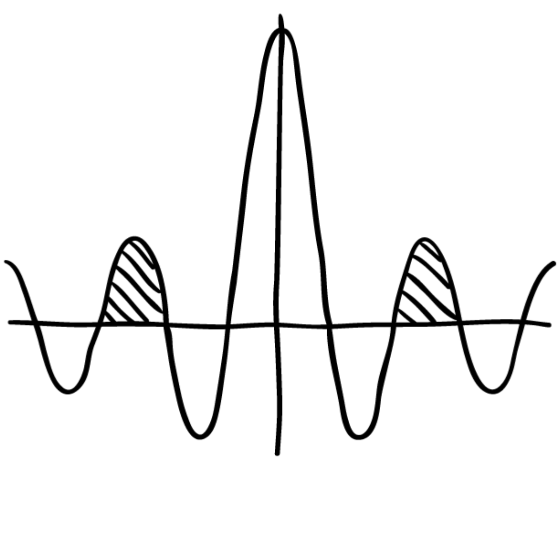
הכנה לבגרות במתמטיקה - שאלון 581

חוברת מס' 6

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי



מחבר: לי אשר

חוברת מס' 6

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

שאלון 581

לפי מיקוד קיץ 2022

כתב וערך: לי אשר

תיקונים והגהות: דנה דבש

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

תרגיל 1

נתונה הפונקציה : $f(x) = 3\cos(2x) + 3$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

א. (1). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2). הוכח : $0 \le f(x) \le 6$.

(3). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(4). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{6 - 6\sin^2 x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

(1). הוכח : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(2). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(3). היעזר בסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(4). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה : $k(x) = a \cdot f(x) + 1$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

המרחק בין נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$ ונקודת

הקיצון הפנימית של הפונקציה $g(x)$ הוא 2 יח'.

מצא את ערכו של הפרמטר a (מצא את כל האפשרויות).

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

<u>תרגיל 2</u>

נתונה הפונקציה: $y = \frac{ax}{(x-1)^2} + b$, $a \neq 0$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ היא $y = x$.

א. מצא את a ו- b .

ב. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וסוגה.

(3). מצא את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה ותחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$

והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה.

(4). מצא את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)= f'(x)$.

(1). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2). היעזר בגרף הפונקציה $g(x)$ בלבד ומצא עבור איזה ערך של t ערך הביטוי

$\int_t^0 g(x)dx$ מקסימלי $(t < 0)$. נמק.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

תרגיל 3

נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}}{2x+4a}$, a פרמטר טבעי.

א. הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הוכח כי $f(x) \geq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

ג. היעזר במידת הצורך בפרמטר a בתשובותיך וענה על הסעיפים הבאים :

(1). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה (אם יש).

נתון : נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $g(x)= 4\cdot f(x)$ נמצאת על הישר $y = 1$.

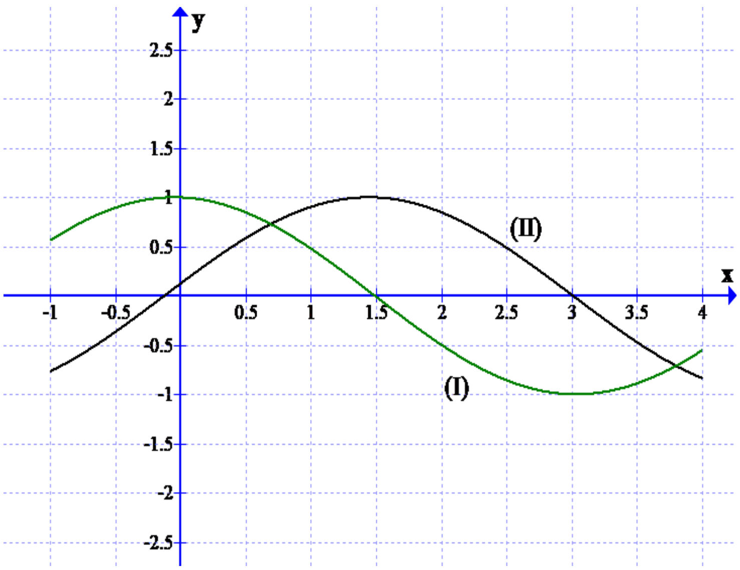
ד.(1). מצא את a .

(2). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(3). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה : $y(x) = f'(x-a)$.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

תרגיל 4



בשרטוט שלפניך מופיעים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בתחום $-1 \le x \le 4$.

א. קבע איזה מהגרפים מתאר את הנגזרת $f'(x)$. נמק קביעתך.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא באיזה תחום מתקיים : $\frac{f''(x)}{f'(x)} \ge 0$.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 3$.

ה. נתונה הפונקציה : $g(x)=\sqrt{f'(x)}$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2). מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $g(x)$ וסוגה.

ו. חשב את האינטגרל : $\int_0^1 \frac{f''(x)}{2\cdot g(x)}dx$

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

<u>תרגיל 5</u>

נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x + 16$.

א.(1). נתון: $f(x) = (2x+2)^2 \cdot (x-a)$.

מצא את a .

(2). מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

(3). מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ב. היעזר בסעיף א' וענה על הסעיפים הבאים:

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x) = 2x + 2 - g(x)$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). הוכח כי לפונקציה נקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x .

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

<u>תרגיל 6</u>

נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$.

א. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש).

(3). מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(4). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש).

(5). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה : $g(x) = f(x+3)$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

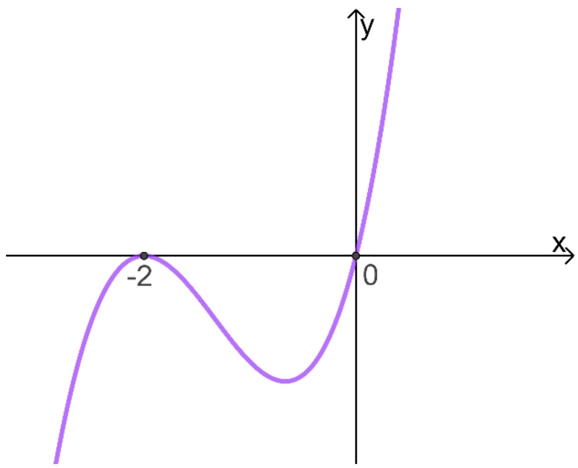
(2). הוכח כי הפונקציה $g(x)$ אי זוגית .

(3). הוכח כי המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=3$ מקביל למשיק לגרף הפונקציה זו בנקודה שבה $x=-3$.

(4). שרטט את גרף הפונקציה $g'(x)$.

ג. נתון : $\int_m^9 f(x)\,dx=\int_3^t g(x)\,dx$, t ו- m פרמטרים. האם ייתכן כי $m = t$? נמק.

תרגיל 7



לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

א. היעזר בגרף וקבע איזו משוואה מתאימה לתאר את הפונקציה $f(x)$. נמק קביעתך.

(i). $f(x) = x(x+2)^2$

(ii). $f(x) = x^2(x+2)$

(iii). $f(x) = x^2(x+2)^2$

ב. (1). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(2). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

נתונה הפונקציה : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ג. (1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2). מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וסוגה.

(3). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מעבירים ישר המקביל לציר ה- y , החותך את ציר ה- x בנקודה A ואת גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B **ברביע השלישי.** דרך הנקודה B מעבירים ישר נוסף המקביל לציר ה- x . ישר זה חותך את ציר ה- y בנקודה C .

נתון : $x_B > -2$.

(1). מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B כך שהיקף המרובע $ABCO$ (O ראשית הצירים) יהיה מקסימלי.

(2). הוכח כי כאשר היקף המרובע $ABCO$ מקסימלי מתקיים : $g(x_B) = f(x_B)$.

<u>תרגיל 8</u>

נתונה הפונקציה : $f(x) = 2x^2 + \cos(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$.

א. הראה כי $f(x) > 0$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. הוכח כי הפונקציה זוגית.

ג. (1). האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

(2). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f'(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

(אם יש).

(3). האם הנקודה $(0,1)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$? נמק.

ד. נתונה הפונקציה : $g(x) = -f(-x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$.

(1). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$.

(2). הוכח כי מתקיים $f(x) \cdot g(x) \le -1$ לכל x בתחום הנ״ל.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

תרגיל 9

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - \sqrt{2ax^4+2}$, $a > 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

המרחק בין נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x לבין ראשית הצירים הוא 1 יח'.

ב. (1). מצא את a .

(2). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה <u>נקודת קיצון אחת בלבד</u>.

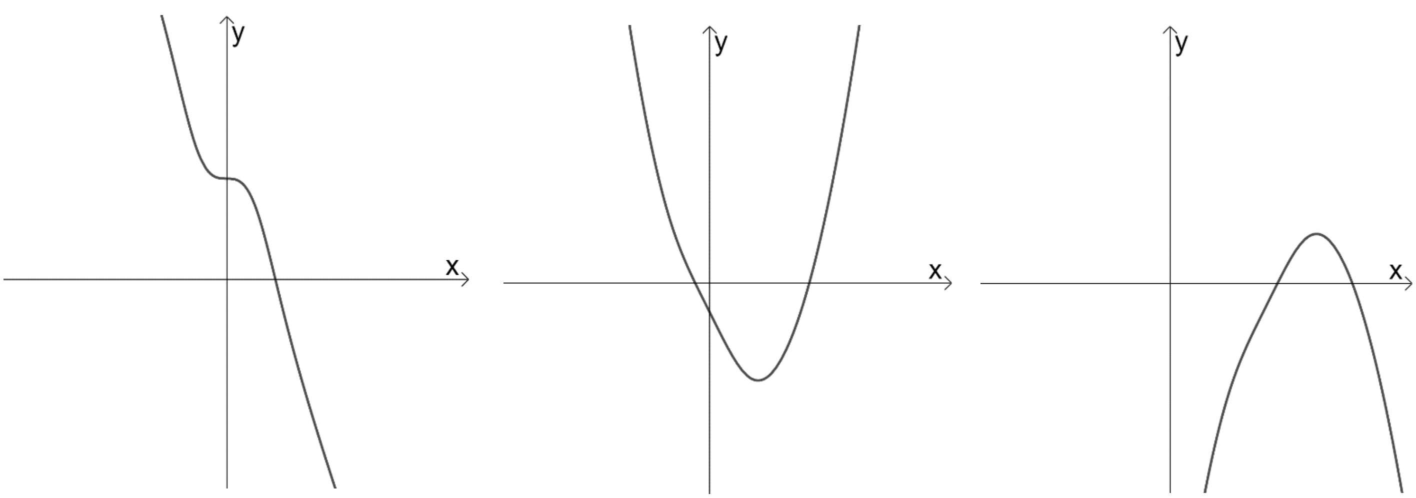
ג. (1). הוכח כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים היא נקודת הקיצון של הפונקציה ומצא את סוגה.

(2). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(3). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. לפניך שלוש פונקציות ושלושה גרפים. התאם בין כל פונקציה לגרף המתאים.

$g(x)=|f(x)|-2$ $h(x)= f'(x)$ $t(x) = f(x-2)+1$



(I) (II) (III)

ה. מבין האינטגרלים שלפניך, קבע מהו האינטגרל שערכו הגדול ביותר. נמק קביעתך.

(1). $\int_{-3}^{1} h(x)\,dx$ (2). $\int_{0}^{2} t(x)\,dx$ (3). $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

<u>תרגיל 10</u>

נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+1)(x^2-1)$.

א. (1). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

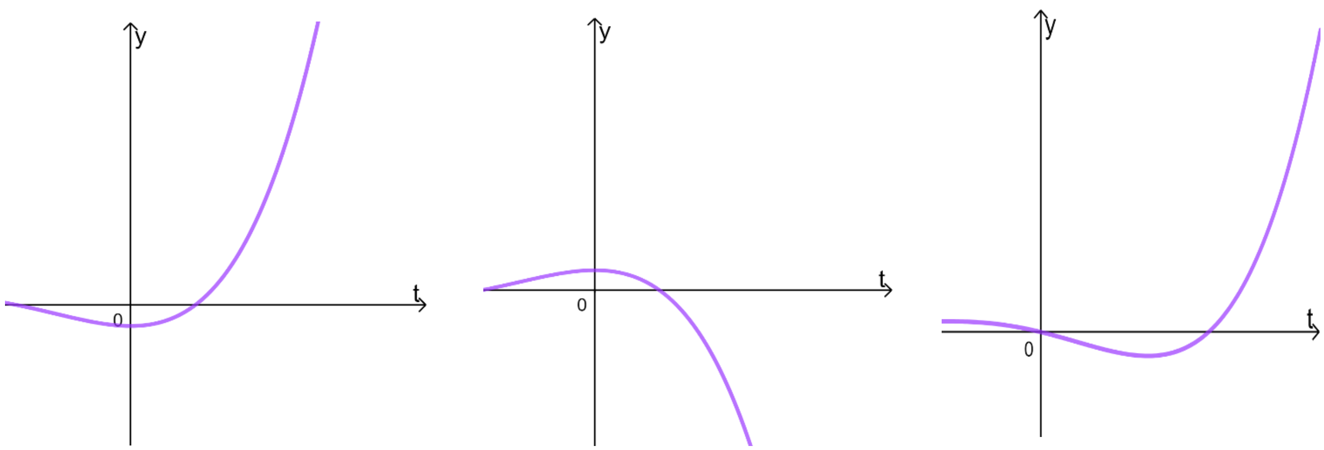
(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $y(t)=\int_0^{t+1} f(x)dx$ בתחום $t \geq -1$.

(1). לפניך שלושה גרפים. קבע איזה גרף מתאים לתאר את $y(t)$ (בתחום $t \geq -1$):



(III) (II) (I)

(2). עבור איזה ערך של t , ערך הביטוי $\int_0^{t+1} f(x)dx$ מינימלי? נמק.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

<u>תרגיל 11</u>

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x וגזירה לכל x .

לפניך טבלה המתארת את ערכי נגזרת הפונקציה $f(x)$ בעבור ערכי x שונים :

x	-4	-1	2	6
$f'(x)$	m	-1.2	0	n

m , n פרמטרים **חיוביים**.

א. (1). סמן את הטענה הנכונה מבין הטענות שלפניך ונמק בחירתך :

(i). לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות קיצון בלבד.

(ii). לפונקציה $f(x)$ לפחות שתי נקודות קיצון.

(iii). לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד.

(2). הוכח כי לפונקציה $f(x)$ נקודת מקסימום בתחום $-4 < x < -1$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות קיצון בלבד, ונקודת פיתול אחת בלבד בתחום $-4 < x < -1$.

ב. הוכח: $f'(-5) \cdot f'(5) > 0$.

ג. מגדירים פונקציה חדשה : $g(x) = 4 \cdot f'(x) \cdot f''(x)$

(1). הוכח כי הפונקציה $g(x)$ חיובית בתחום $x > 2$.

(2). הבע באמצעות n את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר ה-x והישר $x = 6$.

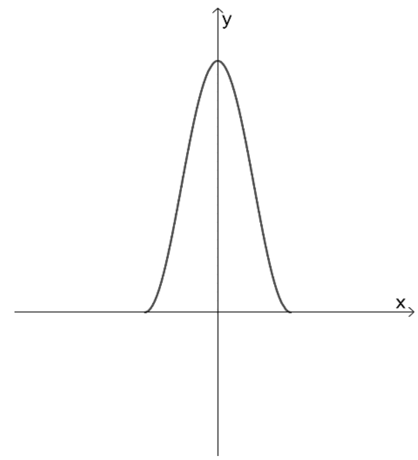
<u>פתרונות סופיים:</u>

1. א. (1). $(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0)$, $(-\frac{\pi}{2}\ ,0)$, $(0,6)$.

(2). הוכחה.

(3). $(\frac{\pi}{2},0)$ מינימום בקצה, $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0)$ מינימום בקצה, $(0,6)$ מקסימום.

(4).

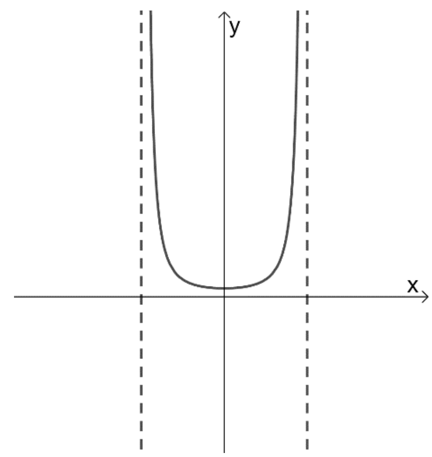


ב. (1). הוכחה.

(2). $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq -\frac{\pi}{2}$.

(3). $(0\ ,\frac{1}{6})$ מינימום.

(4).



ג. $a = \frac{7}{36}$ או $a = -\frac{17}{36}$.

2. א. $a = 1\ ,\ b = 0$.

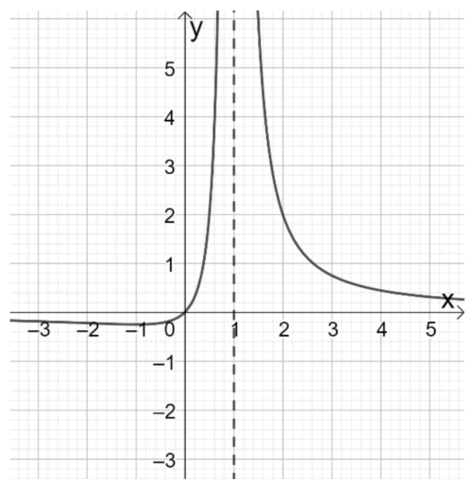
ב. (1). $x \neq 1$.

(2). $(-1\ ,\ -\frac{1}{4})$ מינימום.

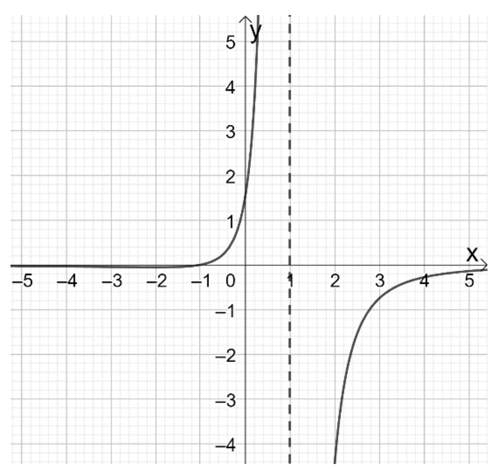
(3). $(-2\ ,\ -\frac{2}{9})$, ∪ : $x > 1$ או $-2 < x < 1$, ∩ : $x < -2$.

(4). $x = 1\ ,\ y = 0$.

ג.



ד. (1).



(2). $t = -1$.

3. א. $x \geq -a$.

ב. הוכחה.

ג. (1). $(-a\ ,0)$, $(0,\frac{1}{4\sqrt{a}})$.

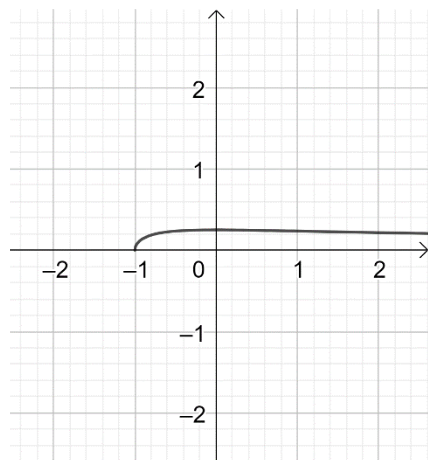
(2). $(-a,0)$ מינימום בקצה , $(0,\frac{1}{4\sqrt{a}})$ מקסימום .

(3). עלייה: $-a < x < 0$, ירידה: $x > 0$.

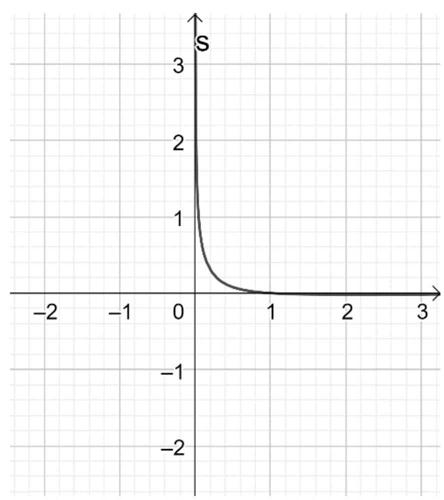
(4). $y = 0$.

ד. (1). $a = 1$.

(2).



(3).



מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

4. א. $f(x)$ - (II) , $f'(x)$ - (I)

ב. $x = 3$, $x = 0$.

ג. $1.5 < x \le 3$ או $-1 \le x \le 1$.

ד. $y = -x+3$.

ה. (1). $-1 \le x \le 1.5$.

(2). $(0,1)$ מקסימום.

ו. $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

5. א. (1). $a = -4$.

(2). חיוביות: $x > -4$, שליליות: $x < -4$.

(3). $(-1,0)$ מינימום , $(3,16)$ מקסימום.

ב. (1). $x \ge -4$.

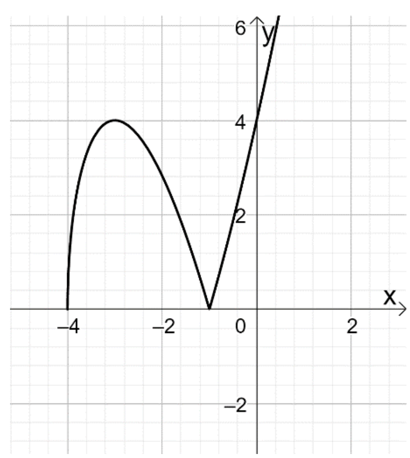
(2). $(-1,0)$ מינימום, $(3,4)$ מקסימום.

(3). עליה: $-4 < x < -3$ או $x > -1$.

ירידה: $-3 < x < -1$.

(4). $(-1,0)$, $(-4,0)$, $(0,4)$.

(5).



מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

ג. (1). $x \ge -4$.

(2). הוכחה.

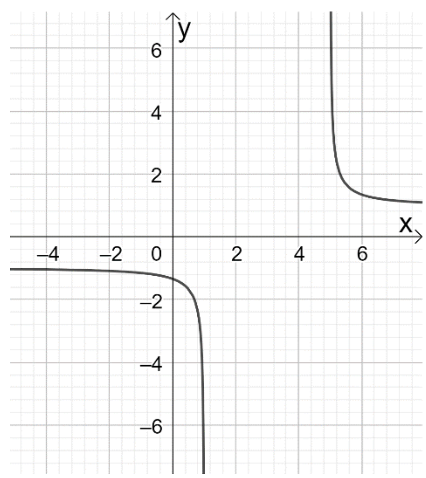
6. א. (1). $x > 5$ או $x < 1$.

(2). $(0 , -\frac{3}{\sqrt{5}})$.

(3). $x = 5$, $x = 1$, $y = 1$, $y = -1$.

(4). עלייה: אין. ירידה: $x > 5$ או $x < 1$.

(5).

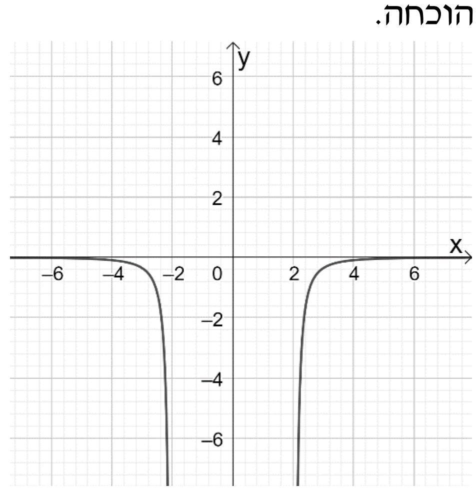


ב. (1). $x > 2$ או $x < -2$.

(2). הוכחה.

(3). הוכחה.

(4).



ג. כן.

7. א. (i). $f(x) = x(x+2)^2$.

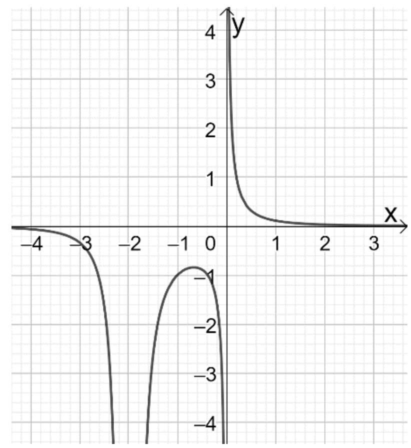
ב. (1). $(-\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{32}{27})$ מינימום, $(-2,0)$ מקסימום.

(2). עלייה: $x > -\frac{2}{3}$ או $x < -2$, ירידה: $-2 < x < -\frac{2}{3}$.

ג. (1). $x \neq 0\ ,\ x \neq -2$.

(2). $(-\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{27}{32})$ מקסימום.

(3).



ד. (1). $(-1,-1)$.

(2). הוכחה.

8. א. הוכחה.

ב. הוכחה.

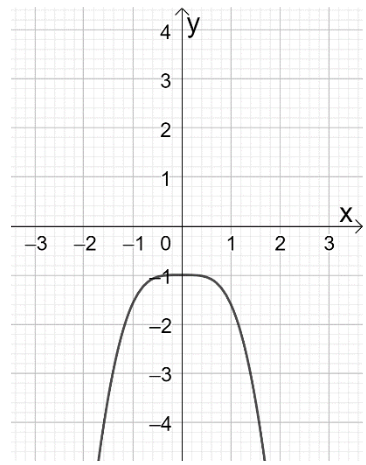
ג. (1). לא.

(2). הפונקציה $f'(x)$ עולה לכל x בתחום.

(3). כן.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

ד. (1).



(2). הוכחה.

9. א. כל x .

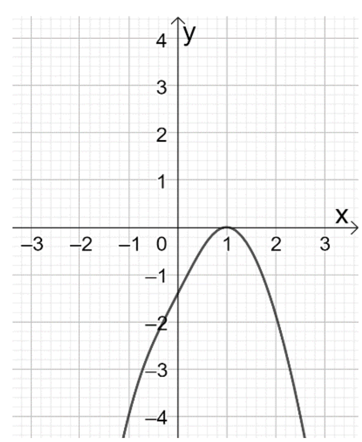
ב. (1). $a = 1$.

(2). $(1,0)$, $(0 , -\sqrt{2})$.

ג. (1). הוכחה, מקסימום.

(2). עלייה: $x < 1$, ירידה: $x > 1$.

(3).



ד. גרף (I) - $t(x)$.

מחבר: לי אשר asherlee99@gmail.com

גרף (II) - $g(x)$.

גרף (III) - $h(x)$.

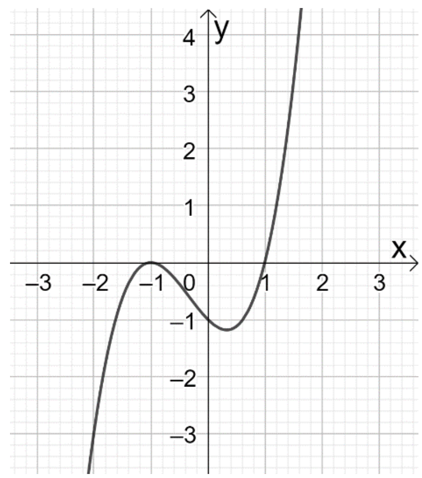
ה. (1).

10. א. (1). $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$.

(2). $(-1,0)$ מקסימום , $\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$ מינימום .

(3). עליה : $x < -1$ או $x > \frac{1}{3}$, ירידה : $-1 < x < \frac{1}{3}$.

(4).



ב. (1). גרף (III) .

(2). $t = 0$.

11. א. (1). טענה (ii).

(2). הוכחה.

ב. הוכחה.

ג.(1). הוכחה.

(2). $2n^2$.