

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגוריתמיות.

פרק ראשון-ענה על שתי שאלות : $33\frac{1}{3} \times 2 = 66\frac{2}{3}$

פרק שני-ענה על שאלה אחת : $33\frac{1}{3} \times 1 = 33\frac{1}{3}$

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזר

המחשבון.

הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

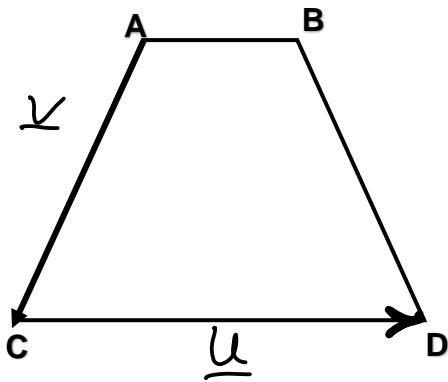
פרק ראשון - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים.

ענה על שתיים מהשאלות 1-3

1. נתון מעגל שעובר דרך ראשית הצירים ורדיוסו R (R הוא קבוע). הנקודות A ו- B הן שתי נקודות החיתוך האחרות של המעגל הנתון עם הצירים. נסמן את נקודת ראשית הצירים ב- O .
- (א) (1) הסבר מדוע נקודת אמצע הקטע AB היא נקודת מרכז המעגל.
 (2) הבע באמצעות R את משוואת המקום הגיאומטרי של כל נקודות מפגשי התיכונים במשולש AOB .
- נתונה הפרבולה $y^2 = R \cdot x$ החותכת בנקודות K ו- L את המקום הגיאומטרי שאת משוואתו מצאת בתת-סעיף א (2) (K נמצאת ברביע הראשון). מעבירים משיק למקום הגיאומטרי בנקודה K . נתון כי מרחקו של המשיק ממוקד הפרבולה הוא $\frac{39}{R-1}$.
- (ב) (1) הבע באמצעות R את שיעורי הנקודות K ו- L .
 (2) מצא את משוואת מדריך הפרבולה.

עורך: עובד לב ארי

2. נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ ($CD \parallel AB$). (ראה ציור).
נתון כי $\angle DAB = 120^\circ$.



נסמן: $\vec{DC} = \underline{u}$ $\vec{AD} = \underline{v}$ $\vec{AB} = t\underline{u}$

(א) הבע את t באמצעות $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

(2) הבע את הווקטור \vec{BC} באמצעות \underline{u} , \underline{v} , ו- $|\underline{u}|$ ו- $|\underline{v}|$.

נתון: $\underline{u} = (8, 6, -10)$, $\underline{v} = (-1, y, 0)$

(ב) מצא את שיעורי ה- y של הווקטור \underline{v} . (מצא את שתי האפשרויות).

(2) מבין שני הערכים של y שמצאת בתת-סעיף ב (1), מצא עבור איזה ערך של y הבסיס DC הוא קוטר במעגל שהטרפז חסום בו.

הערה: אפשר לפתור את סעיף ב בלי להסתמך על הפתרון של סעיף א.

3. נתונות הנקודות $M(x_1, y_1)$ ו- $N(x_2, y_2)$ במישור גאוס המייצגות בהתאמה את המספרים המרוכבים z_1 ו- z_2 .

$$z_1 - z_2 = -5 + 3\sqrt{3}i$$

נתונה המשוואה:

(א) מצא את המרחק בין הנקודות M ו- N .

$$\text{נתון: } |z_1| = 2\sqrt{3}, |z_2| = 4, 120^\circ < \arg(z_1) < \arg(z_2).$$

(ב) (1) חשב את $\angle MON$ (O – ראשית הצירים).

$$(2) \text{ נתון: } z_1 \cdot z_2 = 8\sqrt{3}i. \text{ מצא את } z_1 \text{ ואת } z_2.$$

הנקודות \bar{M} ו- \bar{N} במישור גאוס מייצגות בהתאמה את המספרים המרוכבים \bar{z}_1 ו- \bar{z}_2 ויחד עם הנקודות M ו- N נוצר מרובע.

(ג) קבע מהו סוג המרובע וחשב את שטחו.

פרק שני - גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגוריתמיות.

ענה על אחת מהשאלות 4-5

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln(e^x + ae^{-2x})$ המוגדרת לכל x . a הוא פרמטר. ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מעל הישר $y = -2x$.

(א) הראה כי $f(x) = -2x + \ln(e^{3x} + a)$.

(2) קבע מהו תחום הערכים של הפרמטר a . נמק את קביעתך.

(ב) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטות שמאונכות לציר ה- y ? נמק.

(2) x_1 הוא ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$. הבע באמצעות a את x_1

והסבר מדוע $f(x_1) > 0$.

(ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \ln(e^{4x} + ae^x) + a$.

(ד) (1) הבע באמצעות a את התחום בו $g(x) > f(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $\frac{1}{g(x)-f(x)}$, ציר ה- y

והישר $x = \frac{7a}{3}$. תוכל להשאיר \ln בתשובתך.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(e^x+k)^2}{e^{-2x}-10e^{-x}+b}$, b ו- k הם פרמטרים.

הישר $x = \ln(b^{-1})$ הוא האסימפטוטה האנכית היחידה של הפונקציה $f(x)$.

(א) מצא את b ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את k .

(3) הראה כי $f(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{e^{-x}-9}$ בעבור כל $x \neq 0$.

(ב) (1) האם הפונקציה $f(x)$ חותכת את הצירים? נמק את תשובתך.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) נתונה נקודה על גרף הפונקציה $f(x)$ ששיעור ה- x שלה מקיים את המשוואה

$$f'(x) = 0.$$

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

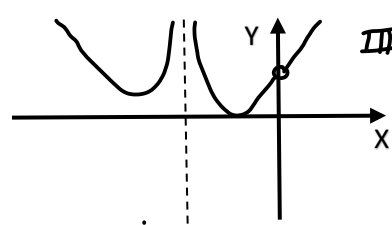
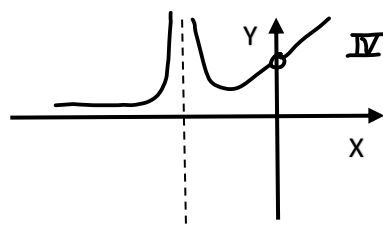
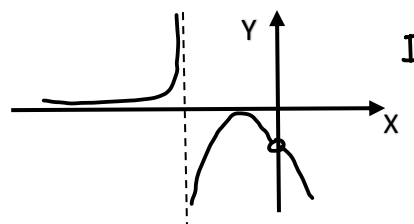
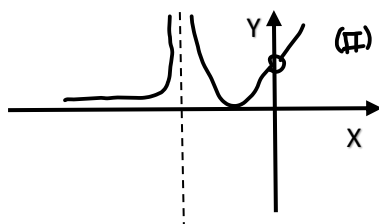
(ג) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

בסוף השאלה מוצגים ארבעה גרפים (I) – (IV) שאחד מהם מתאר את גרף פונקציית

הנגזרת $f'(x)$.

(ד) ללא חקירה וחישובים נוספים, קבע איזה מן הגרפים מתאר את גרף פונקציית

הנגזרת $f'(x)$. נמק את קביעתך.



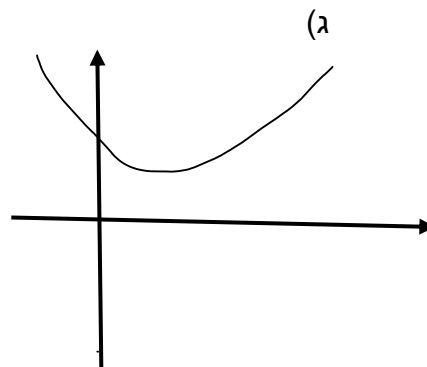
תשובות למבחן:

1) א) $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}R^2$ (2) ב) $L\left(\frac{R}{3}, \frac{-R}{\sqrt{3}}\right), k\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $x = -2\frac{1}{4}$

2) א) $t = \frac{|u|-|v|}{|u|}$ (1) א) $\overline{BC} = \left(\frac{|v|}{|u|}\right)\underline{u} + \underline{v}$: ב) $y = -7, y = \frac{1}{7}$ (1) ב) $y = -7$ (2)

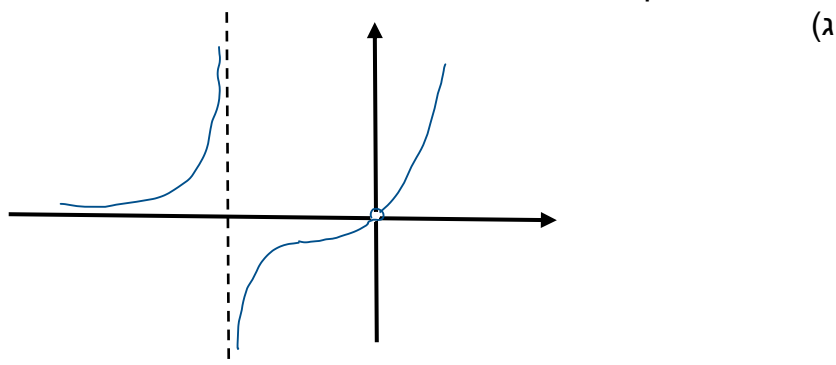
3) א) $d_{MN} = 2\sqrt{13}$ (1) ב) $\angle MON = 150^\circ$ (2) $z_1 = 2\sqrt{3}cis(150^\circ) = -3 + \sqrt{3}i$ (2) $z_2 = 4cis(300^\circ) = 2 - 2\sqrt{3}i$
ג) $S = 15\sqrt{3}$ יח"ר

4) א) $a \geq 1$ (2) ב) לא (1) ב) $x = \frac{\ln(2a)}{3}$ (2)



ד) $s = \ln(2) = 0.693$ (2) ט) $x > -\frac{a}{3}$ (1)

5) א) $b = 9$ (1) ת.ה. $- \ln(9) < x < 0, x > 0$ (2) $k = -1$ (2) $x \neq 0, x \neq -\ln(9)$
ב) לא (1) $x = -\ln(9)$ (2) $y = 0$ $(x \rightarrow -\infty)$ (3) $\left(-\ln(3), -\frac{1}{27}\right)$
ג) ת.עלייה: $x > 0, -\ln(3) < x < 0, -\ln(9) < x < -\ln(3), x < -\ln(9)$
ד) ירידה: אין.



ד. גרף (ו).