

# מתכונת 12 שאלון 581 – לפי מיקוד קיץ 2022

## 5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש וחצי שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - אלגברה והסתברות

פרק שני - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך -  $5 \times 20 = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1). מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרויות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2). דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1). אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2). התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזר

המחשבון.

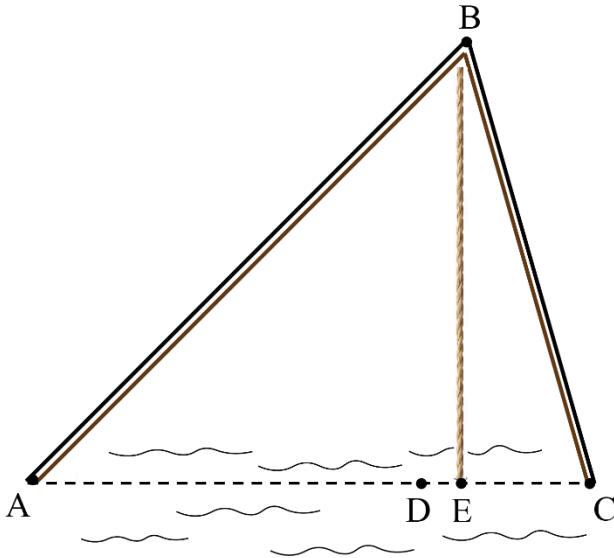
הסבר כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ונבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

### פרק ראשון- אלגברה והסתברות



1. ביום מסוים בשעה 15:00 יצאה מכונית במהירות קבועה מנקודה A הנמצאת בתחתית הגשר AB לכיוון הנקודה B.

באותה שעה שבה החלה המכונית בתנועתה, התחילה להפליג יאכטה עם כיוון הזרם במהירות קבועה, בנהר שתחילתו בנקודה A וסופו בנקודה C. לאחר שעתיים מרגע היציאה של המכונית והיאכטה, המכונית הגיעה לנקודה B והספינה הגיעה לנקודה D.

הספינה המשיכה לנוע מיד לעבר הנקודה C (ללא עצירה), ולעומתה המכונית עצרה למשך 20 דקות בנקודה B ורק

לאחר מכן המשיכה במהירות שונה לעבר הנקודה C (דרך הגשר BC). בשעה 18:20

המכונית והיאכטה נפגשו בנקודה C. נתון:  $\frac{AB}{BC} = \frac{8AD}{9DC}$ .

א. חשב את היחס בין המהירות של המכונית לבין המהירות של הסירה במים עומדים, אם ידוע כי מהירות הנסיעה של המכונית

לאורך הגשר BC הייתה גדולה פי 2.25 ממהירות היאכטה במים עומדים.

מורידים חבל מהנקודה B באופן אנכי למסלול ההפלגה, כך שהקצה השני

של החבל ממוקם בנקודה E על מסלול ההפלגה (ראה ציור).

הנקודה E נמצאת בין הנקודות D ו-C כך ש:  $DE = 3$  ק"מ,  $DE : EC = 1 : 9$ .

ב. חשב את מהירות היאכטה כאשר היא שטה עם הזרם.

ג. נתון: אורך החבל קצר ב-24 ק"מ מאורך הגשר AB.

מצא את מהירות המכונית לאורך תנועה על הגשר BC.

2. נתנה סדרה הנדסית  $a_n$  בעלת  $2n$  איברים, שמנתה  $q$  ( $q \neq 1$ ) וכל איבריה חיוביים.

$$b_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_3 - a_2}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_4 - a_3}, \quad \dots$$

א. (1). האם ניתן לומר כי הסדרה  $b_n$  הנדסית? נמק.

(2). קבע האם הסדרה  $b_n$  היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה שאינה עולה ואינה

יורדת. נמק תשובתך.

נתון:  $a_1 = 1$ .

ב. הבע באמצעות  $n$  ו- $q$  את היחס בין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה

$a_n$  ובין סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה  $b_n$ .

נתון: סכום האיברים הנמצאים במקומות האי זוגיים בסדרה  $a_n$  גדול פי  $0.25n$  מן

היחס שמצאת בסעיף ב'.

ג. מצא את מנת הסדרה  $a_n$ .

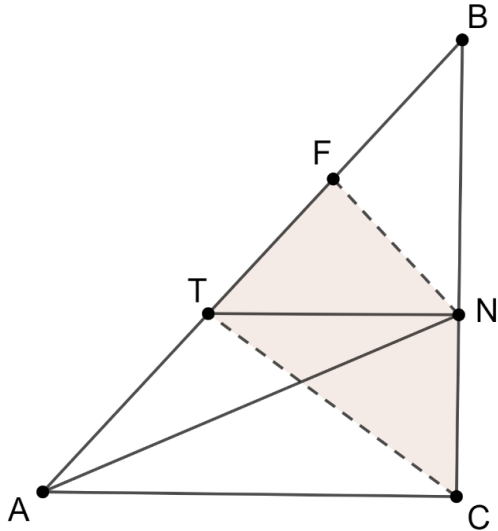
$$d. \text{ מגדירים סדרה חדשה: } c_n = \frac{b_n}{a_{n+1}}$$

(1). הבע באמצעות  $n$  את סכום  $2n-1$  האיברים הראשונים בסדרה.

(2). נתון:  $n = 4$ . חשב את ערך הביטוי:

$$b_1 \cdot a_2 - \frac{b_1}{a_2} + b_2 \cdot a_3 - \frac{b_2}{a_3} + \dots + b_{2n-1} \cdot a_{2n} - \frac{b_{2n-1}}{a_{2n}}$$

3. במרכז למוזיקה יש שיעורי לימוד נגינה במגוון כלים מוזיקליים. בין היתר, יש שיעורי לימוד נגינה בגיטרה ושיעורי לימוד נגינה בפסנתר.
- ההסתברות לבחור באקראי תלמיד אחד מתוך שני תלמידים שאינו לומד נגינה בפסנתר היא 0.32 .
- מתוך התלמידים שלומדים נגינה בפסנתר, ההסתברות לבחור תלמיד שגם לומד נגינה בגיטרה גדולה פי 3 מההסתברות לבחור תלמיד שאינו מנגן בגיטרה.
- א. (1). בוחרים באקראי תלמיד שלומד נגינה בפסנתר.  
מהי ההסתברות שתלמיד זה אינו לומד נגינה בגיטרה?
- (2). חשב את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד מהמרכז שמנגן בפסנתר, אם נתון כי הסתברות זו קטנה מההסתברות לבחור באקראי תלמיד שאינו מנגן בפסנתר.
- ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שלא לומד נגינה בגיטרה וגם לא נגינה בפסנתר גדולה פי 4 מההסתברות לבחור באקראי תלמיד שלומד נגינה בגיטרה וגם נגינה בפסנתר.
- ב. חשב את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד הלומד במרכז למוזיקה שלומד נגינה בפסנתר או שהתלמיד לא לומד נגינה בפסנתר וגם לא נגינה בגיטרה.
- בוחרים באקראי 5 תלמידים.
- ג. מהי ההסתברות שרוב התלמידים שנבחרו לא לומדים נגינה בפסנתר או שלומדים גם נגינה בפסנתר וגם נגינה בגיטרה?



4. במשולש ישר זווית  $\Delta ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )

.  $NF \perp AB$ ,  $TN \parallel AC$ ,  $\angle A$  חוצה את זווית  $\angle A$

א. (1). הוכח:  $AT = TN$ .

(2). הוכח:  $NF = NC$ .

ב. נתון:  $TB = 5x$ ,  $\frac{S_{\Delta BTN}}{S_{\Delta ATN}} = \frac{5}{4}$

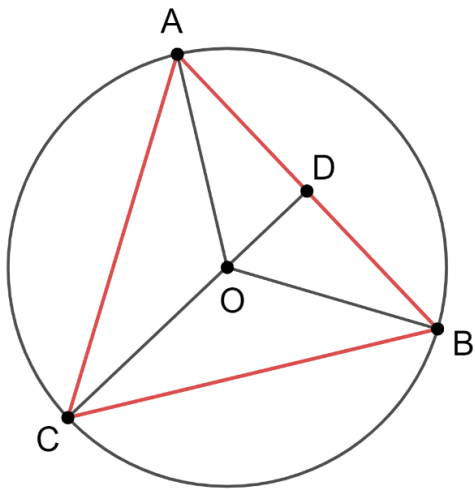
. בטא את  $CB$  באמצעות  $x$ .

ג. נתון:  $S_{\Delta ABC} = 1944$  סמ"ר. חשב את אורכי

הקטעים  $AC$  ו- $FN$ .

ד. (1). חשב את אורך הקטע  $TF$ .

(2). חשב את שטח המרובע  $CTFN$ .



5. משולש  $\Delta ABC$  חסום במעגל שמרכזו בנקודה  $O$ .

הנקודה  $D$  היא נקודת החיתוך של המשך  $CO$  עם

הקטע  $AB$ . נתון:  $\angle ACD = \alpha$ ,  $\angle BCD = \beta$ .

א. הוכח:  $\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\beta)}$ .

נתון:  $S_{\Delta ABO} = 2 \cdot S_{\Delta ADO}$ .

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש  $\Delta ABC$ .

נסמן:  $AB = m$ .

ג. הבע באמצעות  $m$  ו- $\alpha$  את רדיוס המעגל החסום

במשולש  $\Delta ABC$ .

נתון כי הנקודה  $O$  היא גם מרכז המעגל החסום

במשולש  $\Delta ABC$ .

ד. הבע באמצעות  $m$  את היקף המעגל החסום במשולש  $\Delta ABC$ .

## פרק שלישי - חשבון דיפרנציאלי של פולינומים, פונקציות שורש,

### של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 1}{x^4 + x^2}}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש).

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה (אם יש).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתונה הפונקציה:  $g(x) = -f(x)$ .

היעזר בתשובותיך לסעיפים הקודמים ומצא את:

(1). שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$  וסוגן.

(2). האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה  $g(x)$  (אם יש).

(3). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ה. הישר  $y = kx$  משיק לגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  ( $k \neq 0$ ).

סכום המרחקים של שתי נקודות ההשקה מציר ה-  $x$  הוא  $\sqrt{2}$  יח'.

חשב את  $k$  עבור כל אחד מהמקרים הבאים:

(1).  $k > 0$ .

(2).  $k < 0$ .

7. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x - \cos 2x}{\sin x}$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1). מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(2). מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וסוגן.

(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4). מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

נתונה הפונקציה:  $g(x) = \frac{\cos x(2 - \cos 2x)}{\sin^2 x}$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ד. (1). הוכח:  $g(x) = f'(x)$ .

(2). האם הפונקציה  $g(x)$  זוגית? נמק.

(3). סרטט סקיצה של הפונקציה  $g(x)$  בתחום הנתון.

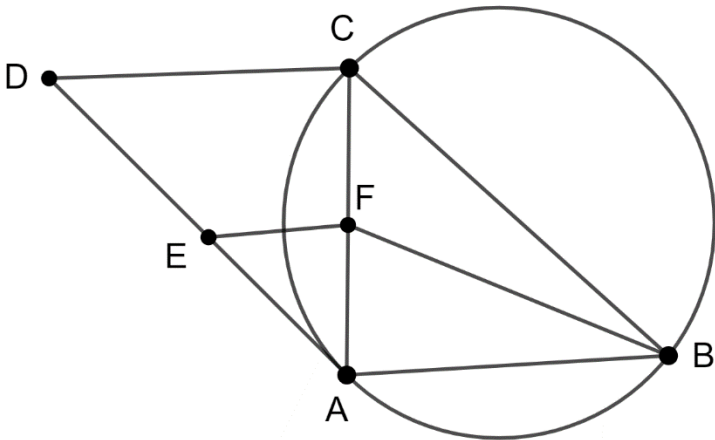
ה. היעזר בסעיפים הקודמים ומצא:

כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x (2 - \cos 2x) = \sin^2 x$  בתחום הנתון? נמק.

ו. הפרמטרים  $a$  ו- $b$  חיוביים. נתון:  $b < a < \pi$ .

היעזר בסעיפים הקודמים והוכח:

$$\int_{-a}^{-b} f''(x) dx = - \int_b^a f''(x) dx$$



8. לפניך משולש  $\triangle ABC$  החסום במעגל.

הנקודה E נמצאת על הקטע AD המשיק

למעגל בנקודה A.

נתון:  $\angle BCA = \angle AEF$ .

א. נמק מדוע המשולשים  $\triangle AFE$  ו-  $\triangle BAC$

דומים זה לזה.

אורך הקטע BC גדול ב- 5 ס"מ מאורך הקטע AB.

נתון:  $AD = 15$  ס"מ,  $AB = DE = x$ .

ב. (1). הבע באמצעות x את אורך הקטע AF.

(2). מצא מהו ערכו של x שעבורו אורך הקטע AF

מקסימלי.

ג. מצא את היחס בין שטחי המשולשים  $\triangle AFE$  ו-  $\triangle BAC$

כאשר אורך הקטע AF מקסימלי.



תשובות סופיות:

1. א.  $\frac{3}{2}$ .

ב. (1). 22.5 קמ"ש.

(2). 45 קמ"ש.

2. א. (1). כן.

(2). לא עולה ולא יורדת (קבועה).

ב.  $\frac{q^{2n}-1}{n(q+1)}$ .

ג.  $q = 5$ .

ד. (1)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} - 1$  .  $-\frac{5}{16}$ .

(2). 122,068.44.

3. א. (1). 0.25.

(2). 0.2.

ב. 0.8.

ג. 0.998.

4. א. (1). הוכחה.

(2). הוכחה.

ב.  $CB = 5.4x$ .

ג.  $AC = 72$  ס"מ,  $FN = 24$  ס"מ

ד. (1). 32 ס"מ.

(2). 864 סמ"ר.

5. א. הוכחה.

ב.  $2\alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$ .

ג.  $\frac{1}{2}m \cdot \tan(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$

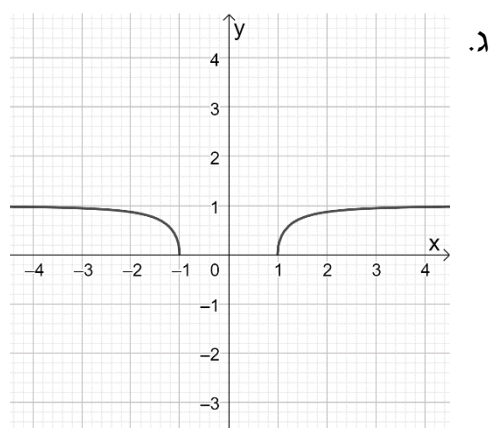
ד.  $\frac{\pi m}{\sqrt{3}}$

6. א.  $x \geq 1$  או  $x \leq -1$ .

ב. (1).  $(-1,0)$ ,  $(1,0)$ .

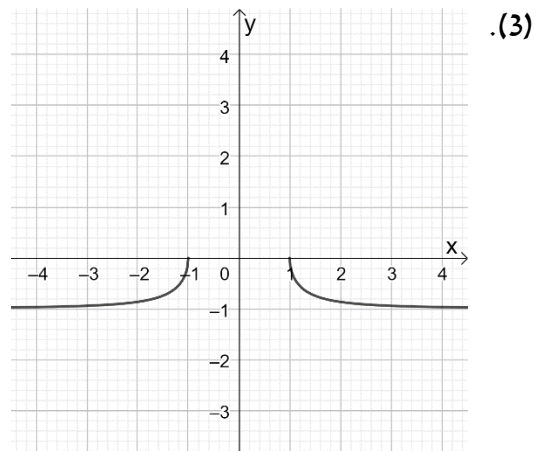
(2).  $(1,0)$  מינימום בקצה,  $(-1,0)$  מקסימום בקצה.

(3).  $y = 1$ .



ד. (1). (1,0) מקסימום בקצה, (-1,0) מינימום בקצה.

$$(2). y = -1$$



$$ה. (1). k = \frac{1}{2}$$

$$(2). k = -\frac{1}{2}$$

7. א.  $0 < x < \pi$  או  $-\pi < x < 0$

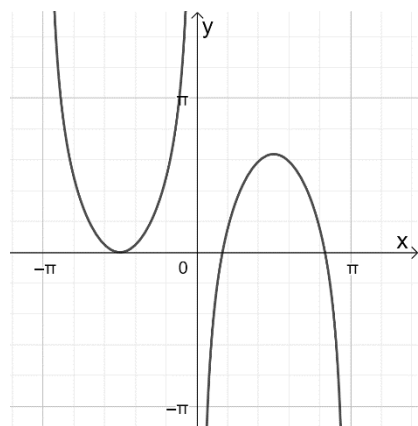
$$ב. (1). \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$$

(2). מינימום,  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  , מקסימום,  $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

(3). עליה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  או  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$$(4). x = -\pi, x = 0, x = \pi$$

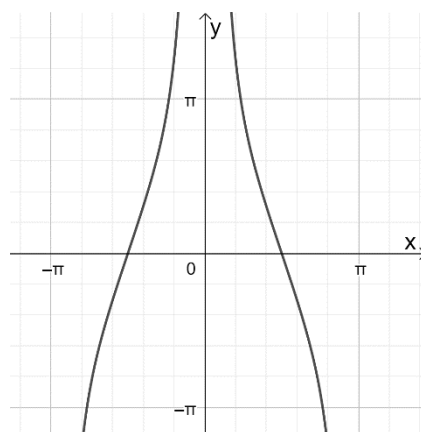


ג.

ד. (1). הוכחה.

(2). כן.

(3).



ה. שני פתרונות.

ו. הוכחה.

8. א. הוכחה.

ב. (1).  $AF = \frac{15x - x^2}{x + 5}$ .



עריכה: לי אשר

כותבים: לי אשר, דנה דבש, פאטמה עבד אלחי

. (2)  $x = 5$

ג. 1:1 .