

בחינת מתכונת שאלון 582 – קיץ 2022

5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון - גאומטריה אנליטית, וקטורים ומספרים מרוכבים

פרק שני - פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך (לפחות אחת מכל פרק) - $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר

המחשבון.

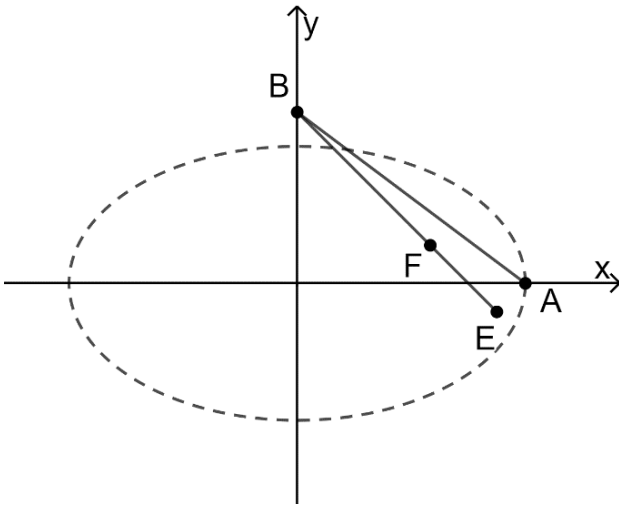
הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

בהצלחה!

פרק ראשון- גאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים



1. הנקודה A מונחת על ציר ה-x (בחלקו החיובי) והנקודה B

מונחת על ציר ה-y (בחלקו החיובי) כמתואר בציור שלפניך.

הנקודה E נמצאת על המשך הקטע BF.

נתון: $A(4,0)$, $y_F = \frac{2}{3}$, $y_E = -\frac{1}{2}$, $BE = 3EF$.

א. מצא את המקום הגאומטרי של כל הנקודות C שעבורן

$$\angle BCA = \angle BAC$$

הנקודות D ו-M נמצאות על המקום הגאומטרי שמצאת

בסעיף א'. הנקודה D נמצאת ברביע הרביעי והנקודה M

נמצאת ברביע השני ועל המשך הקטע DB.

ב. הוכח: $MA \perp DA$.

נתון: הנקודות A, E ו-D נמצאות על ישר אחד, $AE = DE$.

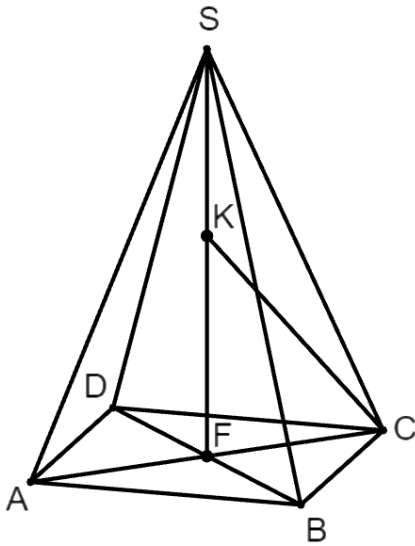
ג. מצא את משוואת הישר AM.

הישר AM חותך אליפסה קנונית בנקודה ששיעור ה-x שלה

$$\text{הוא } \frac{32}{17}.$$

הנקודה A היא נקודת חיתוך של האליפסה עם ציר ה-x.

ד. מצא את משוואת האליפסה.



2. בסיסה של הפירמידה המרובעת SABCD הוא המעוין ABCD.

F היא נקודת מפגש אלכסוני הבסיס ו-SF הוא גובה הפירמידה.

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{FS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{FK} = t \cdot \overrightarrow{FS}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- t את \overrightarrow{CK} .

ב. הוכח: המכפלה $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CK}$ אינה תלויה ב- t .

נתון: $|\underline{w}| = |\overrightarrow{AC}|$.

ג. מצא מהו ערכו של t שעבורו $\sphericalangle KCS = \sphericalangle KCA$.

בסיס הפירמידה מונח על המישור $z = 0$. הנקודה D נמצאת

בראשית הצירים והנקודות A ו-C מונחות על ציר ה-x וציר

ה-y (בחלקם החיובי) בהתאמה.

נתון: $F(2,2,0)$, $|\overrightarrow{CK}| = \sqrt{17}$, $|\underline{w}| = 5$.

ד. (1). מצא את שיעורי קודקודי הפירמידה.

(2). האם CK חוצה את זווית ACS? נמק.

ה. מצא את משוואת המישור המכיל את הנקודה B

ומקביל למישור KFC.

3. z_1 ו- z_2 הם שני מספרים מרוכבים.

המספר z_1 נמצא ברביע הראשון במישור גאוס, והמספר z_2 נמצא ברביע הרביעי במישור גאוס.

נתון: $\arg(z_1) = \theta$, $|z_1| = |z_2| = R$, $\arg(z_1) + \arg(z_2) = 360^\circ$.

א. הבע באמצעות R ו- θ את:

$$(1) \quad z_1 + z_2 \quad (2) \quad z_1 - z_2$$

הם שני פתרונות של המשוואה: $p^4 - m = 0$ (m פרמטר).

ב. (1). חשב את θ .

(2). הבע את הפרמטר m באמצעות R.

הנקודות A ו-B מייצגות את z_1 ו- z_2 במישור גאוס בהתאמה. נתון: $AB = 4\sqrt{2}$.

ג. (1) חשב את m .

(2) חשב את שטח המשולש ΔABO (O ראשית הצירים).

פרק שני- פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{2+x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

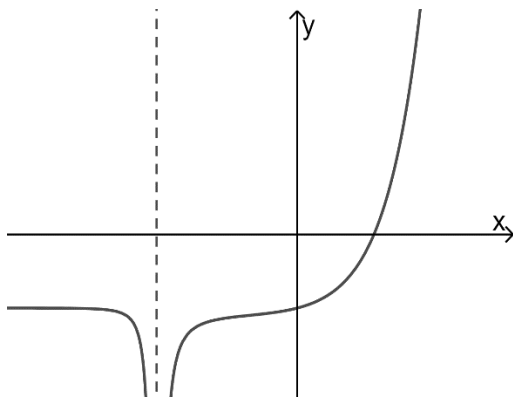
(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

(3) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וסוגה.

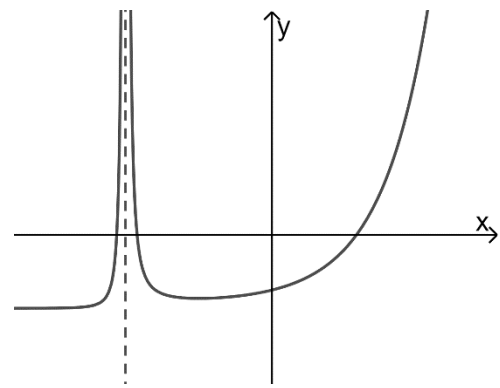
(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

נתונה נגזרת הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.

ב. (1) איזה גרף מבין הגרפים שלפניך יכול לתאר את הפונקציה $g(x)$? נמק.



(II)



(I)

(2) נתון: $k > 0$. הוכח כי מתקיים: $g(x) = f^2(x) - k$.

ג. נתון כי המרחק בין נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y לבין

ראשית הצירים הוא יחידה אחת.

(1) מצא את k .

(2) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \ln(x^2 + ax + 1)$, a פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ממשי.

א. מצא את תחום הערכים של הפרמטר a .

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

נתון כי בנקודה שבה $x = 1$ יש לפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון.

ג. מצא את a .

ד. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה U והקעירות כלפי מטה \cap של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{4x \cdot f(x)}{x^2 + 1}$.

ו. (1) האם הפונקציה $g(x)$ זוגית/ אי זוגית / לא זוגית ולא אי זוגית?

(2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ז. (1) הוכח כי לכל $m > 0$ מתקיים: $\int_{-m}^m g(x) dx = 0$

(2) חשב את ערך האינטגרל: $\int_{-1}^3 g(x) dx$

פתרונות סופיים:

1. א. $x^2 + (y-3)^2 = 25$, מעגל.

ב. הוכחה.

ג. $y = -x + 4$.

ד. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5.76} = 1$.

2. א. $\vec{CK} = t\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

ב. הוכחה.

ג. $t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

ד. (1) $D(0,0,0), A(4,0,0), C(0,4,0), B(4,4,0), S(2,2,5)$.

(2) לא.

ה. $x + y - 8 = 0$.

3. א. (1) $2R \cos \theta$.

(2) $2Ri \sin \theta$.

ב. (1) $\theta = 45^\circ$.

(2) $m = 4R^4$.

ג. (1) $m = 1024$.

(2) 8 יחיש.

4. א. (1) $x \neq -2$.

(2) $y = 0, x = -2$.

(3) $(-1, \frac{1}{e})$ מינימום.

(4) עליה: $x > -1$. ירידה: $-2 < x < -1$ או $x < -2$.

ב. (1) גרף (I).

(2) הוכחה.

ג. (1) $k = \frac{5}{4}$.

(2) $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

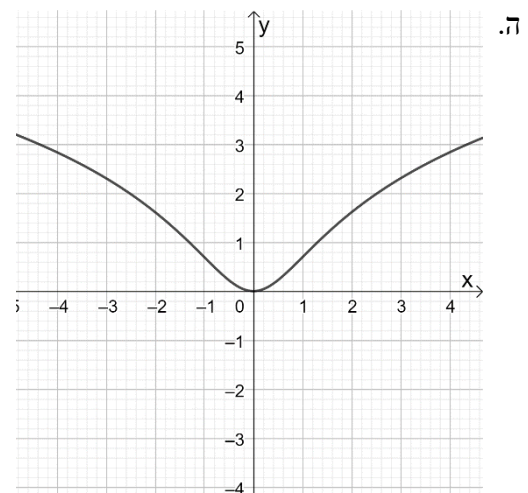
5. א. $-2 < a < 2$.

ב. (1) $(0,0), (-a, 0)$.

(2) $(-\frac{a}{2}, 2 \ln(1 - \frac{a^2}{4}))$.

ג. $a = 0$.

ד. $-1 < x < 1 : \cup, x > 1$ או $x < -1$.



ו. (1). אי זוגית.

(2). (0,0) .

(3). חיובית: $x > 0$, שלילית: $x < 0$.

ז. (1). הוכחה.

$$(2). 2 \ln^2(10) - 2 \ln^2(2) = 9.64 .$$