

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על 5 שאלות לבחירתך - $5 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר

המחשבון.

הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

פרק ראשון- אלגברה והסתברות

1. אדם יוצא מעיר A לעיר B במהירות v_1 . שעה אחרי שיצא אדם יוצא דן, חבר של אדם מעיר A לעיר B במהירות v_2 הגדולה ממהירותו של אדם. דן משיג את אדם וממשיך לעיר B. כשמיגיע דן לעיר B חוזר דן מיד לעיר A ופוגש בדרכו חזרה לעיר A, במרחק של $\frac{20}{3}$ ק"מ מעיר B את אדם שעוד בדרכו לעיר B. ידוע כי המרחק מעיר A עד נקודת הפגישה הראשונה של דן ואדם קטנה פי 2 מהדרך שבין עיר B ועד נקודת הפגישה הראשונה. ידוע גם כי משך הזמן שמהפגישה הראשונה עד הפגישה השנייה הוא שתיים וארבעים דקות.

א.(1). מצא את מהירותו של דן ושל אדם.

(2). מצא את המרחק שבין עיר A לעיר B.

יום למחרת יוצא אדם מעיר A לעיר B במטרה להעביר לעיר B מספר חבילות. בדיוק באותו רגע יוצא גם דן מעיר A לעיר B. מהירותיהם לא השתנו בשני הימים. חצי שעה לאחר צאתם מעיר A יוצא אורי, אף הוא מעיר A, במהירות הגדולה ב-5 קמ"ש ממהירותו של דן במטרה להעביר לדן חבילה ששכח לקחת עימו. בדרכו הוא פוגש את אדם ומבקש ממנו שיעביר את החבילה לדן. אדם מגביר את מהירותו ב- v קמ"ש במטרה להעביר לדן את החבילה ששכח. (ב) מצא את תחום הערכים של v אם ידוע כי אדם השיג את דן עוד לפני שדן הגיע לעיר B וכן כי מהירותו של אדם אינה עולה על 35 קמ"ש לאחר שהגביר את מהירותו.

כתב: נהוראי זקס

2. הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה (n מספר טבעי) :

$$\begin{cases} s_1 = 9 \\ s_{n+1} = s_n - 7n + 9 \end{cases}$$

כאשר : $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

א. הוכח שהסדרה a_1, a_2, a_3, \dots היא חשבונית.

סדרה נוספת מקיימת את הכלל : $b_{n+1} - b_n = a_n$.

ב. חשב את הסכום הבא (רשום את תשובתך באמצעות שברים, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \frac{b_4 - b_3}{a_3 - a_4} + \dots + \frac{b_{20} - b_{19}}{a_{19} - a_{20}}$$

3. ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל משתתפי כינוס הבחירות ?

ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו- "נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.

ג. עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי $a = 6$.

נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון

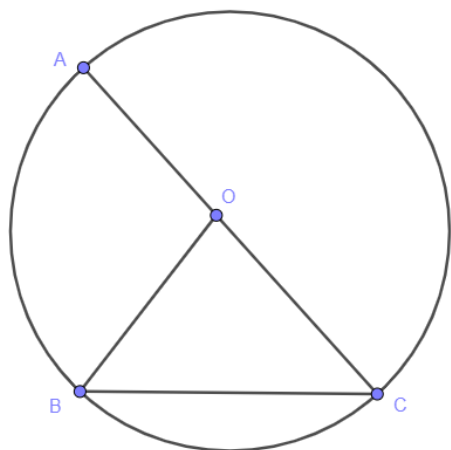
בוקר. מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה ?

ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הכינוס (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

4.

(א) הוכח: " במעגל: זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת (מאותו צד) שוות ביניהן " .

(ב) נתון מעגל שמרכזו O . AC הוא קוטר במעגל. D היא נקודה הנמצאת על המיתר BC כך שהמשך הקטע OD חותך את המעגל ומחלק את הקשת BC לשתי קשתות שוות.
הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle OBD$.



(ג) הוכח: $OD = \sqrt{AO^2 - \frac{BC^2}{4}}$.

(ד) נתון: $\angle ACB = 30^\circ$, $DC = 5$.
חשב את שטח המשולש ADC .

כתבה: אימאן סולטאן.

5. במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC . ידוע כי: AF הוא קוטר במעגל .

המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC .

הנקודה E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם

המשיק למעגל ב-B .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב-F עם

המשיק למעגל ב-C .

AF ו-BC נפגשים בנקודה T .

נתונה הזווית $\angle BAF = \alpha$.

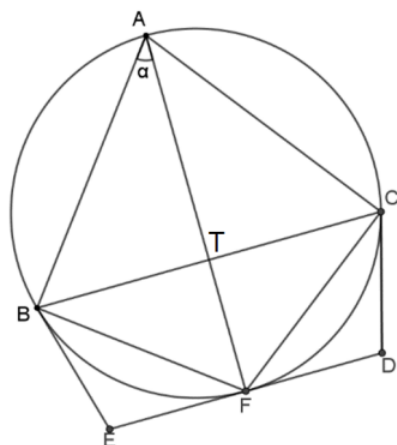
א. בטא באמצעות α את $\angle BEF$. הסבר שיקוליך בקצרה .

אין צורך לפרט כהוכחה בגיאומטריה .

ב. הוכח כי: $BE = R \cdot \tan \alpha$.

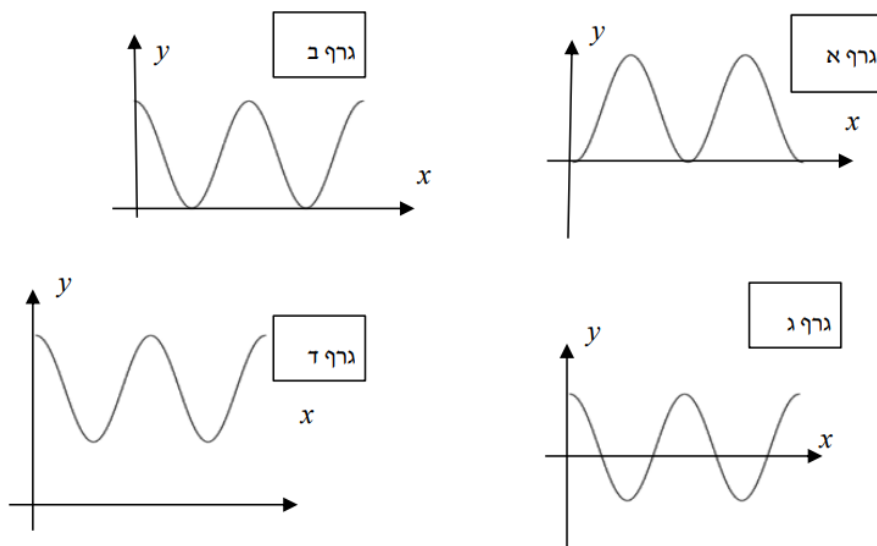
ג. חשב את מידת הזווית α עבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש BEF .

ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD .



6. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \cos^2 2x$, $g(x) = \cos 4x + 2$.

א. מצא לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים מבין ארבע הגרפים הבאים, נמק את קביעתך.



ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$, ומצא מה ערכו של c ?

ג. בכמה גדול $\int_0^\pi g(x) dx$ מ- $\int_0^\pi f(x) dx$. נמק את תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

7. נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$, $g(x) = \frac{x^2}{x+a}$, a פרמטר טבעי.

א. עבור כל אחת מהפונקציות, מצא את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה). במידת הצורך הבע באמצעות a .

ב. נתון כי נקודת הקיצון של $f(x)$ הנמצאת ברביע ראשון, נמצאת גם על $g(x)$. מצא את a .

ד. מצא את נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של $f(x)$ ושל $g(x)$ על אותה מערכת צירים.

ה. הוכח כי עבור כל $n > 0$ מתקיים $\frac{n^3}{2n+1} < \int_n^{2n} g(x) dx < \frac{4n^3}{2n+1}$.

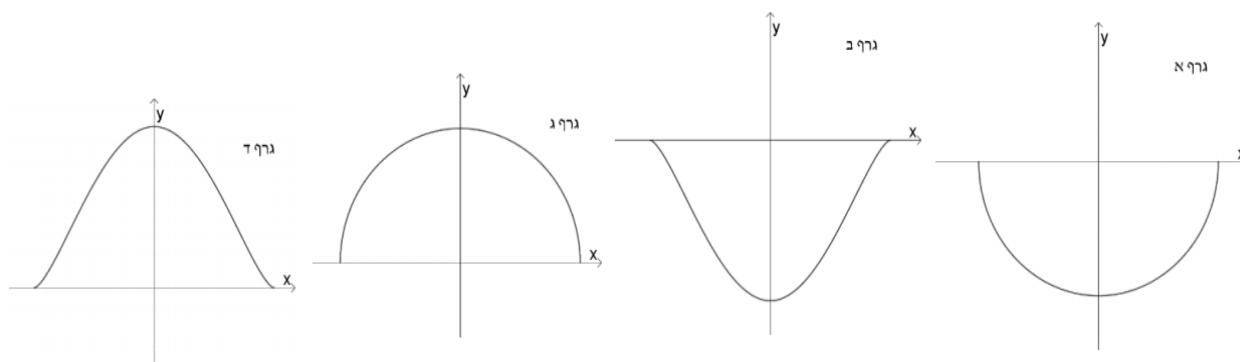
כתב : עמית רדין



[הפתרון המלא ביוטיוב](#)

8. נתונה הפונקציה: $k > 0, f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$

א. בחר בין הגרפים הבאים את הגרף המתאים לפונקציה. נמק בחירתך.

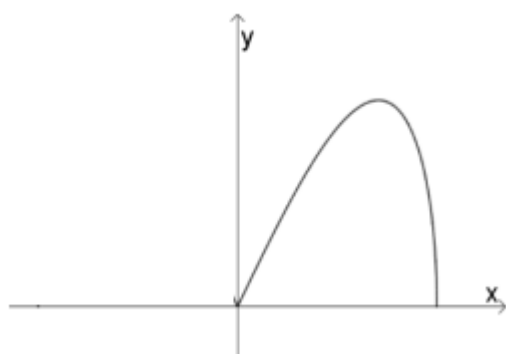


ב. מנקודה מימין לציר Y (נסמנה ב-A) שעל הגרף של $f(x)$ מעבירים אנכים לצירים. האנך לציר ה-X חותך את הציר בנקודה B, האנך לציר Y חותך את הציר בנקודה C. הנקודה O היא ראשית הצירים.

(1) בטא באמצעות k את שיעורי הנקודה A בה מתקבל שטח מקסימלי למרובע ABOC הנוצר באופן זה.

(2) ידוע כי השטח המקסימלי של מרובע ABOC שנוצר באופן זה הוא: 2. מצא את ערכו של k .

(3) לפניך הגרף המתאים לתיאור פונקציית השטח של המרובעים ABOC, כאשר הנקודה



A שעל הגרף מימין לציר Y. סרטט גרף שיתאר את פונקציית השטח של המרובעים ABOC, כאשר הנקודה A נמצאת משמאל לציר ה-Y. פרט שיקולך.

תשובות:

1) א. (1) מהירותו של דן 10 קמ"ש, מהירותו של אדם 5 קמ"ש. (2) 30 ק"מ.

$$\frac{20}{3} < v \leq 30 \quad \text{ב)}$$

$$\frac{1026}{7} \approx 146.57 \quad \text{ב. (2)}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{11}\right) + \left(\frac{1}{11}\right)^6 = 0.0000344 \quad \text{ד. (3)}$$

$$\frac{0.2a}{1+0.2a} \cdot 0.2 \quad \text{ב. (3)}$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{3} \quad \text{יח"ר. (4)}$$

$$180 - 2\alpha \quad \text{ג. (5)}$$

$$\frac{R\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \quad \text{ד. (5)}$$

6) א. $f(x)$ מתאימה לגרף ב, $g(x)$ מתאימה לגרף ד. ב. $C=1$ ג. π ד. π^2 .

7) א) $f(x)$: ת.הגדרה - כל x אסימפטוטה $y = 0$.

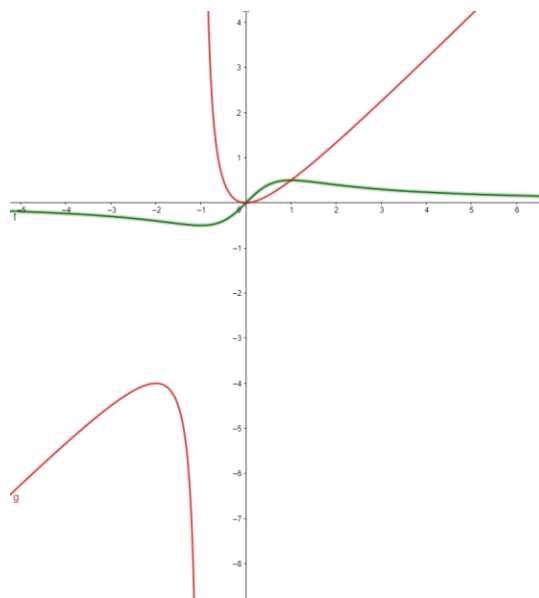
$g(x)$: ת.הגדרה - $x \neq -a$ אסימפטוטה $x \neq -a$.

ב) $a = 1$.

ג) $f(x)$: $\min(-1, -0.5)$, $\max(1, 0.5)$.

$g(x)$: $\min(0, 0)$, $\max(-2, -4)$.

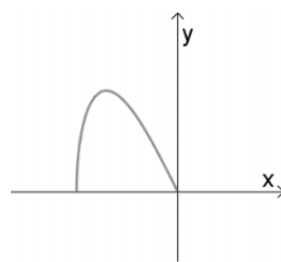
ד)



8) א. גרף ג. ב. (1) $A(t, \sqrt{k^2 - t^2})$ (2) $k = 2$.

עורך: עובד לב ארי

המאגר הארצי במתמטיקה



(3)