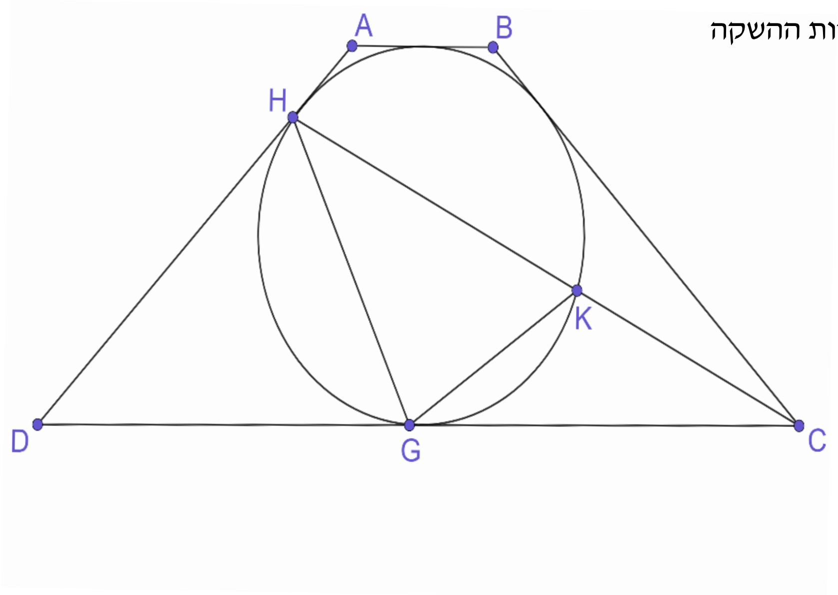
(2). האם $\frac{S_{\Delta EDK}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{EK^2}{AC^2}$? נמק.

נתון: $S_{AENB} = S_{NGCD}$.

ג. (1). הוכח כי הנקודה N היא נקודת מפגש האלכסונים במעוין $ABCD$.

(2). נתון: $DM = 2MN$. חשב את היחס: $\frac{S_{EDM}}{S_{ABCD}}$.

5. לפניך מעגל החסום בטרפז שווה



שוקיים $ABCD$. הנקודות H ו- G הן נקודות ההשקה של צלעות הטרפז AD ו- CD בהתאמה עם המעגל.

הישר העובר דרך הנקודות H ו- C חותך את המעגל בנקודה K .

א. הוכח: $DC = 2HD$.

נתון: $\frac{HC}{HD} = \sqrt{3}$.

ב. חשב את זוויות הטרפז $ABCD$.

נתון: $S_{\Delta HDC} = 98\sqrt{3},\ BC = 4AB$.

ג. חשב את היקף הטרפז $ABCD$.

ד. חשב את רדיוס המעגל החוסם את טרפז $ABCD$.

פרק שלישי- חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה : $f(x) = a\sqrt{cosx} - b$ בתחום : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

a ו- b פרמטרים טבעיים .

הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה אחת.

א. הוכח: $b \leq a$.

נתון : הערך המינימלי של הפונקציה הוא -4 והערך המקסימלי של הפונקציה הוא 0 .

ב. מצא את a ו- b .

ג. חקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים :

(1). שיעורי נקודות חיתוך עם הצירים.

(2). שיעורי נקודות הקיצון וסוגן.

(3). תחומי עליה וירידה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = 4\sqrt{2\cos^2 x - 1} - 4$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). הוכח : $g(x) = f(mx)$, ומצא את m .

(3). שרטט באותו גרף סקיצה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

הנגזרת הראשונה $f'(x)$ והנגזרת השנייה $f''(x)$ גם כן מוגדרות לכל x .

לפניך טבלה המתארת את ערכי $f'(x)$ (הנגזרת הראשונה) בעבור ערכי x שונים:

x	-4	-1	2	6
$f'(x)$	n	-12	0	m

m,n פרמטרים **חיוביים**.

א. (1). סמן את הטענה הנכונה בהכרח מבין הטענות שלפניך ונמק בחירתך:

(i). לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות קיצון בלבד.

(ii). לפונקציה $f(x)$ לפחות שתי נקודות קיצון.

(iii). לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד.

(2). הוכח כי לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום בתחום $-4 < x < -1$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בין 1- לבין 4- .

ב. הוכח: $f'(-5) \cdot f'(5) > 0$.

ג. שרטט סקיצה של גרף נגזרת הפונקציה $f'(x)$.

ד. מגדירים פונקציה חדשה : $g(x) = 4\,f'(x) \cdot f''(x)$

(1). הוכח כי הפונקציה $g(x)$ חיובית בתחום $x > 2$.

(2). הבע באמצעות m את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה-x והישר $x = 6$.

8. נתונה הפונקציה: $f(x)=(x+1)(x^2-1)$.

א. (1). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

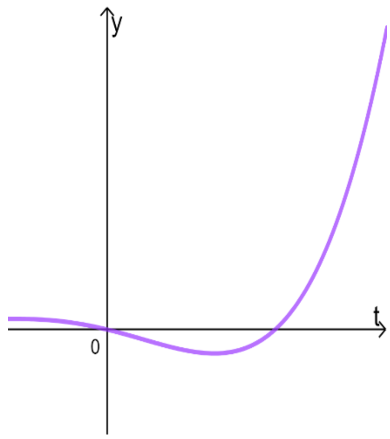
(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

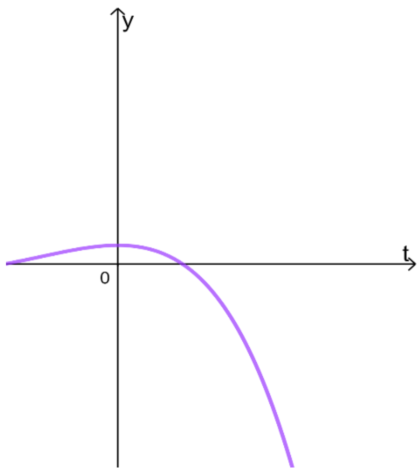
(4). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $y(t)=\int_0^{t+1} f(x)\,dx$ בתחום $t\ge -1$.

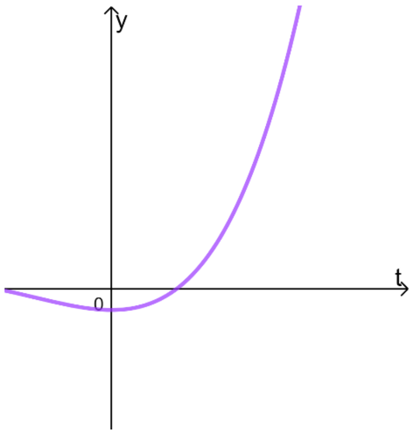
(1). לפניך שלושה גרפים. קבע איזה גרף מתאים לתאר את $y(t)$ (בתחום $t\ge -1$):



(I)



(II)



(III)

(2). עבור איזה ערך של t , ערך הביטוי $\int_0^{t+1} f(x)\,dx$ מינימלי? נמק.

תשובות סופיות:

1. א. $5-3h$.

ב. $1.5\pi h-3h+5$.

ג. מהירותו של גל יום למחרת היא: $1+\frac{1}{2\pi} \approx 1.16$ קמ"ש

2. א. (1). $32q$.

(2). $\frac{31q}{q-1}$.

ב. (1). $q=2$.

(2). 10 איברים.

ג. (1). $b_4=768$, $b_3=192$, $b_2=48$, $b_1=12$.

(2). 1,048,572.

3. א. $\frac{1}{2}$.

ב. $\frac{1}{24}$.

ג. $\frac{1}{118}$.

4. א. הוכחה.

ב. (1). לא.

(2). לא.

ג. (1). הוכחה.

(2). $\frac{1}{12}$.

5. א. הוכחה.

ב. $60°, 120°, 60°, 120°$.

ג. 64 סמ"ר.

ד. $4\sqrt{7}$ ס"מ.

6. א. הוכחה.

ב. $a = 4\,, b = 4$.

ג. (1). $(0,0)$.

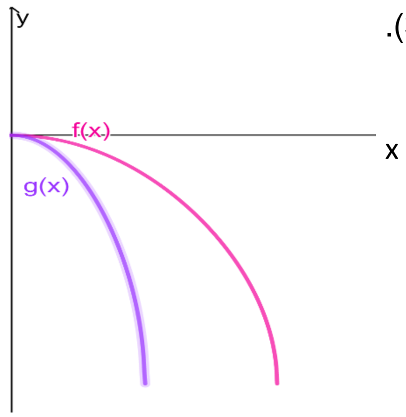
(2). $(0,0)$ מקסימום בקצה , $(\frac{\pi}{2}\,, -4)$ מינימום בקצה.

(3). יורדת לכל x בתחום.

ד. (1). $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

(2). הוכחה , $m = 2$.

(3).

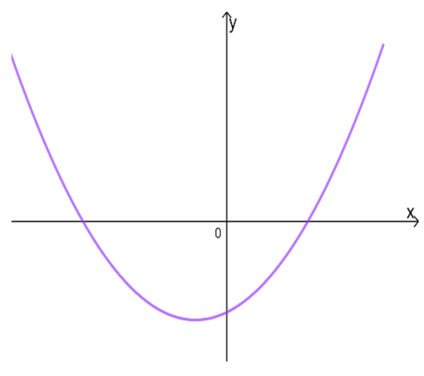


7. א. (1). טענה (ii).

(2). הוכחה.

ב. הוכחה.

ג.



ד. (1). הוכחה.

(2). $2m^2$.

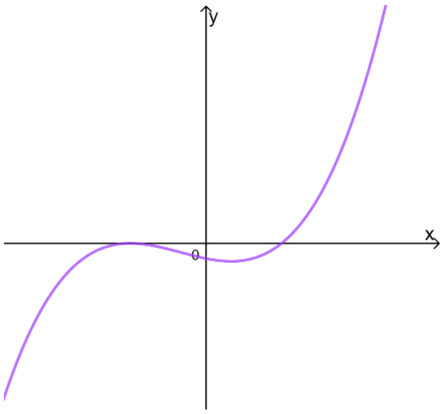
8. א. (1). $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$.

(2). $(-1,0)$ מקסימום , $\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$ מינימום .

(3). עליה: $x < -1$ או $x > \frac{1}{3}$.

ירידה: $-1 < x < \frac{1}{3}$.

(4).



ב. (1). גרף (III) .

(2). $t = 0$.