עובד לב ארי

מתכונת 1 שאלון 581 – לפי מיקוד קיץ 2022

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך - $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר המחשבון.

הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

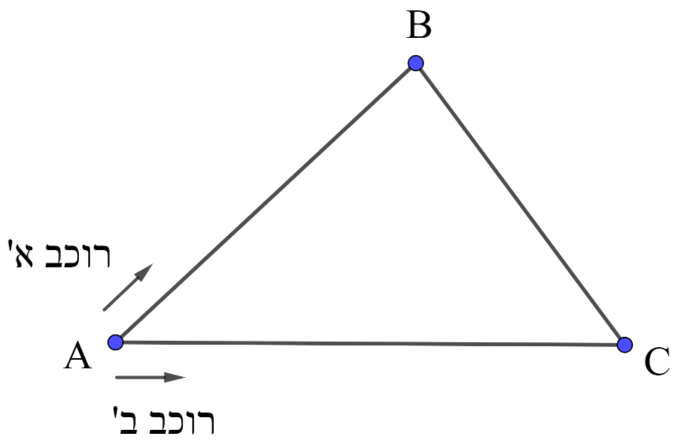
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

asherlee99@gmail.com

פרק ראשון- אלגברה והסתברות



1. רוכב א׳ ורוכב ב׳ יוצאים מהנקודה A לנקודה
C בו זמנית , במהירויות קבועות ובמסלולים שונים.
רוכב א׳ נסע תחילה לעבר הנקודה B במשך
3 שעות, ולאחר מכן המשיך לנקודה C .
רוכב ב׳ רכב במסלול ישיר לעבר הנקודה C .
כאשר רוכב א׳ הגיע לנקודה B , רוכב ב׳
עבר $\frac{1}{2}$ ממסלולו.
ידוע כי רוכב א׳ הגיע לנקודה C שעה לפני
שרוכב ב׳ הגיע לנקודה זו , ואורך המסלול BC
קצר ב- 32 ק״מ מאורך המסלול AC .

א. מצא את מהירויות שני הרוכבים אם ידוע שסכום מהירויותיהם
הוא 24 קמ״ש.

ב. לאחר שרוכב א׳ הגיע לנקודה C , החל לחזור לעבר הנקודה
A במסלול השני (המסלול הישיר לעבר הנקודה C).
באיזה מרחק מהנקודה A נפגשו שני הרוכבים ?

2. בסדרה הנדסית a_n מתקיים: $a_1 = m \quad , \quad a_2 = k \;, \quad a_3 = 4a_2 - 4a_1$.

א. (1). הבע באמצעות m את a_2 ו- a_3 .

(2). חשב את מנת הסדרה a_n .

בסדרה a_n יש $2n$ איברים.

ב. הוכח כי היחס בין סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n ובין סכום

n האיברים האחרונים בסדרה a_n הוא $\frac{2}{3}(1+2^{-n})$.

ג. נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה c_n מקיימת: $c_n = \frac{a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2n}}{S_{2n}-S_n} - \frac{2}{3}$.

(1). הוכח כי הסדרה c_n הנדסית וחשב את מנתה.

(2). חשב את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה c_n .

3. בבית הספר היסודי "ארזים" יש 4 כיתות בשכבת ג'. בכיתות ג'1 ו- ג'3 יש כ-30 תלמידים (בכל כיתה),

בכיתה ג'2 יש m תלמידים ובכיתה ג'4 יש 32 תלמידים.

רכזת שכבת ג' בוחרת באקראי שני תלמידים <u>שונים</u> משכבת ג' בזה אחר זה.

ההסתברות ששני התלמידים לומדים בכיתה ג'2 היא $\frac{9}{170}$.

א. חשב את m .

ב. בכיתה ג'2 כשליש מהבנות מרכיבות משקפיים. ההסתברות לבחור מכיתה ג'2 תלמיד (בן)

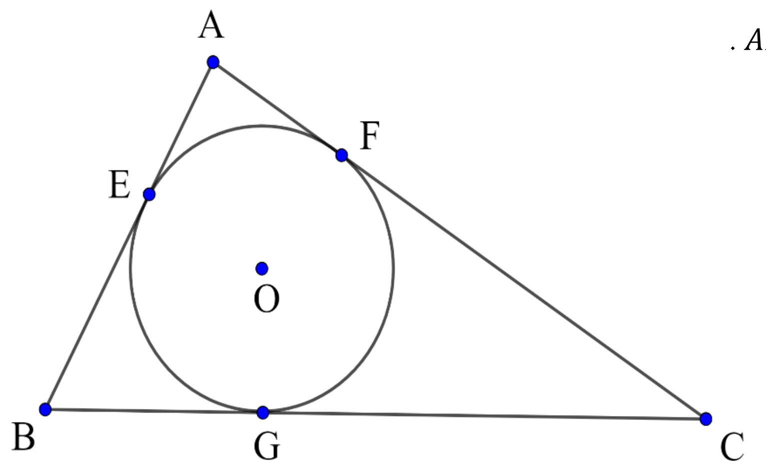
שאינו מרכיב משקפיים היא $\frac{1}{7}$ וההסתברות לבחור תלמידה (בת) שמרכיבה משקפיים היא $\frac{3}{14}$.

(1). כמה בנות וכמה בנים יש בכיתה ג'2 ?

(2). מה ההסתברות לבחור באקראי 3 תלמידים (לא בהכרח שונים) מכיתה ג'2 המרכיבים משקפיים?

asherlee99@gmail.com

פרק שני- גאומטריה וטריגונומטריה במישור



3. לפניך מעגל שמרכזו בנקודה O החסום במשולש ABC .

הנקודות E , F ו- G הן נקודות ההשקה של המעגל

עם הצלעות AB , AC ו- BC בהתאמה.

א. הוכח : $P_{\Delta ABC} = 2 \cdot (AE + BG + CF)$

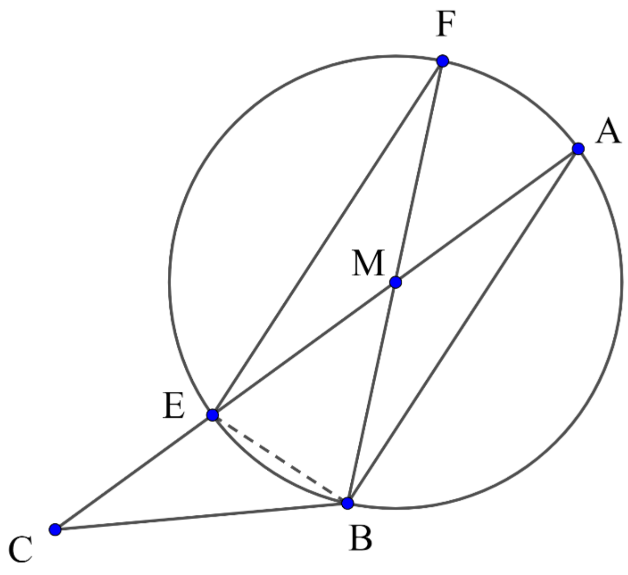
המשך הקטע CO חותך את הקטע BF

בנקודה K .

נתון : $\frac{BK}{KF} = \frac{4}{3}$, $P_{\Delta ABC} = 9 \cdot BG$.

ב. חשב את היחס : $\frac{AF}{FC}$

ג. חשב את יחס השטחים : $\frac{S_{\Delta AKF}}{S_{ABKC}}$



4. הנקודות A , B , E ו- F נמצאות על מעגל שמרכזו

בנקודה M ורדיוסו R .

AE ו- BF קטרים במעגל. הנקודה C נמצאת על

המשך הקוטר AE .

נתון : $AC = 3CE$, $\sphericalangle BAC = \alpha$.

א. הוכח : $BC = R\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}$.

נתון : $S_{\Delta EBM} = \frac{\sqrt{3}R^2}{4}$.

ב. חשב את גודל הזווית $\sphericalangle EFB$.

נתון כי אורכו של רדיוס המעגל החוסם את משולש

ΔEMF הוא 8 יח' .

ג. חשב את אורך הקטע BC .

asherlee99@gmail.com

פרק שלישי- חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = a \cdot \sin(x)$ ו- $g(x) = 2k \cdot \cos(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. היעזר בפרמטרים a ו- k במידת הצורך וענה על התתי- סעיפים שלפניך:

(i). מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם הצירים.

(ii). מצא את שיעורי נקודות הקיצון הפנימיות של שתי הפונקציות.

גרף הפונקציה $h(x) = f(x) - g(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$.

ב. הוכח: $a = 2k$.

ג.(1). שרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות בתחום הנתון עבור k חיובי.

(2). מצא עבור אילו ערכי x מתקיים $f(x) \geq g(x)$.

ד. נתונה הפונקציה: $t(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $t(x)$.

(2). מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $t(x)$.

(3). האם קיים ישר המקביל לציר ה- x החותך את גרף הפונקציה $t(x)$ בשתי נקודות בתחום הנ"ל?
אם כן, ציין את משוואת ישר זה. אם לא, נמק.

asherlee99@gmail.com

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\sqrt{ax^2+9}-bx$ (a, b פרמטרים).

הנקודות $\left(\sqrt{3}\,,0\right)$ ו- $(0,-1)$ הן נקודות החיתוך של גרף הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים.

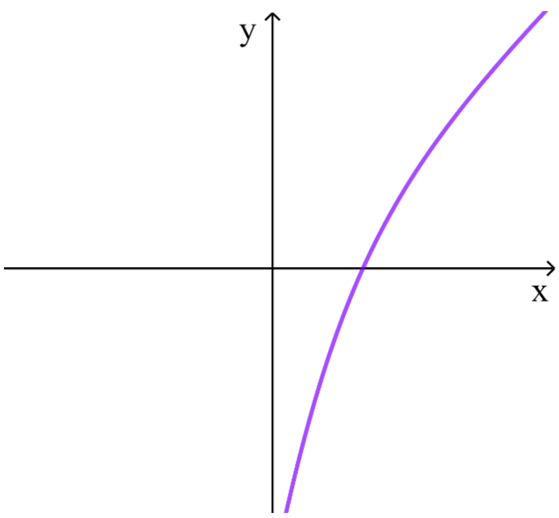
א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

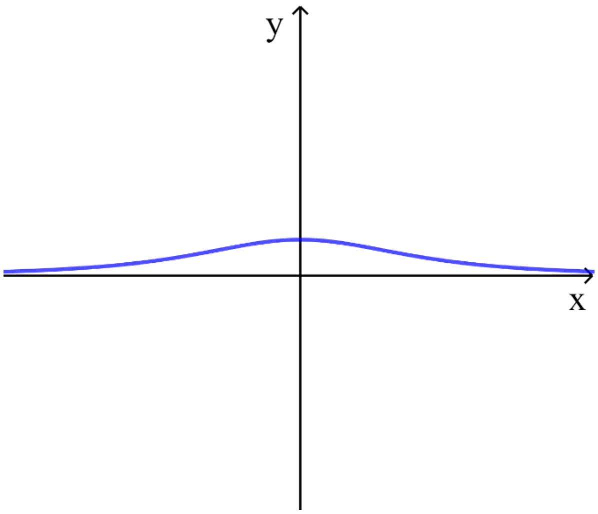
ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וסוגה.

ד. הוכח: $f(x)>0$ לכל x ממשי.

ה. לפניך שני גרפים:



(I)



(II)

(i). קבע איזה מהגרפים מתאר את הפונקציה $h(x)=f''(x)$ ואיזה מתאר את $k(x)=f(x)\cdot f'(x)$. נמק קביעתך.

(ii). מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות עם הצירים (אם יש).

ו. הוכח: $\int_0^{\sqrt{3}} k(x)dx<\int_0^{\sqrt{3}} h(x)dx$ (אין צורך לחשב את האינטגרל).

asherlee99@gmail.com

8. נתונות שתי הפונקציות : $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ו- $g(x) = -x^2 + m$ ($m < 0$).

מעבירים ישר $x = t$ החותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A , את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B

ואת ציר ה- x בנקודה O .

א. הבע באמצעות m ו- t במידת הצורך את שיעורי הנקודות A , B ו- O .

ב. מצא עבור איזה ערך של t (הבע באמצעות m במידת הצורך) היחס $\frac{AO}{BO}$:

(1). מינימלי.

(2). מקסימלי.

ג.(1). עבור ערך t שעבורו היחס $\frac{AO}{BO}$ מקסימלי, הבע באמצעות m את שטח המרובע שקודקודיו הם A , B ונקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ עם ציר ה- y .

(2). האם קיים ערך של m עבורו שטח המרובע המתקבל מקסימלי? נמק.

תשובות סופיות:

1. א. 10 קמ"ש , 14 קמ"ש.

ב. $54\frac{1}{6}$ ק"מ.

2. א. (1). $a_1 = m\ ,\ a_2 = 2m\ ,\ a_3 = 4m$.

(2). $q = 2$.

ב. הוכחה.

ג. (1). $q = \frac{1}{2}$.

(2). $\frac{1365}{2048}$.

3. א. $m = 28$.

ב. (1). 18 בנות ו- 10 בנים.

(2). $\frac{1089}{2744}$.

4. א. הוכחה.

ב. $\frac{1}{6}$.

ג. $\frac{3}{25}$.

5. א. הוכחה.

ב. $30°$.

ג. $8\sqrt{3}$ יח'.

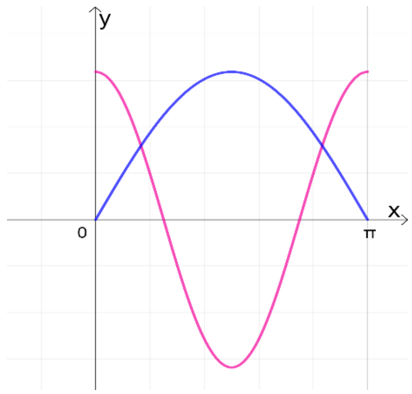
6. א. (i) . $f(x)$: $(0,0)\,,(\pi,0)$, $g(x)$: $(0\,,2k)\,,\left(\frac{3\pi}{4},0\right)\,,\left(\frac{\pi}{4}\,,0\right)$.

(ii) . $f(x)$: $(\frac{\pi}{2}\,,a)$, $g(x)$: $(\frac{\pi}{2}\,,-2k)$.

ב. הוכחה.

asherlee99@gmail.com

ג. (1).



(2). $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$.

ד. (1). $\frac{3\pi}{4} < x \le \pi$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ או $0 \le x < \frac{\pi}{4}$.

(2). חיוביות : $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

שליליות : $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

(3). כן. לדוגמה : $y = 1$.

7. א. $a = 1 ,\ b = 1$.

ב. כל x .

ג. $(\sqrt{3}\,, 0)$ מינימום.

ד. הוכחה.

ה. (i). גרף $h(x) - (II)$, גרף $k(x) - (I)$.

(ii). $k(x)$: $(\sqrt{3}\,, 0)$ ו- $(0, -1)$, $h(x)$: $(0\,, \frac{2}{3})$.

ו. הוכחה.

8. א. $A\ (t\,, t^2 + 2t + 1)$, $B\ (t,\ -t^2 + m)$, $O\ (t, 0)$.

ב. (1). $t = -1$.

(2). $t = -m$.

ג. (1). $S = -m^3 + 2m^2 - m$.

(2). לא.

asherlee99@gmail.com