

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך - $4 \times 25 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר

המחשבון.

הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

1. גדי ורן רצים סביב בית הספר, במסלול מעגלי שאורכו 4800 מטרים (אורך הקפה אחת).
 כל אחד מהם מבצע 3 הקפות ברצף סביב בית הספר.
 גדי ורן יוצאים בו זמנית מנקודת ההתחלה באותו כיוון ובמהירויות קבועות.
 גדי התחיל את המסלול במהירות הגבוהה ממהירותו של רן, אך התעייף במהלך ההקפה הראשונה ונאלץ לעצור למשך 20 שניות.
 כאשר גדי סיים לנוח וחזר לרוץ באותה המהירות שהתחיל לרוץ, המרחק בין גדי לרן היה 240 מ', ואף אחד מהם עדיין לא סיים את ההקפה הראשונה.
 גדי התחיל את ההקפה השנייה כאשר רן עבר $\frac{7}{10}$ מההקפה הראשונה.
 א. מצא את מהירותם של גדי ורן אם ידוע שרן לא עקף את גדי לכל אורך הריצה.
 ב. מהו המרחק שעבר גדי עד שנאלץ לעצור?
 ג. בהנחה שרן לא עצר לאורך כל הריצה וגדי עצר פעם אחת בלבד בהקפה הראשונה (כפי שצוין), תוך כמה זמן מרגע יציאתם כל אחד מהם סיים את הריצה (בדקות)?

2. נתונות שתי סדרות a_n ו- b_n שאיבריהן שונים מ-0.

הסדרה a_n היא סדרה הנדסית.

מגדירים סדרה חדשה c_n המקיימת: $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

נתון כי הסדרה c_n הנדסית.

א. הוכח כי הסדרה b_n הנדסית.

נסמן: q_A - מנת הסדרה a_n .

q_B - מנת הסדרה b_n .

נתון: מנת הסדרה c_n היא 4.

ב. הבע באמצעות q_A את q_B .

נתון כי מתקיים: $a_n \cdot b_{2n} = a_{2n} \cdot b_n$ לכל n טבעי.

ג. חשב את q_A ו- q_B .

נתון: $a_1 = 2b_1$.

ד. הוכח: $\frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2}{b_2^2} + \frac{a_3^2}{b_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n^2} = 4n$

מאגר השאלות במתמטיקה מתכונת מספר 6 - כתב: לי אשר

3. במועדון טניס יש שתי קבוצות : קבוצת מתחילים וקבוצת מתקדמים.

מדי שנה מתקיימת תחרות במועדון הטניס בין כל המתאמנים במועדון

ובסופה מתאמן אחד זוכה.

ההסתברות שמתאמן מקבוצת המתחילים יזכה בתחרות קטנה

פי 3 מההסתברות שמתאמן מקבוצת המתקדמים יזכה בתחרות.

בנוסף, ההסתברות שמתאמן במועדון הוא בקבוצת המתחילים היא $\frac{6}{11}$, וההסתברות

שמתאמן במועדון גם בקבוצת המתחילים וגם זכה בתחרות היא $\frac{1}{11}$.

א. מצא את ההסתברות שאחד מהמתאמנים במועדון זכה בתחרות.

ב. בוחרים באקראי ארבעה מתאמנים מהמועדון.

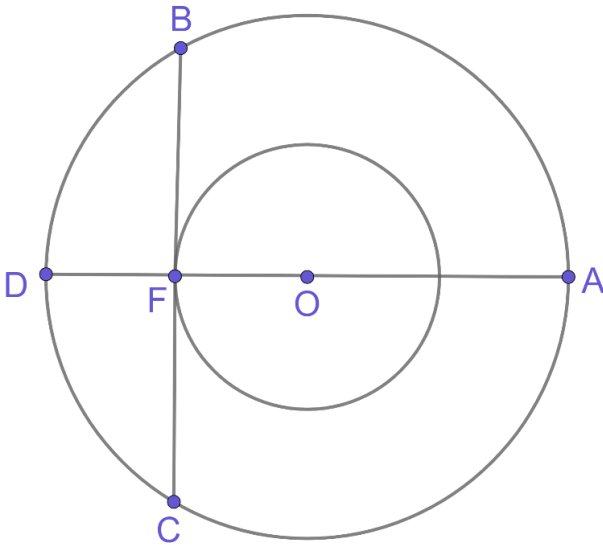
(1). מה ההסתברות שאף אחד מהם לא זכה בתחרות?

(2). מה ההסתברות שהמתאמן השני שנבחר זכה בתחרות?

(3). מה ההסתברות שהמתאמן השני שנבחר גם מקבוצת המתחילים

וגם זכה בתחרות?

מאגר השאלות במתמטיקה מתכונת מספר 6 - כתב: לי אשר
פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. לפיך שני מעגלים בעלי מרכז משותף O . הנקודות B ו- C נמצאות על המעגל הגדול כך שהקטע BC משיק למעגל הקטן בנקודה F .

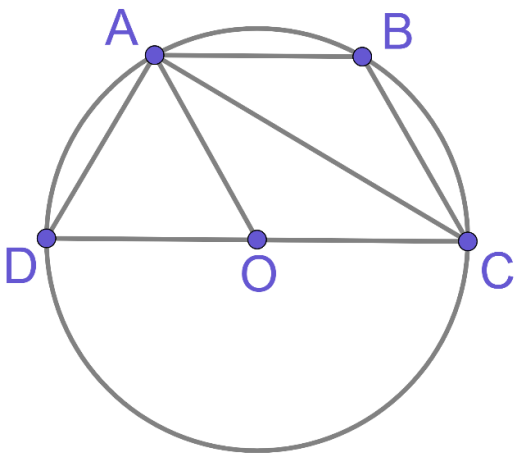
א. הוכח: $BC^2 = 4 AF \cdot DF$.

ב. נתון כי הנקודה O היא נקודת מפגש תיכונים במשולש ABC .

חשב את זווית $\sphericalangle BOC$.

ג. מהו סוג המרובע $BOCD$? נמק.

ד. נתון: $50\sqrt{3}$ סמ"ר $= S_{BOCD}$. חשב את קוטר המעגל הגדול.



5. $ABCD$ טרפז החסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R . DC קוטר המעגל.

נסמן: $\sphericalangle ACD = \alpha$.

א. (1). הוכח: $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

(2). מצא את תחום הערכים של α .

ב. נתון: $AB = AD$.

מצא את α .

ג. נתון כי שטח הטרפז $ABCD$ שווה ל- $27\sqrt{3}$ סמ"ר.

חשב את R .

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 4ax$, a פרמטר טבעי.

א. (1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = 5$?

ג. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x}{x^3 + 4ax - 5}$.

(1) האם לפונקציה יש אסימטות אנכיות? נמק.

(2) נתון: $f(1) = 5$.

מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$ בתחום $x \geq 0$.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $x \geq 0$.

ד. הוכח עבור $0 < t < 1$: $\int_0^t f(x) dx > \int_0^t g(x) dx$

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^2 + \cos 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. סמן את הטענה הנכונה:

(i). $f(x) > 0$ לכל x בתחום.

(ii). $f(x) > 0$ רק בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

(iii). לא ניתן לקבוע על סמך הנתונים מתי מתקיים $f(x) > 0$.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. הוכח כי נגזרת הפונקציה עולה לכל x בתחום.

ד. האם הנקודה $(0,1)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה? נמק.

ה. בגרף שמשמאל מתוארות הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ בתחום

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

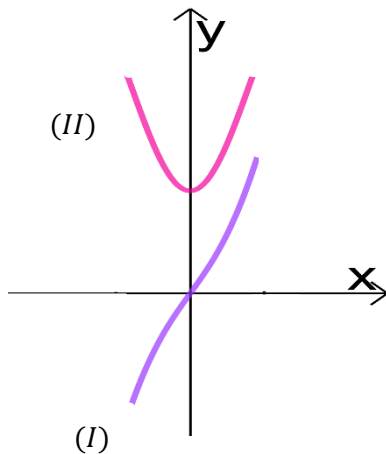
(1). קבע איזה שרטוט מתאר את $f'(x)$ ואיזה

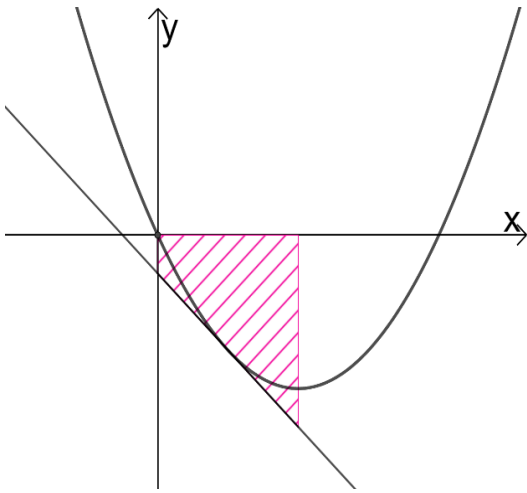
את $f''(x)$.

(2). נתונה הפונקציה: $g(x) = f'(x) - k$.

מצא מהו ערכו של k עבורו מתקיים:

$$g(0) = f''(0)$$





8. x_0 – שיעור ה- x של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$.

א. האם $f''(x_0) \neq 0$? אם כן, נמק. אם לא, תן דוגמה.

נתון: בנקודה x_0 לפונקציה $f(x)$ נקודת מינימום פנימית.

בנוסף, $f(x_0) < 0$.

מגדירים את הפונקציה: $k(x) = \frac{f'(x)}{2 \cdot f(x)}$.

ב. הוכח כי הפונקציה $k(x)$ יורדת בנקודה x_0 .

נתון: $f(x) = x^2 - 4x$.

ג. (1). מצא מאיזו נקודה בתחום השלילי של הפונקציה $f(x)$

יש להעביר משיק, כך ששטח הטרפז הנוצר בין המשיק,

ציר ה- x , ציר ה- y והישר $x = 2$ יהיה מינימלי (ראה שרטוט).

(2). חשב את ערך הפונקציה $k(x)$ בנקודה שמצאת.

תשובות:

1. א. גדי- 12 מטרים לשנייה.

רן- 8 מטרים לשנייה.

ב. 1200 מטרים / 1.2 ק"מ .

ג. גדי- 1220 שניות - $20\frac{1}{3}$ דקות.

רן- 1800 שניות- 30 דקות.

2. א. הוכחה.

ב. $q_B = \frac{4}{q_A}$.

ג. $q_A = q_B = 2$.

ד. הוכחה.

3. א. $\frac{7}{22}$.

ב. (1) . 0.216 .

(2) . $\frac{105}{484}$.

(3) . $\frac{15}{242}$.

4. א. הוכחה.

ב. $\sphericalangle BOC = 120^\circ$.

ג. מעוין.

ד. 20 ס"מ.

5. א. הוכחה.

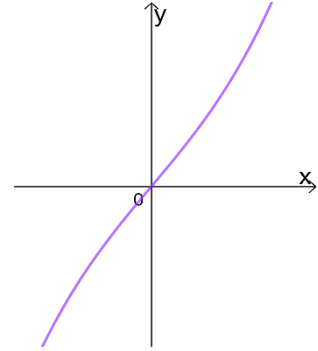
ב. $\alpha = 30^\circ$.

ג. $R = 6$ ס"מ .

6. א. (1) $(0,0)$.

(2) עולה לכל x .

(3)



ב. פתרון אחד.

ג. (1) כן.

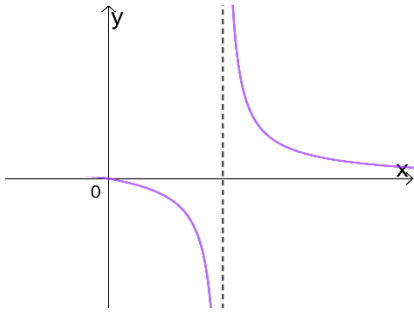
(2) $x = 1, y = 0$.

(3) ירידה: $0 < x < 1$.

או $x > 1$

עליה: אין.

(4)



ד. הוכחה.

7. א. טענה (i).

ב. הוכחה.

ג. הוכחה.

ד. כן.

ה. (1) $f'(x) - I$

(II) $f''(x)$

(2) $k = -4$.

8. א. כן. בנקודת מינימום $f''(x_0) > 0$ ובנקודת מקסימום $f''(x_0) < 0$.

ב. הוכחה.

ג. (1) $(1, -3)$.

(2) $k(1) = \frac{1}{3}$.